La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.

Frédérick Tempier

UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
Épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Frédérick TEMPIER

La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.

Thèse dirigée par Catherine HOUDEMENT et Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

Soutenue publiquement le 26 novembre 2013

Membres du jury :

Lalina Coulange, E3D-LACES Université de Bordeaux	Rapporteure
Catherine Houdement, LDAR, Université de Rouen	Directrice de thèse
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, LDAR, Université d'Artois	Directrice de thèse
Gérard Sensevy, CREAD, Université Rennes 2	Rapporteur
Aviva Szpirglas, LMA, Université de Poitiers	
Laurent Vivier, LDAR, Université Paris Diderot	

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mes deux directrices de thèse, Catherine Houdement et Marie-Jeanne Perrin-Glorian pour leur soutien, leur rigueur, leurs conseils avisés, leur présence quand j'en avais besoin et pour la confiance qu'elles m'ont témoignée. Je garderai un très bon souvenir de nos rencontres à Paris qui ont ponctué l'avancée de ma thèse et ont permis d'approfondir mon travail de réflexion.

Que soient également remerciés Lalina Coulange et Gérard Sensevy, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse et pour leurs remarques constructives. Ma reconnaissance également à Aviva Szpirglas et Laurent Vivier pour leur participation à mon jury de soutenance.

Ce travail n'aurait bien-sûr pas pu être réalisé sans les nombreux enseignants d'écoles primaires de Charente à qui je sais gré d'avoir bien voulu m'accorder du temps et de l'intérêt.

Mes remerciement vont également vers l'équipe du Laboratoire de Didactique André Revuz pour son soutien et particulièrement aux membres du groupe « M615 » pour les échanges fructueux que nous avons pu avoir sur la numération. Merci aussi aux collègues de l'Université de Poitiers pour leur regard « extérieur » sur mon travail lors de nos discussions au « caf'conf ».

Dans ce genre de travail, une relecture s'impose et Marie-Claire, ma collègue de l'IUFM, a fait preuve de beaucoup de patience et d'attention. Merci à elle aussi pour m'avoir tracé la voie de la recherche en didactique ainsi qu'à Cécile avec qui je me suis lancé dans cette longue aventure il y a maintenant quelques années de cela.

L'IUFM de l'Université de Poitiers m'a accordé des heures de décharge d'enseignement pendant ces deux dernières années, ce qui a facilité les conditions de rédaction de cette thèse.

Enfin je tiens à remercier toute ma famille pour son soutien et ses encouragements. Je suis heureux de pouvoir remercier ici Martin et Eugénie qui ont beaucoup vu leur papa à son bureau pendant ces dernières années et qui ont parfois réussi à l'en détacher… ainsi que Delphine pour avoir su gérer mes absences et pour ses encouragements qui m'ont aidé à surmonter les moments difficiles.

Table des matières

Introduction générale

Position du problème

Notre système de numération écrit joue un rôle essentiel dans les mathématiques de l'école primaire. La compréhension de son fonctionnement est en jeu dans le travail sur les techniques de calcul : calcul posé, calcul réfléchi ou multiplications et divisions par 10, 100, etc. Elle est un point d'appui pour les conversions entre unités de mesures pour les longueurs ou les masses. Enfin, l'étude des nombres décimaux vient en prolongement des règles de la numération des entiers qu'elle généralise.
Serfati (2005) parlant de l'interprétation d'un nombre écrit en chiffres explique :

> « Si immédiate qu'elle nous paraisse aujourd'hui, [elle] aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant » (p.66-67).

Une spécificité de l'écriture dans notre système de numération tient au fait que la « concaténation » de chiffres cache le fait que ces chiffres n'ont pas tous la même valeur et surtout le lien (décimal) entre les valeurs de ces chiffres. S'approprier la signification de cette écriture en chiffres demande dans un premier temps de comprendre la notion d'*unité*, à la base des systèmes de numération (Guitel 1975, Ifrah 1995), c'est-à-dire l'idée que dix peut former un tout, une nouvelle unité, la dizaine (Fosnot & Dolk 2001, Van de Walle 2010, Houdement & Chambris 2012), dont on écrit le nombre au deuxième rang (à partir de la droite) de l'écriture en chiffres. Pour les nombres inférieurs à cent, la numération parlée peut ne pas être une aide pour l'apprentissage des règles de fonctionnement de la numération écrite car même s'il existe des liens entre ces deux systèmes,

> « les écritures chiffrées du système de numération de position usuel ne sont pas la version écrite des mots utilisés pour dire les nombres en France (et dans d'autres pays), et, réciproquement, ces mots ne sont pas la version orale des écritures chiffrées » (Mounier 2012, p.236).

Pour les plus grands nombres (au-delà de cent), la définition de nouvelles unités se poursuit de manière itérative : dix dizaines sont égales à une centaine, etc. **L'appropriation de ce *principe décimal* est alors un enjeu essentiel pour l'apprentissage de la numération**. C'est cela qui nous intéresse particulièrement dans notre travail. Une centaine peut être interprétée à la fois comme cent unités, une unité à part entière ou encore dix dizaines (Fuson et al. 1997, Thanheiser 2009). Le nombre 123, par exemple, peut être considéré comme 123 unités (simples), 1 centaine 2 dizaines et 3 unités ou 12 dizaines 3 unités. Cette flexibilité d'interprétation est importante pour le calcul, mais le dernier type de décomposition semble plus difficile à acquérir car la numération parlée n'est pas une aide (Brissiaud 2005) : on ne dit pas « douze-dix-trois » à l'oral.
De nombreuses recherches pointent les difficultés que pose aux élèves l'apprentissage de la numération, que ce soit pour les nombres inférieurs à cent (Thompson & Bramald 2002 en rappellent quelques-unes) ou plus grands (Bednarz & Janvier 1984, DeBlois 1996, Thomas 2004) pour lesquels les relations entre unités sont un enjeu essentiel. Ces difficultés peuvent être persistantes tout au long de la scolarité pour certains élèves. En France, par exemple, en 2002, moins de la moitié des élèves à l'entrée en sixième (11 ans) réussissent à compléter : « 25 dizaines = … unités » (évaluations nationales organisées par le ministère de l'éducation et de la recherche). Moins d'un quart des 251 élèves de CM2 interrogés par Chambris (2008) réussissent à déterminer le nombre de centaines dans 8734.
Selon Bednarz & Janvier (1984) les difficultés des élèves pourraient être liées à un enseignement de la numération où, par exemple,

> « toute représentation du nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre […]. Imposer prématurément une présentation ordonnée conduit nécessairement l'enfant à une interprétation de l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position, et écarte toute signification véritable accordée à cette position en termes de groupements » (p.13).

Les enseignants pourraient alors ne pas être conscients de certaines difficultés des élèves. De plus, les évaluations standards proposées par les enseignants pourraient occulter certaines tâches permettant de s'assurer d'une réelle compréhension de la numération (Rogers 2012). Les enseignants peuvent aussi considérer que certains problèmes numériques mettant en jeu des connaissances de numération relèvent uniquement du calcul (Parouty 2005).
Dans son étude des liens entre numération et système métrique dans des manuels français Chambris (2008) montre qu'il a existé différentes approches de la numération dans les manuels au cours du XXème siècle, ce qui pourrait se traduire aujourd'hui par des pratiques assez hétérogènes dans les classes. Elle pointe la disparition des conversions entre unités (comme convertir 3 milliers en centaines ou convertir 30 centaines en milliers) dans les manuels depuis une trentaine d'années, alors que ces conversions pourraient être essentielles dans le travail sur l'aspect décimal de la numération. On peut alors se demander comment est travaillé cet aspect actuellement dans les manuels et dans les classes. Quelles activités sont susceptibles de le mettre en jeu dans le travail sur la numération ? Comment sont mises en œuvre ces activités dans les classes ? Cela permet-il aux élèves de s'approprier notre système de numération écrit ?

Premiers éléments de problématique

Dans notre mémoire de master (Tempier 2009), nous avons commencé à étudier ces questions à partir d'analyses de manuels actuels et d'observations d'enseignants en classe. Pour notre thèse nous poursuivons cette étude tout en cherchant à concevoir une ressource pour enseigner la numération à l'école primaire. Cela nous amène à nous poser des questions à la fois sur la conception de situations permettant de mettre en jeu les savoirs de la numération mais aussi sur leur description dans une ressource qui soit acceptée et utilisable par les enseignants, condition nécessaire pour une diffusion dans l'enseignement ordinaire. Ces questions peuvent être étudiées par la méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource (Perrin-Glorian 2011) qui prend en charge ces deux niveaux de questionnement. En effet, les difficultés de transmission des ingénieries didactiques dans les classes ordinaires, suggèrent de « passer de l'idée de transmission qui pose le problème de façon descendante de la recherche vers l'enseignement à une idée d'adaptation beaucoup plus dialectique relativement aux pratiques ordinaires » (Perrin-Glorian 2011). On peut alors considérer que :

> « le problème n'est plus seulement celui du contrôle et de la mise en œuvre des principes théoriques qui guident l'ingénierie didactique. C'est aussi celui des possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans les conditions ordinaires de fonctionnement de l'enseignement » (Perrin-Glorian 2011, p.57).

Cela entraîne de nombreuses questions relatives au contenu et à la forme de la ressource utilisée : quel est le niveau pertinent de description des situations ? Quels détails sur le déroulement (phases de dévolution, recherche, mise en commun des procédures et des résultats, synthèse, …) ? Quelles variables didactiques faut-il décrire avec leurs valeurs ? Dans quel cas est-il utile d'indiquer des modalités d'organisation de travail (individuel, en groupes, …), de décrire des erreurs possibles d'élèves, des procédures attendues ? Comment décrire les enjeux mathématiques essentiels ? Quelle quantité d'information est-il raisonnable de donner dans la ressource ? Comment choisir ce qui est essentiel à décrire ? Etc.

Ainsi **l'objectif de la thèse consiste à élaborer une ressource (perspective de développement) et à identifier des conditions (perspective de recherche) que devrait vérifier une ressource pour aider les enseignants à améliorer leur enseignement de la numération, notamment en prenant davantage en compte l'aspect décimal de la numération**.

Choix du niveau de classe étudié

Nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement au CE2 (élèves de 8/9 ans), niveau de classe où la numération des entiers est encore un enjeu important, où sont introduits les milliers ce qui donne plus de richesse dans les conversions que dans les classes précédentes. En effet, plusieurs relations entre unités sont alors en jeu puisque le millier est égal à la fois à dix centaines, cent dizaines et mille unités. Il existe de nombreuses décompositions des nombres, comme par exemple 1234 = 1m 2c 3d 4u (décomposition canonique) mais aussi 1234 = 12c 3d 4u ou 1234 = 123d 4u, etc. De plus, cette étape du millier paraît essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Les cadres théoriques et premiers éléments de méthodologie

La conception des situations doit s'appuyer sur une étude approfondie de la numération écrite. Mais, pour permettre leur importation dans les classes ordinaires, elle doit aussi prendre en compte les conditions et contraintes de l'enseignement actuel de cette notion.

Pour faire un état des lieux de l'enseignement de la numération, notamment autour de la question de la prise en compte de l'aspect décimal de la numération, nous nous appuyons principalement sur le cadre de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD, Chevallard

1992, 2007) et du concept de *transposition didactique* (Chevallard, 1991) qui permet d'étudier les transformations que subit un objet de savoir « savant » quand il est d'abord désigné comme étant objet « à enseigner » puis quand il devient objet « enseigné ». Ces transformations se font à l'intérieur de différentes institutions, qui jouent toutes un rôle différent dans ce processus, ce qui est résumé dans le schéma suivant (Bosch et Gascon, 2005) **:**

OM savante	⇒	OM à enseigner	⇒	OM enseignée	⇒	OM apprise
I_1		I_2		I_3		I_4

Figure 1 : schéma[1] de la transposition didactique de Bosch et Gascon (2005, p.116)

Mais, pour étudier ces OM imbriquées, il est important, comme le proposent Bosch et Gascon (2005), d'avoir un « point de vue épistémologique » qui permette de regarder les différentes étapes du processus de transposition didactique à partir d'un promontoire d'observation. Celui-ci est donné par une *organisation mathématique de référence*.

Nous nous appuyons principalement sur l'étude de la numération dans les manuels au cours du XX[ème] siècle faite par Chambris (2008) pour construire cette OM de référence et nous chercherons à l'enrichir tout au long de la thèse : « l'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniements » (Bosch et Gascon 2005).

Pour décrire les objets du travail mathématique, nous utilisons un point de vue issu de la TAD : la notion d'*ostensif* (et de *non ostensif*) de Bosch & Chevallard (1999). Cela est essentiel dans notre recherche puisque nous nous intéressons aux propriétés de l'ostensif « écriture en chiffres » d'un nombre. Divers autres ostensifs sont utilisés dans cet apprentissage (le nom usuel des nombres, les unités de numération, les puissances de dix, les matériels de numération, ...).

Nous nous appuyons également sur la *théorie des situations didactiques* (TSD, Brousseau 1998) pour enrichir l'OM de référence par la recherche d'une *situation fondamentale* (SF) pour la numération, permettant l'étude de la mise en fonctionnement des savoirs. Le cadre théorique de la TSD sera aussi utilisé dans l'étude de l'OM enseignée pour l'analyse des séances de classes, en appui sur Margolinas (2002) et Perrin & Hersant (2003). Enfin pour la conception des situations, la SF est un point d'appui essentiel puisqu'il s'agit de chercher une mise en scène de cette SF pertinente et adaptée aux conditions ordinaires d'enseignement.

Plan d'étude

Nous commençons par un chapitre visant la recherche d'une OM de référence et une SF pour la numération. C'est un point d'appui pour tout le travail de la thèse : à la fois pour notre état des lieux et, par la suite, pour la conception d'une ressource pour les enseignants. En retour, l'OM de référence et la SF sont enrichies par les études faites dans les différentes parties, comme le suggère le schéma général du plan de la thèse en page suivante.

[1] « Dans ce schéma, I1, est l'institution productrice du savoir mathématique, I2 la noosphère, I3 l'institution scolaire et I4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique » (Bosch et Gascon 2005, p.116).

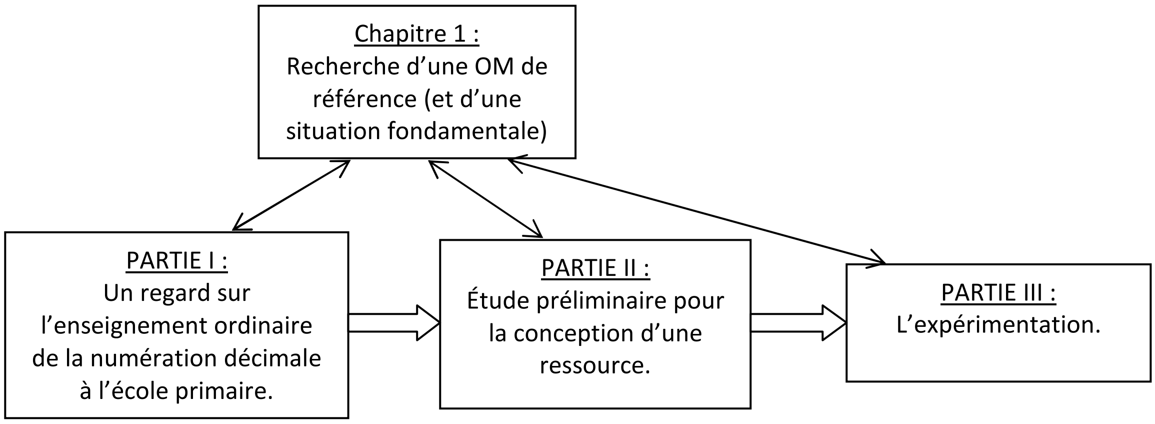


Figure 2 : schéma général du plan de la thèse

Nous faisons l'état des lieux de l'enseignement de la numération dans **une première partie (chapitres 2, 3 et 4)**, autour de la question de la prise en compte de l'aspect décimal de la numération dans les programmes, les manuels et dans les classes. Nous faisons aussi un point concernant les réussites et difficultés des élèves de CE2 avant d'aborder les nombres à quatre chiffres.

Dans une deuxième partie (chapitres 5, 6, 7), en nous appuyant sur les résultats de la première partie ainsi que sur ce que les recherches en didactique nous apprennent sur les usages des ressources par les enseignants du primaire (chapitre 5), nous formulons une problématique plus précise concernant la conception de la ressource. Nous précisons aussi notre méthodologie pour la conception d'une ressource en nous appuyant sur les méthodologies de recherche-développement et en particulier l'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource de Perrin-Glorian (2011) et nous indiquons comment nous nous appuyons sur les cadres théoriques de la TAD et la TSD pour la conception de la ressource et l'analyse de son usage en classe (chapitre 6). Une première ressource est alors élaborée et testée dans deux classes seulement (pré-expérimentation), ce qui permet de mettre au point une version 1 de la ressource (chapitre 7) dont l'étude de l'usage sera l'objet de l'expérimentation de la partie suivante.

Dans une troisième partie (chapitres 8, 9, 10 et 11), nous présentons les choix ayant guidé la conception de la ressource : mise en scène de la situation fondamentale, description dans la ressource et ergonomie de la ressource. Ces choix sont mis à l'étude dans une expérimentation avec plusieurs enseignants dont certains seront observés en classe. Nous analyserons dans le détail les mises en œuvre des situations (chapitre 9 et 10) et nous reviendrons dans un chapitre de conclusion (chapitre 11) sur les séquences construites par les enseignants, les apprentissages des élèves. Cela permettra de questionner les choix effectués et de faire de propositions de modifications en vue de la conception d'une version 2.

Nous terminons par une **conclusion générale** dans laquelle nous revenons sur ce que ce travail nous a appris sur les contraintes institutionnelles pour l'enseignement de la numération, les apprentissages des élèves, les pratiques des enseignants ordinaires et nous proposons de nouvelles hypothèses pouvant guider la conception d'une ressource sur la numération à l'école primaire ainsi que des prolongements possibles de notre travail.

Chapitre 1

Construction d’une OM de référence pour l’étude de la numération écrite

Afin de se donner des points d’appui pour notre étude de l’enseignement de la numération à l’école primaire (partie I) et pour la proposition d’un processus d’enseignement de la numération (parties suivantes), nous allons construire dans ce chapitre une organisation mathématique (OM) de référence. C’est, en effet, un outil pour se donner « un point de vue épistémologique » sur l’OM à enseigner ou l’OM enseignée. Bosch et Gascon (2005) précisent les manières de décrire l’OM de référence :

> « La description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches ».

Pour cela, après avoir listé les différents ostensifs de l’étude de la numération (§I), nous menons une réflexion, à partir de travaux antérieurs, sur les conditions que doit remplir la théorie (au sens de la TAD) de l’OM de référence (§II). Nous nous attachons à donner une description des savoirs qui soit adaptée à nos besoins ultérieurs, c'est-à-dire pouvant servir de référence à la fois pour l’étude de l’existant et pour la proposition d’un processus didactique.

Nous poursuivons ensuite (§III) par la recherche d'une situation fondamentale de la numération permettant d'étudier des mises en fonctionnement de ces savoirs et de lui donner du « sens ».
Enfin, nous terminons (§IV) par la description de la partie « basse » de l'organisation mathématique de référence : types de tâches, techniques et technologies sans remonter jusqu'à la théorie.

I. Les ostensifs de la numération

Chambris (2008) a mis en évidence différents *ostensifs*[2] utilisés dans l'étude de la numération, en particulier pour la désignation des unités. Elle a montré que c'est un élément essentiel dans l'étude de la transposition didactique des savoirs de la numération.

Les ostensifs de désignation d'un nombre

<u>L'ostensif *écriture en chiffres* du nombre (EC)</u>
Quand nous parlons d'*écriture en chiffres* (EC) du nombre il s'agit de la désignation d'un nombre avec notre système de numération décimal positionnel usuel.

<u>L'ostensif *nom du nombre*</u>
Le *nom du nombre* est la désignation d'un nombre dans notre système de numération parlée usuel. Cela peut être à l'écrit ou à l'oral. Nous préciserons si besoin.

Lorsque nous nous intéressons à ces deux systèmes de numération (écrit en chiffres et parlé), outre les problèmes de congruence entre ces systèmes (Mounier 2010), se pose également un problème de limites d'utilisation de la numération parlée pour la description et la justification d'actions réalisées sur les écritures chiffrées, en particulier pour les conversions entre unités. En effet, la numération parlée n'est pas un ostensif permettant à lui seul de faire des conversions, car, comme le souligne Chambris (2008), « on ne « peut » pas dire « dix-cents » avant de le convertir en « mille » si on se place dans la numération orale ». Nous appellerons cette limite la *limite instrumentale de la numération parlée pour les conversions*. Ainsi l'usage exclusif de la numération parlée pourrait rendre difficile l'accession à certaines technologies de la numération écrite.
Il est donc nécessaire de s'appuyer sur une désignation intermédiaire entre numération parlée et numération écrite, qui peut être fournie par l'écriture en unités de numération, l'écriture selon les puissances de dix ou l'écriture en matériel de numération.

<u>L'ostensif *écriture en unités de numération* (EUN)</u>
Un nombre possède différentes *écritures en unités de numération (EUN)*. Par exemple un nombre comme 8504 peut s'écrire 8 milliers 5 centaines 4 unités ou bien 85 centaines 4

[2] Bosch et Chevallard (1999) distinguent deux types d'objets utilisés dans l'activité mathématique :

- « les objets ostensifs – du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible ».

- et « les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets », qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés » (p.90).

unités ou encore 8 milliers 4 unités 50 dizaines, etc. Nous appellerons *écriture canonique en unités de numération (EUNC)* celle pour laquelle le nombre d'unités de chaque ordre est au plus égal à neuf.

<u>L'ostensif *écriture selon les puissances de dix* (EPD)</u>
A l'école primaire on ne rencontre pas l'écriture des puissances de 10 avec exposants mais seulement les écritures en chiffres des puissances : 1, 10, 100, … On appelle *écriture selon les puissances de dix (EPD)* une écriture utilisant ces puissances, comme par exemple : 8504 = 85x100 + 4. *L'écriture canonique selon les puissances de dix (EPDC)* est l'écriture pour laquelle le coefficient devant chaque puissance de dix est au plus égal à neuf. Par exemple 8504 = (8x1000) + (5x100) + (4x1).

<u>L'ostensif *écriture additive selon les puissances de dix* (EAPD)</u>
Ces écritures peuvent être de la forme 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 ou 200 + 120 + 4 pour le nombre 324. Etant donné la taille des nombres étudiés, nous rencontrons plus rarement le premier type d'écriture. C'est donc le deuxième type que nous appellerons *écriture additive selon les puissances de dix (EAPD)*. L'*écriture additive canonique selon les puissances de dix (EAC)* est l'écriture pour laquelle il y a un seul chiffre non nul (le chiffre de plus haut rang) dans tous les termes de l'addition. Par exemple : 8 504 = 8 000 + 500 + 4.

<u>L'ostensif *écriture en matériel de numération* (EMN)</u>
Enfin en lien avec l'utilisation d'un matériel organisé (« matériel de numération », cf. ci-dessous), il est possible de décrire une quantité en nommant les différents groupements. Nous appellerons cette désignation l'*écriture en matériel de numération* (EMN). Il y a de nombreuses variantes possibles en fonction des mots utilisés pour désigner les groupements et de l'usage ou non du signe +. Par exemple 3 paquets de 100 + 2 paquets de 10 + 4 ou 3 groupes de 100, 2 paquets de 10, 4 éléments isolés. Cette écriture peut être canonique (EMNC) si le nombre de groupements de chaque ordre est au plus égal à neuf.

Autres ostensifs de l'étude de la numération

<u>L'ostensif *matériel de numération*</u>
Ce que nous nommons *matériel de numération* correspond alors à ces différents types de matériels utilisés dans les tâches de dénombrement à l'école, notamment pour "illustrer" les unités des différents ordres. Avec ces ostensifs, les relations entre unités sont incarnées par des ostensifs gestuels de groupements ou d'échange de dix unités d'un certain ordre contre une unité de l'ordre immédiatement supérieur (avec la possibilité de revenir en arrière sur l'unité immédiatement inférieure par l'opération inverse).
Cela amène alors à voir une unité d'un ordre donné soit uniquement comme une unité à part entière, soit dans sa relation avec les unités simples (si aucun groupement intermédiaire n'est visible), soit dans sa relation avec l'unité d'ordre immédiatement inférieur, soit dans toutes les relations qu'elle entretient avec les unités d'ordres inférieurs. Cela est illustré par Thanheiser (2009) à travers le cas de la centaine :

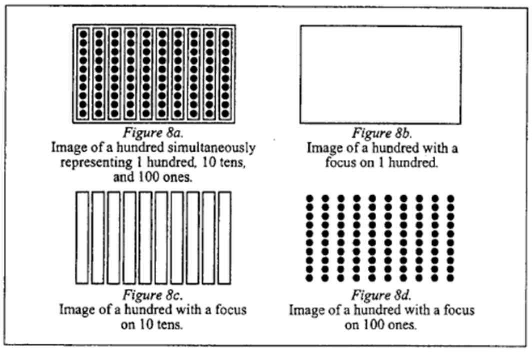


Figure 3 : différentes images d’une centaine (extrait de Thanheiser p.26)

Nous pouvons alors différencier les différents types de matériels de numération selon la distinction de Van de Walle et al. (2010) entre les matériels dits « proportionnels », pour lesquels la dizaine par exemple est physiquement dix fois plus grande que l’unité, la centaine physiquement dix fois plus grande que la dizaine, etc. et les matériels dits « non proportionnels » qui ne vérifient pas cette propriété.

Toujours selon Van de Walle et al. (2010), parmi les matériels proportionnels on peut distinguer les matériels « groupables » et les matériels « pré-groupés » (ou d’échanges)[3].

Matériels proportionnels, groupables.

En voici un exemple. Des « bûchettes » (allumettes) que l’on groupe par dix à l’aide d’un élastique puis dix groupes de dix sont à leur tour groupés par dix à l’aide d’un sachet, etc.

unité	dizaine	centaine	millier
			

Figure 4: exemple de matériel de type proportionnel, groupable

Matériels proportionnels, pré-groupés (ou d’échanges).

Exemple : dans le cas du matériel « multibase » (matériel utilisé dans les classes), les cubes se groupent par dix et s’échangent contre une barre de dix cubes, etc.

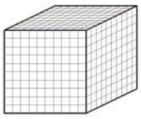
millier	centaine	dizaine	unité
			

Figure 5 : exemple de matériel de type proportionnel, pré-groupé

Matériels non proportionnels.

Ces matériels ne montrent pas la dizaine comme physiquement dix fois plus grande que l’unité, etc. Un exemple est fourni par la monnaie (fig.6).

[3] Citation de Van de Walle et al. 2010 : “A good base-ten model for ones, tens, and hundreds is one that is *proportional.* That is, a ten model is physically ten times larger than the model for a one, and a hundred model is ten times larger than the ten model. Base-ten models can be categorized as *groupable* and *regrouped” (p.191).*

centaine	dizaine	unité
		

Figure 6 : exemple de matériel de type non proportionnel

On notera que le *boulier* est un matériel non proportionnel pour lesquels dix unités d'un certain ordre (10 boules ou bien 9 et 1 que l'on ne peut pas prendre) s'échangent contre une unité de l'ordre immédiatement supérieur (1 boule de la tige "d'après").
Enfin les matériels de numération peuvent être aussi représentés (dessinés, photographiés, …) comme les exemples ci-dessus. Un matériel proportionnel peut alors ne plus l'être quand il est représenté, à cause notamment de problèmes de représentation en deux dimensions d'objets en trois dimensions.

<u>L'ostensif *tableau de numération*</u>
Selon Chambris (2008), le tableau de numération est beaucoup utilisé au moment de la réforme dans la tâche de dénombrement pour passer de la collection matérielle à un codage de l'écriture, puisque les noms des unités en base non décimale ne sont pas disponibles.
Le tableau correspond à une écriture en unités de numération pour laquelle on écrit le nom des unités dans la première ligne. Cela donne la possibilité d'écrire des nombres à plusieurs chiffres par unité, comme pour une écriture en unités de numération. Ainsi il est possible d'écrire :

M	C	D	U
1	25		4

L'écriture du chiffre 0 en cas d'absence d'unité n'est pas nécessaire.
Cependant il est possible que l'utilisation usuelle du tableau de numération en France impose des règles de fonctionnement, se calquant sur les règles de l'écriture en chiffres : écriture des 0 en cas d'absence d'unité isolée et un seul chiffre par colonne, ce qui correspond aussi aux règles utilisées dans un tableau de conversion entre unités du système métrique.

<u>L'ostensif *compteur*</u>
Cet ostensif est utilisé pour mettre en évidence les règles d'avancée (ou de recul) dans la suite écrite des nombres. Par exemple pour avancer de 1 unité on augmente de 1 le chiffre des unités simples. Si ce chiffre est 9 il devient alors 0 et on augmente de 1 le chiffre des dizaines. De même pour les dizaines, centaines, …
Deux types de compteurs peuvent être utilisés : avec prise en charge du changement d'unité (type Pascaline) ou non (compteur manuel en papier par exemple)[4].
Nous allons maintenant passer à une description des savoirs de la numération.

II. Recherche d'une théorie de la numération pour l'école primaire.

Nous cherchons dans ce paragraphe une description des savoirs de numération qui puisse servir directement de référence pour l'analyse ou la conception d'un processus didactique

[4] On trouvera sur ce site différents exemples de tels compteurs : http://db.vdb.free.fr/Nombres/Machines/CMB/CMB4.htm (consulté le 27/05/2013)

pour l'école primaire, ce qui relève de ce que Chambris (2010) appelle les savoirs du deuxième ordre, mathématiquement corrects, utiles pour l'enseignement mais pas nécessairement pour les mathématiciens (alors que les savoirs du premier ordre sont utiles pour les mathématiciens mais pas nécessairement adaptés pour l'enseignement). Il va notamment s'avérer essentiel d'avoir une description compatible avec le découpage de ces savoirs à l'école primaire.

II.1 Quelle description des savoirs de la numération ? Quelle théorie mathématique de référence ?

Modes de construction théorique

Chambris (2008) a montré dans sa thèse qu'il avait existé, aux cours des derniers siècles, différentes descriptions du savoir « savant » de la numération. Dans un premier type de description que l'on retrouve dans plusieurs traités jusqu'au début du XX^{ème} siècle, les deux systèmes de numération parlé et écrit sont construits de manière progressive à partir des dix premiers nombres et de leur nom dans le système parlé. Les unités de numération (unités, dizaines, centaines …) y jouent un rôle central pour faire le lien entre ces deux systèmes.
Chambris (2008) met en évidence une évolution des organisations mathématiques[5] au cours du XX^{ème} siècle, liée à des différences dans la façon de décrire les savoirs de la numération dans certains ouvrages de référence pour l'enseignement. Nous reproduisons ci-dessous un large extrait de la conclusion de sa thèse (2008) qui résume cette évolution :

> « Notre étude de la numération à la période classique nous a permis de montrer que les livres des élèves contiennent un texte qui est très proche du texte du traité de référence, textes qui donnent notamment une construction algorithmique de l'ensemble des entiers naturels dont on peut penser qu'elle est formulée avec des outils qui sont accessibles conceptuellement aux jeunes élèves. Une particularité de cette construction qui aboutit notamment à l'écriture chiffrée est qu'elle ne repose pas sur la division euclidienne contrairement à la théorie savante de la numération de position (actuellement à l'œuvre dans la sphère productrice des savoirs et qui l'était peut-être déjà au moment de l'écriture des traités que nous avons utilisés). Cette théorie repose sur l'ostensif « numération en unités ». La praxéologie mathématique repose en fait sur l'étude de trois numérations : la numération en unités, la numération orale et la numération positionnelle, la première permettant notamment de relier les deux autres. » (p.542)

Dans une description théorique, que l'on peut qualifier de « classique », comme celle que l'on trouve dans l'ouvrage de Bézout et Reynaud (1821) étudié par Chambris (2008) ou encore celui de Condorcet (1799), les différentes unités sont définies de manière itérative : on définit les unités du premier ordre, puis celles du deuxième, etc. en exprimant les relations avec les unités d'ordres inférieurs ainsi qu'avec la position dans l'écriture en chiffres. Par exemple voici comment Condorcet définit le millier :

> « Si l'on suit la même démarche, et que l'on place un quatrième chiffre à la gauche de ceux qui indiquent des centaines, il indiquera autant de dixaines de centaines, ou autant de mille, qu'il auroit désigné de centaines, s'il avoit été moins avancé d'un rang ; autant de centaines de dixaines, ou de mille, qu'il auroit indiqué de dixaines, s'il avoit été moins

[5] En TAD, on modélise l'activité mathématique en termes de *praxéologies* ou *organisations mathématiques* (OM). Celles-ci s'organisent autour d'un (ou plusieurs) *type(s) de tâches*. Pour effectuer un type de tâches T on dispose d'au moins une certaine *technique* τ. Ce bloc [T, τ] constitue le *bloc des savoir-faire*. Les techniques peuvent être expliquées, justifiées et produites par l'utilisation d'un savoir (ou technologie θ) qui lui-même s'insère dans une théorie Θ. Le bloc [θ, Θ] constitue le *bloc des savoirs*.

> avancé de deux ; enfin autant de mille, qu'il auroit désigné d'unités, s'il avoit été moins avancé de trois rangs : ainsi, 6452, indique six mille quatre centaines cinq dixaines et deux unités, exprime le nombre six mille quatre cent cinquante-deux ». (p.38)

Cette définition itérative est adaptée à la progression générale de l'enseignement de la numération à l'école primaire où sont d'abord étudiés les nombres à un et deux chiffres au CP, puis à trois chiffres au CE1, entre mille et un million au CE2[6], etc. Ainsi la description théorique, en mettant en évidence les savoirs nouveaux à chaque pas de la construction, permet d'identifier clairement les savoirs anciens sur lesquels on pourra s'appuyer ainsi que les savoirs nouveaux pour chaque niveau d'enseignement. Cela est, nous semble-t-il, une propriété essentielle d'une théorie mathématique destinée à l'enseignement.
Mais ce n'est pas le cas des descriptions de théories savantes de la numération ayant servi à la transposition didactique de ce savoir à partir de la réforme des mathématiques modernes. Chambris explique d'ailleurs qu'à partir de ce moment, « le texte classique du savoir n'apparaît plus dans les livres de l'élève, il peut survivre dans ceux du maître », ce qui peut être lié à l'introduction du travail sur des bases non décimales. Il apparaît alors qu'un point d'appui théorique au travail sur la numération est le fait que « l'écriture chiffrée d'un nombre est la suite des coefficients dans la décomposition polynomiale d'un entier dans une base », ce qui, là encore, est lié au travail en base.
Dans cette approche théorique « moderne », on définit l'écriture d'un nombre en base *b* quelconque (*b* entier supérieur ou égal à 2) à partir d'une écriture algébrique correspondant à la décomposition polynomiale selon les puissances de la base et on prouve l'existence et l'unicité de cette écriture. On ne voit donc pas une construction itérative des savoirs mais une définition valable pour tous les nombres, quelle que soit leur taille. C'est ce qui pourrait expliquer le constat de Chambris dans les manuels de la contre-réforme (années 1980) du fait que « les présupposés des technologies pour les élèves ne sont pas explicités clairement ».

Les besoins trophiques créés par la théorie. Choix des ostensifs.

Des questions de besoins trophiques se posent lors de la transposition didactique d'une théorie savante. Par exemple, lorsque l'on s'appuie sur la théorie savante de la décomposition polynomiale pour fonder la numération (comme à partir de la réforme) :

> « elle crée des besoins trophiques qu'il est *a priori* difficile de satisfaire à l'école primaire, d'autant qu'ils sont nécessaires dès le CP. Citons déjà : multiplication ou notation exponentielle, addition, écriture parenthésée ou priorité de la multiplication sur l'addition, coefficients d'un développement polynomial. En outre, elle ne prend pas en charge la numération orale de façon « naturelle ». On peut dire que c'est une théorie savante et qu'elle n'est donc pas faite *a priori* pour l'école primaire. » (Chambris 2008, p.494)

Les ostensifs sont donc plus réduits par l'utilisation de l'algèbre, mais ne sont plus en phase avec les connaissances des élèves de l'école primaire. C'est d'ailleurs pour cela, comme l'explique Chambris, que lors de la contre-réforme c'est une théorie transposée de cette théorie savante qui est plutôt observée dans les manuels, « aux besoins trophiques beaucoup plus raisonnables pour l'école primaire » (p.503 à 509).

[6] Ce découpage semble assez stable dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Cela légitime le fait de s'appuyer dessus. C'est une contrainte forte du système.

De plus, l'utilisation des écritures selon les puissances de dix présenterait, selon Chambris (2008), le problème de la formulation des relations entre unités. En effet, les savoirs de la numération pourraient alors être considérés comme des règles de calcul. Par exemple 2 000 + 500 + 3 = 2 503 pourrait être interprété comme le résultat d'une règle de calcul d'addition, comme pour l'addition posée et non par le lien entre 2000 et 2 milliers qui permet d'écrire le 2 au rang des milliers, le 5 au rang des centaines, … Ou encore comme l'utilisation de la règle d'écriture de zéros à droite de l'écriture chiffrée. On pourrait justifier que par exemple 10 × 100 = 1000 sans utiliser des relations entre unités (10 centaines = 1 millier).
Les unités de numération pourraient alors être un ostensif privilégié pour la formulation de ces relations entre unités et donc plus généralement pour la description des savoirs de la numération dans une théorie pour l'enseignement. Chambris (2008) montre que

> « à besoins trophiques identiques, la valence instrumentale de la numération positionnelle est plus faible que celle de la numération en unités ». (p.443)

L'utilisation des unités de numération, comme dans la théorie classique, apparaît comme bien adaptée à la description des savoirs de la numération d'autant plus que elle ne met en jeu que des additions et multiplications (et sans utilisation du signe ×). En effet, selon Chambris (2008), cet ostensif :

> « apparaît nécessaire, et peut-être indispensable, dans les technologies de la numération de position puisqu'il permet de les formuler avec de faibles besoins trophiques, en utilisant des mots et peu de calcul (du comptage avec les nombres de un chiffre principalement). » (p.457)

Les unités de numération permettent de faire un pont entre les systèmes de numération parlé et écrit (Houdement & Chambris 2013). En effet, Chambris (2012), dans son analyse des connexions entre différents types de connaissances met en évidence que les unités de numération « semblent être le seul ostensif susceptible de favoriser les connexions entre la numération et les différents thèmes dans lesquels elle intervient » car elles sont congruentes avec les unités du système métrique mais aussi plus adaptées pour la justification des techniques de calcul posé que les écritures utilisant les puissances de dix.

II.2 Une théorie de la numération par construction itérative

Pour les raisons présentées dans le paragraphe précédent, nous nous appuyons sur la désignation avec les unités de numération pour décrire les savoirs de numération et le lien entre numération parlée et numération écrite.
La construction est itérative dans le sens où on définit les savoirs de la numération pour les nombres compris entre 0 et 9, puis 10 à 99, etc. Les savoirs définis pour une tranche s'appuient sur les savoirs définis pour la tranche inférieure[7]. Cette construction présente l'intérêt de mettre en évidence les savoirs nouveaux construits à chaque étape. Nous les expliciterons. Nous terminerons par une généralisation des savoirs et propriétés de la numération.

Les neuf premiers nombres

On définit les neufs premiers nombres ainsi :

Ecrit	1	2	3	4	5	6	7	8	9

[7] Ainsi pour un élève ayant déjà appris les principes de la numération pour les nombres jusqu'à 999, écrire en chiffres 3 milliers 1 centaine 5 unités revient donc à écrire en chiffres 3 milliers et 105 unités : cela ne met en jeu que la position du millier dans l'écriture en chiffres.

Parlé	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Ainsi on peut exprimer le nombre d'unités simples (ou unités du premier ordre) avec ces nombres indifféremment sous la forme :

- 3 unités ou 3 ;
- Trois unités ou trois.

Lorsque l'on ne précise pas l'unité utilisée (comme ici « 3 »), c'est qu'il s'agit d'unités simples. On écrit *u* pour désigner l'unité simple en abrégé.

Construction de la numération des nombres de 10 à 99

Le choix d'une base est à l'origine de l'invention des systèmes de numération comme le précise Ifrah (1994) :

> « L'être humain se trouva donc désormais confronté à un problème insurmontable à première vue : comment désigner des nombres élevés avec le moins possibles de symboles ? […] La solution a été de privilégier un groupement particulier (comme la dizaine, la douzaine, la vingtaine ou la soixantaine par exemple) et d'organiser la suite régulière des nombres selon une classification hiérarchisée fondée sur cette assise. […] C'est ce que l'on appelle le principe de la base. Sa découverte a marqué la naissance des systèmes de numération : systèmes dont la « base » n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre donné pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur. » (Ifrah 1994, p.73)

Le choix de dix comme base est un choix parmi d'autres possibles. Pourtant la base dix « a eu une fortune absolument exceptionnelle » dans l'histoire (Ifrah 1994, p.103), mais non pour des raisons liées à « des avantages pratiques ou mathématiques » (Ifrah, p.105). Car selon Ifrah « ce sont bien les dix doigts qui ont imposé à l'homme l'idée des groupements par paquets de dix » (Ifrah, p.112). D'autres choix auraient pu avoir un intérêt mathématique comme le fait remarquer Guitel (1975) :

> « Il va de soi que le choix de dix ayant été lié à « un accident de notre nature », comme l'a écrit Edouard Lucas, il n'était pas nécessairement bon mathématiquement parlant. Douze aurait dû lui être préféré, ayant plus de diviseurs que dix, et en particulier le diviseur 3 ; mais le choix de dix s'est révélé indestructible. […] L'apparition des modernes machines à calculer a infligé récemment, à dix son plus retentissant échec. Le système binaire, cher à Leibniz, s'est imposé tout naturellement. […] L'histoire de la numération nous apprend, il convient d'y insister, que le nombre dix représente un très bon choix pour la mémoire humaine : la table de multiplication pouvait facilement être apprise par cœur. Cinq par contre était trop petit […] Par contre 20 et surtout 60 étaient trop grands ; les peuples qui ont adopté ces bases ont été amenés à introduire, soit dans leur numération parlée, soit dans leur numération écrite, des bases auxiliaires […] Il est donc d'autant plus regrettable que 12 ait été écarté de la compétition, son ordre de grandeur était excellent ». (Guitel, p.25-26)

Cela souligne bien l'aspect arbitraire lié au choix de la base dix, qui repose davantage sur cet « accident de la nature » dont parle Lucas (cité par Guitel) que sur des raisons mathématiques.

Avec les unités de numération : 9 unités + 1 unité forme une nouvelle unité appelée une *dizaine* (ou unité du deuxième ordre). On écrit *d* pour dizaine.

Dans notre système écrit, qui est un système positionnel, l'écriture se fait en ligne et chaque unité s'écrit à un certain rang. Le rang des unités (simples) est le premier rang (à partir de la droite[8]) et l'unité de rang supérieur s'écrit au rang situé immédiatement à sa gauche[9]. Ainsi une dizaine s'écrit au deuxième rang. C'est le *principe de position*.
Le principe de position permet d'écrire les nombres supérieurs à 9 en utilisant encore les mêmes chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, auquel il faut ajouter maintenant le chiffre 0. En effet, une conséquence du principe de position est la nécessité d'utiliser un nouveau symbole pour marquer l'absence d'unités (simples) isolées car on ne peut pas écrire « 1 » pour une dizaine, cette écriture désignant déjà une unité. Notre système de numération écrit utilise le chiffre 0 (zéro) pour marquer cette absence. Ainsi 1d s'écrit 10, …, 2 dizaines s'écrit 20, …, 9d s'écrit 90. On écrit un 0 seulement à un rang pour lequel il existe des unités à un rang supérieur. Par exemple 7u ne s'écrit pas 07. Pour un nombre à deux chiffres le chiffre 0 ne peut s'écrire qu'au rang des unités (simples).

Un nombre admet plusieurs *écritures en unités de numération (EUN)*, par exemple 50u= 5d. On appellera *écriture canonique en unités de numération (EUNC)*, l'écriture pour laquelle on a un nombre d'unités de chaque ordre compris entre 1 et 9. En cas d'absence d'unités simples, on n'écrit que les dizaines dans l'écriture canonique (5 dizaines pour l'exemple ci-dessus).
L'écriture canonique en unités permet de passer directement (par le principe de position) à l'écriture en chiffres en écrivant les unités au premier rang et les dizaines au deuxième. Par exemple 5d 7u s'écrit 57.

Dans le système parlé, une dizaine s'écrit (et se dit) *dix*, deux dizaines s'écrit *vingt*, trois dizaines s'écrit *trente*, quatre dizaines s'écrit *quarante*, cinq dizaines s'écrit *cinquante*, six dizaines s'écrit *soixante*, sept dizaines s'écrit *soixante-dix*, huit dizaines s'écrit *quatre-vingts*, neuf dizaines s'écrit *quatre-vingt-dix*. Pour écrire les nombres entre deux dizaines consécutives, on fait suivre le nom de chaque dizaine par les noms des nombres compris entre un et neuf. Par exemple cinq dizaines sept unités s'écrit *cinquante-sept*. Cependant il existe des exceptions à cette règle :

- une dizaine une unité s'écrit *onze*, une dizaine deux unités s'écrit *douze*, une dizaine trois unités s'écrit *treize*, une dizaine quatre unités s'écrit *quatorze*, une dizaine cinq unités s'écrit *quinze*, une dizaine six unités s'écrit *seize*.
- Sept dizaines une unité s'écrit *soixante-et-onze*,…, sept dizaines neuf unités s'écrit *soixante-dix-neuf*,
- Neuf dizaines une unité s'écrit *quatre-vingt-onze*, …, neuf dizaines neuf unités s'écrit *quatre-vingt-dix-neuf*.

[8] Pour numéroter les rangs, nous prendrons pour convention de le faire systématiquement de la droite vers la gauche.
[9] Il s'agit là d'un choix qui relève aussi d'une convention comme l'indique Mounier (2010) :

> « Outre leur graphie, l'ordre de prise en compte des chiffres peut être indiqué par d'autres moyens que celui d'une écriture en ligne et un sens de lecture. Cela pourrait être n'importe quelle disposition graphique dans laquelle cette prise en compte des chiffres serait déterminée par convention. Il en est de même pour la suite des ordres qui peut être théoriquement arbitraire et finalement du couplage entre les deux suites chiffres/ordres. » (p.35)

Dans les systèmes en unités et parlé, le zéro est inutile, ce qui n'est pas le cas du système en chiffres.
Le nombre 3d 12u ne peut s'écrire « 312 » ou même « 3 12 » car cela pourrait donner lieu à des interprétations différentes de cette écriture : 3d 12u ou 31d 2u(ou encore avec les nombres à 3 chiffres 3c 1d 2u). Il est alors nécessaire pour avoir une écriture unique en chiffres, de n'écrire que des nombres à 1 chiffre par rang. C'est donc l'écriture canonique qui permet (et c'est en cela que cette écriture est canonique) d'associer directement un nombre écrit avec les unités de numération et le nombre correspondant en chiffres par le principe de position : les unités (simples) s'écrivent au premier rang (à partir de la droite) et les dizaines au deuxième rang.

L'écriture en chiffres des nombres à deux chiffres étant ainsi définie, on peut maintenant écrire, par exemple, 38u (ou 3d 8u). Mais l'écriture en chiffres (et canonique) de 38d n'est pas encore définie, il faut pour cela introduire une nouvelle unité : la dizaine de dizaines.

Construction de la numération des nombres de 100 à 999

Guitel (1975) explique que, du point de vue historique, le passage de la dizaine à la centaine ne va pas de soi : « rien n'obligeait à considérer le carré de la base comme une nouvelle unité. […] Le corps humain qui a contribué à donner une base à la numération ne pouvait être en effet d'aucun secours quand il a fallu s'élever dans l'échelle des nombres ». Une fois le passage au carré réalisé, le passage au cube semble, lui, se faire plus aisément.

Avec les unités de numération : 9d 9u + 1u (soit 99u + 1u) forme une nouvelle unité appelée une *centaine* (ou unité du troisième ordre). On écrit *c* pour centaine.

Voici donc les relations entre les différentes unités : une centaine = une dizaine de dizaines = dix dizaines = cent unités. À partir de cet ordre il existe donc des relations entre unités qui ne sont pas seulement entre unités d'ordres consécutifs.

Dans le système écrit, les centaines s'écrivent au troisième rang, à partir de la droite (principe de position). Ainsi 1 centaine s'écrit 100, …, 2 centaines s'écrit 200, …, 9 centaines s'écrit 900. L'écriture canonique en unités permet donc de passer directement à l'écriture en chiffres en écrivant les unités au premier rang, les dizaines au deuxième et les centaines au troisième. Par exemple 8c 5d 7u s'écrit 857. En cas d'absence d'unité ou de dizaine dans l'écriture canonique on écrit un zéro au rang correspondant. Par exemple 8c 7u s'écrit 807 ou encore 8c 5d s'écrit 850. Par contre on n'écrit pas de zéro au plus haut rang : 5d 7u ne s'écrit pas 057.
Dans le système parlé, on fait suivre le nom du nombre (inférieur ou égal à neuf) de centaines du mot *cent*, sauf pour une centaine qui s'écrit *cent* (et non « un cent »). Pour les autres : deux centaines s'écrit (et se dit) *deux-cents*[10], trois centaines s'écrit *trois-cents*, …, neuf centaines s'écrit *neuf-cents*.
Pour écrire les nombres compris entre deux centaines consécutives, on fait suivre les mots désignant la centaine du nom du nombre inférieur à cent restant. Par exemple huit centaines cinq dizaines sept unités s'écrit (et se dit) *huit-cent-cinquante-sept*.

[10] Conformément aux nouvelles règles d'orthographe les numéraux composés sont systématiquement reliés par des traits d'union.

Un nombre peut admettre plusieurs écritures avec les unités de numération mais a toujours une unique écriture dans le système écrit et dans le système parlé. Par exemple 3c 12d = 4c 2d = 42d = 3c 120u = …. Son écriture canonique est 4c 2d, elle est unique et permet d'en déduire l'écriture en chiffres et en lettres : 420 et quatre-cent-vingt.

Pour les nombres supérieurs à cent, des techniques de conversion entre unités de numération sont possibles directement à partir de l'écriture en chiffres. Nous allons les préciser.

Conversion de dizaines et centaines en unités simples. Nombre d'unités simples contenues dans un nombre de dizaines ou centaines données.

Par le principe de position (et le rôle du 0), il vient que 5d est égal à 50 unités et 5c à 500 unités. Mais qu'en est-il pour un nombre de dizaines supérieur à 10 : combien d'unités simples font 23d ? Le nombre d'unités simples équivalentes à un nombre de dizaines compris entre 10 et 99 s'obtient en écrivant le premier chiffre (en partant de la droite) au rang des dizaines. Cela implique un décalage de l'écriture vers la gauche d'un rang et donc l'écriture d'un zéro au rang des unités simples. Pour simplifier on dit en général que l'on écrit un zéro à droite[11]. Par exemple 23d = 230u.

Il s'agit d'une conséquence des deux principes de la numération. En effet considérer un nombre, à 2 chiffres, de dizaines fait que son chiffre des dizaines indique un nombre de dizaines de dizaines (principe de position), soit de centaines (principe décimal). Le chiffre des unités, lui, indique alors le nombre de dizaines isolées. Par le principe de position, on obtient alors le nombre d'unités en écrivant le chiffre des centaines au troisième rang (à partir de la droite), le chiffre des dizaines au deuxième rang et 0 au rang des unités. Par exemple 23d = (2 dizaines) de dizaines + (3 unités) de dizaines = 2c + 3d. Par le principe de position on obtient alors 230 unités.

Conversion d'unités simples en dizaines et centaines. Nombre de dizaines ou centaines contenues dans un nombre d'unités simples données.

L'écriture chiffrée indique le nombre total d'unités ainsi que le nombre d'unités de chaque ordre (par exemple 235 c'est 235u mais aussi 2c 3d 5u). On peut également y lire directement le nombre total de dizaines, par troncature. Par exemple, dans 235 il y a 23 dizaines. En effet le nombre de centaines, écrit au troisième rang de l'écriture chiffrée, est aussi le nombre de dizaines de dizaines. Par juxtaposition avec le chiffre du rang des dizaines on obtient donc un nombre à deux chiffres de dizaines. Par exemple dans 235 il y a 2 centaines 3 dizaines et 5 unités. Or 2c + 3d = 2 dizaines (de dizaines) + 3 unités (de dizaines) = 23d.

Ainsi on fera une distinction entre le *nombre de dizaines isolées* (donné par le chiffre des dizaines) et le *nombre total de dizaines* (donné par les chiffres des dizaines et centaines)[12].

Les nombres à trois chiffres étant définis, on peut maintenant écrire, par exemple, 238 unités (ou encore 23d + 8u ou bien 2c + 38u) ce qui est égal à 2c 3d 8u (qui est l'écriture canonique). Mais, on ne sait pas encore écrire en chiffres 238d par exemple, il faut pour cela introduire une nouvelle unité : la dizaine de centaines.

---

[11] Cette formulation est celle qui semble principalement utilisée dans les manuels actuels. Cela pose des problèmes pour l'utilisation de cette règle pour les nombres décimaux, où cette formulation n'est plus adaptée.

[12] Nous préférons éviter la distinction entre « le chiffre des dizaines » et « le nombre de dizaines », que l'on voit dans certains manuels actuels ou plus anciens. En effet on s'intéresse dans tous les cas à un <u>nombre</u> de dizaines.

La construction de la numération des nombres de 1 000 à 999 999

Avec les unités de numération : 9c 9d 9u + 1u (soit 999u + 1u) forme une nouvelle unité appelée un *millier* (ou unité du quatrième ordre). On écrit *m* pour désigner le millier.
Les relations entre unités : un millier = dix centaines = cent dizaines = mille unités simples = une centaine de dizaines = une dizaine de dizaines de dizaines.
On remarquera la particularité de la relation entre dizaines et millier (que l'on n'avait pas rencontrée jusqu'à présent) : cette relation porte sur deux unités d'ordres non consécutifs et ne peut être déduite par l'utilisation directe du principe de position (comme cela peut être le cas pour 1 millier = 1000 unités simples ou 1 centaine = 100 unités simples par le principe de position).
Dans le système écrit, les milliers s'écrivent au quatrième rang, à partir de la droite (principe de position). En cas d'absence d'unité, de dizaine ou de centaine dans l'écriture canonique on écrit un zéro au rang correspondant (on n'écrit pas de zéro au plus haut rang). Ainsi 1 millier s'écrit 1 000, …, 2 milliers s'écrit 2 000, …, 9 milliers s'écrit 9 000 (la règle des espaces entre les chiffres des milliers et des centaines sera explicitée par la suite). L'écriture canonique en unités permet donc de passer directement à l'écriture en chiffres en écrivant les unités au premier rang, les dizaines au deuxième, les centaines au troisième et les milliers au quatrième. Par exemple 3m 8c 5d 7u s'écrit 3857 et 3m 5d s'écrit 3 050.
Avec les unités de numération : 9 milliers 9 centaines 9 dizaines 9 unités + 1 unité (soit 9 999 unités + 1 unité) forme une nouvelle unité appelée une *dizaine de milliers* (ou unité du cinquième ordre). Il y a donc ici une rupture dans le nom des unités de numération : au lieu de prendre un nouveau mot, on fabrique un nom composé à partir des noms anciens, en prenant comme nouvelle unité le millier : on compte en milliers. Pour cette raison, nous n'introduirons pas d'écriture abrégée au-delà du millier.
Dans le système écrit, une dizaine de milliers s'écrit au cinquième rang, à partir de la droite (principe de position) : 1 dizaine de milliers s'écrit 10 000, etc.
Avec les unités de numération : 9 dizaines de milliers 9 milliers 9 centaines 9 dizaines 9 unités + 1 unité (soit 99 999 unités + 1 unité) forme une nouvelle unité appelée une *centaine de milliers* (ou unité du sixième ordre).
Dans le système écrit, une centaine de milliers s'écrit au sixième rang, à partir de la droite (principe de position). Ainsi 1 centaine de milliers s'écrit 100 000, etc.
Les relations entre unités :

- une dizaine de milliers = dix milliers = cent centaines = mille dizaines = dix-mille unités ;
- une centaine milliers = dix dizaines de milliers = cent milliers = mille centaines = dix-mille dizaines = cent-mille unités.

Quand l'écriture s'allonge (que le nombre de chiffres augmente), les nombres deviennent difficiles à nommer : il devient nécessaire de fournir des repères intermédiaires qui correspondent au compte en milliers. Les classes rendent compte de ce découpage : une *classe* est un groupement de trois ordres d'unités consécutifs qui correspondent, de la droite, vers la gauche, aux unités, dizaines, centaines d'une même unité. Pour les nombres inférieurs à un million on trouve ainsi la *classe des unités simples* et la *classe des milliers*. La *classe des unités simples* comprend l'ordre des unités simples, celui des dizaines et celui des centaines. La *classe des milliers* comprend l'ordre des milliers, celui des dizaines de milliers et celui des centaines de milliers.

Dans le système parlé, pour écrire en lettres (ou dire) un nombre compris entre 1 000 à 999 999, on écrit le nom du nombre de milliers (compris donc entre un et neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf) suivi du mot « mille » puis le nom du nombre inférieur à mille restant.
Par exemple 4 centaines de milliers 2 dizaines de milliers 3 milliers 8 centaines 5 dizaines 7 unités = 423 milliers 857 unités = quatre-cent-vingt-trois-mille-huit-cent-cinquante-sept.
Cette lecture s'appuie donc sur une propriété de l'écriture en chiffres : la troncature. En effet, on effectue une troncature au millier pour décomposer le nombre en classes. Par exemple 423 857 = 423 milliers 857 unités[13].
Pour mettre en évidence cette décomposition sur l'écriture chiffrée et ainsi faciliter la lecture des « grands nombres », il est d'usage en France de laisser un espace entre chaque classe. Par exemple 423 milliers 857 unités s'écrit 423 857. Pour passer directement de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres, il suffit donc d'écrire (ou de lire) le nombre dans la classe des milliers (à gauche de l'espace donc) comme un nombre d'unités, suivi de « mille » (excepté pour le nombre un, où on dira juste « mille ») puis d'écrire (ou de lire) le nombre d'unités simples restantes.

Les techniques de conversion entre unités à partir de l'écriture en chiffres (par juxtaposition de zéros à droite et par troncature) s'étendent aux nombres à 5 et 6 chiffres :
- Par la technique de juxtaposition de zéros, le nombre de milliers, de dizaines de milliers ou de centaines de milliers s'obtient en écrivant le premier chiffre de ce nombre (en partant de la droite) au rang des milliers, dizaines de milliers ou des centaines de milliers. Cela revient à juxtaposer trois, quatre ou cinq zéros à droite de ce nombre. Par exemple 23 milliers = 23 000, 15 dizaines de milliers = 150 000 ;
- Par la technique de troncature, on lit directement le nombre d'unités de chaque ordre en « tronquant » l'écriture au rang considéré par suppression des chiffres des rangs strictement inférieurs. Par exemple dans 23 456 il y a 23 milliers.

Formulation générale des savoirs de la numération

La construction précédente a permis de mettre en évidence les savoirs de numération pour chaque tranche. Nous cherchons ici à donner des formulations générales de ces savoirs qui sont donc construits par récurrence, d'ordre en ordre.
Rappelons que l'*écriture canonique* avec les unités de numération est l'écriture pour laquelle on a un nombre d'unités de chaque ordre inférieur ou égal à dix. En cas d'absence d'unités d'un certain ordre, on n'écrit rien à cet ordre (on n'écrit pas de 0 dans l'écriture canonique).

<u>Les unités de numération</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$(9 \text{ unités d'ordre } n-1)$ $(9 \text{ unités d'ordre } n-2)$ … $(9 \text{ unités d'ordre } 1)$ + 1 unité d'ordre 1 forment une unité d'ordre n (une dizaine d'unités d'ordres $n-1$). Ainsi, ce qui est général est le fait que dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
Chaque unité admet ainsi une relation avec toutes les unités d'ordre inférieur. Plus précisément, si $n, p \in \mathbb{N}$ $(n > p)$ alors une unité d'ordre n est égale à 10…0 ($n-p$ zéros) unités d'ordre p. Et réciproquement chaque unité admet aussi des relations avec les unités d'ordre supérieur.

[13] On s'appuie alors sur une conversion de 4 centaines de milliers 2 dizaines de milliers 3 milliers en 423 milliers et de 8 centaines 5 dizaines 7 unités en 857 unités, en appui sur les relations entre unités : 1 centaine de milliers = 100 milliers et 1 dizaine de milliers = 10 milliers, etc.

La numération écrite en chiffres

Ce qui est général est le fait que ces nouvelles unités d'ordre n s'écrivent au rang n de l'écriture en chiffres, à partir de la droite (principe de position). Réciproquement, dans l'écriture chiffrée d'un nombre le chiffre de rang n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$), indique le nombre d'unités isolées d'ordre n.
En cas d'absence d'unité d'un certain ordre dans l'écriture canonique en unités on écrit le chiffre 0 au rang correspondant. Ce principe est une conséquence du principe de position : il est nécessaire de noter l'absence de ces unités pour marquer la position des unités d'ordres supérieurs. L'utilisation d'un vide ne permet en effet pas de définir de manière non équivoque le nombre d'unités isolées absentes. On écrit un 0 seulement aux rangs pour lesquels il existe des unités à un rang supérieur.
Cela entraîne en particulier que l'unité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$) s'écrit $10 \dots 0$ avec $n-1$ zéros.

Conversions entre unités par troncature de l'écriture en chiffres. Nombre d'unités quelconques contenues dans un nombre d'unités simples.

L'écriture chiffrée indique le nombre total d'unités simples ainsi que le nombre d'unités de chaque ordre mais aussi le nombre total d'unités d'ordres supérieurs ou égaux à 2, par troncature.
Le nombre d'unités d'ordre n est le nombre formé en supprimant tous les chiffres des unités d'ordre inférieur (strictement) à n.
Cette propriété est une conséquence du principe décimal : si l'unité de référence est une unité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$), alors l'unité du deuxième ordre devient la dizaine d'unité d'ordre n, soit l'unité d'ordre $n+1$, elle s'écrit au 2ème rang, à partir du rang n, etc.
Cette propriété ne s'applique pas seulement pour les conversions d'unités simples en unités d'ordres supérieurs : elle peut être généralisée pour une conversion d'une unité d'ordre quelconque en une unité d'ordre supérieur. Soit $n, p, q \in \mathbb{N}, n \neq 0, n > q > p, a_i \in \{0, 1, \dots 9\}, pour\ 0 < i < n\ et\ a_n \neq 0$. Dans $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ unités d'ordre p il y a $\overline{a_n \dots a_{q-p}}$ unités d'ordre q, c'est-à-dire que l'on obtient le nombre d'unités d'ordre q par une troncature à l'ordre $q-p$. Par exemple dans 1234 dizaines il y a 12 milliers car les milliers sont des centaines de dizaines.

Conversions entre unités par juxtaposition de zéros (ou « règle des zéros »). Nombre d'unités simples contenues dans un nombre d'unités quelconques.

Pour convertir en unités simples un nombre d'unités d'ordre n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$), on juxtapose $(n-1)$ zéros à droite du nombre d'unités d'ordre n.
Il s'agit là encore d'une conséquence du principe décimal. Soit un nombre donné (écrit en chiffres) d'unités d'ordre n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$). Le nombre d'unités simples du nombre de départ devient le nombre d'unités d'ordre n isolées, le nombre de dizaines devient le nombre d'unités isolées d'ordre $n+1$, etc. Pour marquer le nouveau rang de ces chiffres il convient donc de faire un décalage et d'écrire $n-1$ fois le chiffre 0 aux places vides ainsi créées.
On peut généraliser cette règle aux cas de conversions ne faisant pas intervenir d'unités simples. Soit $n, p, q \in \mathbb{N}, p > q, a_i \in \{0, 1, \dots 9\}, pour\ 0 < i < n\ et\ a_n \neq 0$. Dans $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ unités d'ordre p il y a $\overline{a_n \dots a_0 0 \dots 0}$ unités d'ordre q avec $p-q$ zéros terminaux (sans compter les éventuels 0 de a_0, a_1, ...), c'est-à-dire que l'on obtient le nombre d'unités d'ordre q par une juxtaposition de $p-q$ zéros à droite. Par exemple 12 milliers est égal à 1200 dizaines car les milliers sont des centaines de dizaines.

La numération parlée

Dans la pratique on nomme rarement les nombres au-delà des milliards : on utilise les puissances de dix pour ces grands nombres. Nous allons toutefois indiquer comment les principes de lecture déjà indiqués jusqu'au milliard s'étendent aux grands nombres.

Voici les noms des différentes classes obtenues par regroupements de trois ordres d'unités consécutifs : unités simples, milliers, millions, milliards[14], billions, billiards, trillions, trilliards, quadrillions, quadrilliards, quintillions, ...

Pour faciliter l'écriture en lettres (et la lecture) on prend pour convention de séparer deux classes consécutives par un espace dans l'écriture en chiffres. Ainsi, en comptant à partir de la droite, on écrira des espaces entre les unités d'ordre $3n$ et $3(n+1)$, où $n \in \mathbb{N}$, jusqu'au rang le plus grand.

Pour nommer un nombre (ou l'écrire en lettres) on procède donc à une double lecture : globalement par classes et à l'intérieur de chaque classe par rang (nombres inférieurs à 999).

À partir de la classe du million, les unités de la numération et les mots-nombres utilisés pour la numération parlée sont les mêmes (il n'y a plus la distinction que l'on avait entre « millier » et « mille »).

Pour nommer un grand nombre écrit en chiffres on s'appuie donc sur le découpage en classes de trois chiffres (marqué par des espaces) : il suffit alors, en partant des unités simples (ce qui n'est pas nécessaire quand la taille des nombres est petite), de remonter jusqu'à la classe d'ordre le plus grand. Pour chaque classe on lit le nombre à trois chiffres correspondant suivi du mot-nombre associé à cette classe.

Par exemple 123 456 789 012 345 = 123 billions 456 milliards 789 millions 012 milliers 345 unités donc se lit cent-vingt-trois-billions-quatre-cent-cinquante-six-milliards-sept-cent-quatre-vingt-neuf-millions-douze-mille-trois-cent-quarante-cinq.

Nous allons maintenant passer à la recherche d'une situation fondamentale de la numération permettant d'étudier des mises en fonctionnement de ces savoirs.

III. Recherche d'une situation fondamentale de la numération décimale de position

Brousseau (2009), en s'appuyant sur la distinction entre *connaissances* et *savoirs*[15], déclare :

> « Enseigner les mathématiques consiste à enseigner les savoirs *et l'usage* des connaissances. Il n'y a donc pas d'autre moyen que de susciter chez les élèves des activités similaires à celles des mathématiciens qui les produisent. Tout apprentissage est un phénomène épistémologique. » (p.17)

Cela l'amène à distinguer la notion de *problème* de celle de *situation*.

[14] Une variante de ce système (nommé « échelle longue ») consiste à ne considérer que les classes ayant pour suffixe « ion », c'est-à-dire à définir des classes de 6 rangs. Il existe aussi une autre échelle utilisée aux Etats-Unis et au Royaume-Uni, appelé « échelle courte » utilisant les mêmes noms d'unités mais pour des valeurs différentes. Ce sont des classes de trois rangs également : unités simples, milliers, millions, billions, trillions, quadrillions, quintillions …

[15] « Nos connaissances mathématiques sont le résultat d'activités complexes, individuelles et collectives très diverses. Une partie d'entre elles peut s'exprimer par des termes, des définitions, des théorèmes…, et sont des références culturelles, ce sont les « connaissances - savoir ». Appelons les « savoirs ». D'autres interviennent dans les décisions mais elles sont instables, incertaines ou même fausses ou inexprimables, elles naissent et disparaissent selon les circonstances mais elles sont indispensables à la pensée et à l'apprentissage. Appelons les « *connaissances* ». (Brousseau 2009, p.17)

> « En comparant la résolution des problèmes à l'histoire des concepts mathématiques, il apparaît que certaines conditions, qui disparaissent de l'énoncé final, jouent un rôle essentiel. Ces conditions peuvent être considérées comme un milieu dans lequel le sujet poursuit un but. Ce jeu peut être modélisé par une « situation ». Ainsi chaque concept mathématique peut être associé à des conditions dans lesquelles un être humain est amené à produire, comme réponse, un comportement spécifique témoignant d'une certaine connaissance d'un concept mathématique. La notion de « situation » que nous définirons et étudierons d'abord, élargit donc la notion de « problème » et permet d'introduire d'autres paramètres que la validité logique (Ex. : efficacité) » (p.15).

Pour un savoir donné la réflexion épistémologique et mathématique s'appuie, en théorie des situations, sur la notion de *situation fondamentale* :

> « il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant » (Brousseau 1981, cité par Bessot 2011 p.40)

Comme l'explique Bessot (2011), « ce qui est fondamental ce n'est donc pas une situation, mais un ensemble de situations et leur articulation ». Disposer d'une situation fondamentale pour un savoir donné permet de résumer le sens global de ce savoir :

> « La fonction d'une situation fondamentale est de résumer ce sens global de façon à permettre ensuite de déployer le nombre et la diversité de ses occurrences suivant les nécessités et les possibilités de l'enseignement » (Brousseau 2005, cité par Bessot 2011 p.40).

Comme le rappelle Bloch (2005), on utilise la modélisation en termes de jeu pour décrire une situation fondamentale :

> « Le jeu est constitué lorsqu'on a défini le rôle des actants et un milieu sur lequel le jeu peut se déployer ; ce milieu étant bien entendu construit à partir de l'étude épistémologique et des variables didactiques dégagées dans l'étude. Il s'ensuit que la définition d'une situation de type situation fondamentale, se fait par la construction d'un milieu – le milieu théorique que nous appelons (Mi_T) – et l'organisation du jeu d'un actant. » (p.48-49)

Notre construction itérative des savoirs de la numération a permis de mettre en évidence les savoirs pour les différentes tranches dans l'étude des nombres et de montrer leur possible construction par itération (de 0 à 99, 100 à 999, etc.). Pour l'étude des nombres de trois ou quatre chiffres (ce qui est l'objet de notre travail) les enjeux concernent la découverte du principe de position pour les nouvelles unités introduites (centaines, milliers) en lien avec le principe décimal (dix dizaines = une centaine et dix centaines = un millier). La construction des nouvelles unités se fait par itération du principe d'équivalence entre dix unités d'un certain ordre et une unité de l'ordre immédiatement supérieur. Cela met également en jeu des relations entre unités d'ordres non consécutifs et des conversions entre unités. C'est donc une situation fondamentale mettant en jeu ces savoirs que nous cherchons à construire.
En s'appuyant sur cette idée de construction itérative, on peut supposer le code déjà construit et déjà connu des acteurs de la situation pour les nombres des tranches inférieures. Par exemple pour mettre en jeu les propriétés de la numération des nombres à quatre chiffres, on suppose les savoirs de la numération déjà construits pour les nombres à trois chiffres. Ce n'est pas la découverte du code que nous cherchons à mettre en évidence à travers la situation fondamentale mais la compréhension de son extension à des nombres plus grands. Ainsi le code sera considéré comme un objet culturel déjà là. D'ailleurs comme le précise El Bouazzaoui (1982),

> « La numération décimale de position est donc un objet culturel qui ne montre son efficacité et ne répond à un besoin d'adaptation que dans des problèmes autrement plus complexes que ceux qui se posent aux enfants. Vouloir la réinventer revient à vouloir réinventer un langage, il faut donc la faire fonctionner. » (p. 9)

Nous pouvons considérer que l'on se trouve alors dans un cas particulier de situation fondamentale, déjà étudié par Bloch (2005), pour lequel la fonctionnalité recherchée du savoir ne peut concerner que certaines propriétés, ce qui est le cas notamment lors de la reprise d'un savoir :

> « Cependant, si la recherche du caractère fonctionnel dans la découverte d'une connaissance est bien ce qui est mis en valeur dans les schémas de situations a-didactiques envisagées, il est pertinent de moduler cette fonctionnalité lorsque l'on souhaite construire un schéma de situation pour un savoir devant être repris. […] Dans ces cas, les conditions de construction du schéma, posées par Brousseau dans son texte de 1982, sont trop contraignantes ; faut-il alors renoncer à élaborer des schémas de situations a-didactiques ? Il nous semble qu'on puisse alors envisager la modalité, évoquée ci-dessus, de construction de situations rendant fonctionnelles un certain nombre de *connaissances* relatives à la notion visée ou de *propriétés* des objets mathématiques à enseigner. » (Bloch 2006 p. 52)

C'est sur cet élargissement de la notion de situation fondamentale que nous nous appuierons.
Les situations sur les nombres et la numération d'El Bouazzaoui (1982) et Brousseau (1995) constituent un point d'appui important pour notre étude. Nous nous limiterons à l'aspect cardinal du nombre[16].

III.1 Nécessité de la communication

En nous appuyant sur El Bouazzaoui (1982)[17], puisque les systèmes de numération sont des codes qui permettent de désigner les nombres, nous pouvons considérer qu'ils vont être utilisés dans des situations où il faut communiquer des informations sur les nombres. Le schéma général de la situation dans laquelle un sujet doit utiliser une désignation[18] d'un nombre est celui-ci :

> « Un sujet (élève) a un objet d'étude (une collection), à propos duquel ce qui est le plus important pour son action c'est le nombre. Il a besoin de passer par l'intermédiaire d'une représentation de ce nombre, soit pour le communiquer, soit pour se le rappeler, soit pour calculer. Le sujet doit donc puiser de l'information dans une situation, puis prendre une décision. Le moyen d'élaborer la décision à partir de l'information est d'utiliser la désignation d'un nombre. »

Nous pouvons ajouter que le besoin d'utiliser une écriture en chiffres peut être lié à un problème de comparaison du cardinal de collections. En adaptant le schéma proposé par El Bouazzaoui on arrive alors au schéma de base suivant :

[16] On peut trouver dans Margolinas et Wozniak (2012) une étude d'une situation fondamentale pour l'aspect ordinal du nombre dont l'objectif est de servir de point d'appui pour les premiers apprentissages du nombre et non l'appropriation des règles de fonctionnement de notre système de numération.
[17] Dans sa thèse, El Bouazzaoui construit une situation fondamentale de la numération qui sert de point d'appui à la conception d'une séquence pour la classe de CP, pour les nombres à deux chiffres.
[18] Nous nous intéressons au cas où cette désignation est celle de l'écriture en chiffres.

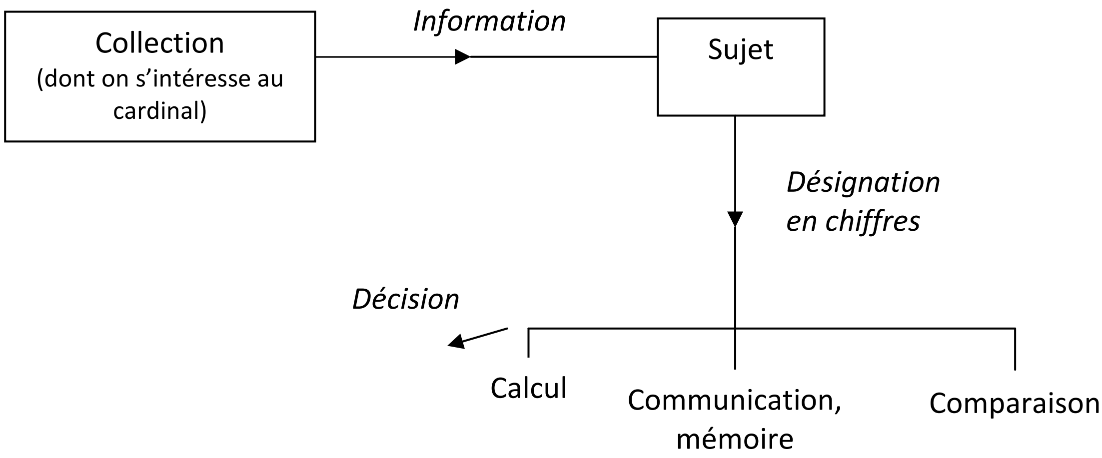


Figure 7 : schéma de la situation de communication de base d'El Bouazzaoui repris et modifié

On peut ajouter que le point de départ n'est pas toujours la collection mais peut aussi être la désignation. Le sujet doit prendre les informations à partir de cette désignation (décodage).
Ce schéma de base peut se rencontrer dans différents types de problèmes comme la comparaison du cardinal de collections ou les opérations sur les cardinaux de collections (réunions, ajouts, partages, …). La communication ou la mémorisation de la désignation du cardinal d'une collection se rencontre principalement dans la situation de réalisation d'une collection équipotente à une collection donnée. Ces problèmes peuvent amener à l'utilisation d'une désignation du cardinal d'une collection, sous certaines conditions. Dans ce schéma, nous nous restreignons à la désignation usuelle en chiffres avec notre système de numération, car c'est bien l'étude de ce système qui nous intéresse.
Nous allons maintenant considérer la situation de réalisation de collections équipotentes[19] et étudier les conditions pour en faire une situation fondamentale de la numération décimale de position.

III.2 Description de la situation fondamentale du nombre (jeu 0)

Une collection finie d'objets étant donnée, il s'agit de construire une autre collection d'objets, équipotente à la première. Les deux collections peuvent être de nature différente : le but est d'apparier les éléments des deux collections de façon à ce qu'une correspondance terme à terme entre ces éléments soit possible. Si on considère le contexte utilisé par Brousseau (1995), des pots de peinture étant donnés, il s'agit de réaliser une collection de pinceaux (à partir d'un stock de pinceaux) pour laquelle on souhaite mettre un pinceau dans chaque pot de peinture. Puisque les deux collections peuvent être mises en correspondance terme à terme, elles possèdent la même quantité d'objets.
Cependant nous considèrerons toujours le cas où cette correspondance n'est pas possible directement (du fait de l'éloignement des collections dans l'espace ou le temps) pour permettre la construction de connaissances liées à la désignation du nombre. Finalement la situation générale qui nous intéresse peut alors se formuler ainsi :

> **Jeu 0 : un actant A (appelé *émetteur*) et un actant B (appelé *récepteur*) doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes**

[19] Mounier (2010) a de son côté étudié la réalisation d'une situation de comparaison de collections, pour une introduction de la numération décimale en CP.

mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps.

Cet éloignement dans le temps et/ou l'espace met en évidence une fonction essentielle du nombre : la communication (et donc la mémorisation) de la quantité.
Ce jeu 0 peut se résumer par le schéma suivant :

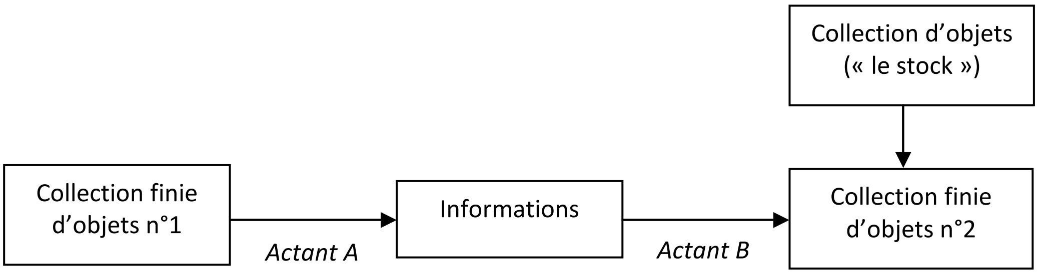


Figure 8 : schéma de la situation fondamentale du nombre (jeu 0)

L'émetteur et le récepteur (actants A et B) peuvent être la même personne. C'est le cas par exemple de la réalisation différée dans le temps de deux collections équipotentes : cela contraint l'usage d'une désignation écrite de la quantité, comme le précisent Margolinas et Wozniak (2012).
Pour l'apprentissage du nombre, Brousseau (1995) indique qu'il est nécessaire que l'actant puisse être dans les deux positions A et B[20] :

> « L'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : demander (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement fournir à la demande la quantité voulue » (p.2).

Nous allons maintenant nous intéresser à certaines conditions sur le milieu de cette situation fondamentale du nombre et à certaines variables didactiques dont le choix permettra de construire une situation fondamentale pour la numération décimale de position.

III.3 Deux conditions sur le milieu de la situation

Première condition : la taille de la collection

Dans la suite de la thèse nous nous intéressons particulièrement aux nombres compris entre 1 000 et 9 999. Ainsi pour la situation fondamentale nous faisons le choix de ne **considérer que des collections ayant au moins cent (voire mille) éléments**.
L'utilisation de telles collections peut amener à considérer une nouvelle unité (dite du deuxième ordre) formée par le groupement d'éléments de la collection (qui sont les unités du premier ordre). C'est ce principe qui est à la base des systèmes de numération. Ce procédé peut être itéré (en considérant des groupements du même type ou non) : on obtient alors des unités du troisième ordre, etc. L'utilisation des mêmes types de groupements permet de définir une règle systématique de groupement pour tous les ordres d'unités. C'est ce cas que nous étudions en considérant plus particulièrement **celui de la base dix (système décimal)**.

[20] La mise en scène de la situation inverse où l'actant A construit une collection à partir d'une EC, qu'il transmet à l'actant B qui doit produire l'EC de la quantité correspondante est étudiée dans Gibel et Ennassef (2012) en classe de CP.

Deuxième condition : utilisation de notre système de désignation usuel écrit en chiffres

Nous avons vu que le jeu 0 permet de rendre nécessaire le recours à une désignation écrite des quantités. Mais, même en considérant de grandes collections, cela peut amener à trois types de désignations différentes :

- utiliser un symbole différent pour chaque type de groupement (d'unités), comme dans les systèmes de numération additifs (par exemple CCC DD U pour représenter 3 groupements du troisième ordre, 2 groupements du deuxième ordre et une unité, dans un système décimal dans lequel U désigne une unité, D une dizaine et C une centaine) ;
- utiliser à la fois un symbole différent pour chaque type de groupement mais aussi un symbole pour désigner le nombre d'unités de chaque type de groupement (les chiffres), comme dans les systèmes de numération hybride (par exemple 3C 2D 1U pour représenter 3 groupements du troisième ordre, 2 groupements du deuxième ordre et une unité, dans un système décimal) ;
- utiliser un système positionnel dans lequel chaque type de groupement est représenté par sa position dans l'écriture en chiffres (par exemple 321 pour représenter 3 groupements du troisième ordre, 2 groupements du deuxième ordre et une unité, dans un système décimal).

Sierra-Delgado (2006) montre que le système de position apparaît comme un outil plus efficace que les autres systèmes notamment par la possibilité qu'il offre d'écrire tous les nombres avec un nombre fini de symboles et d'économie apportée par l'écriture ainsi que sa plus grande efficacité pour le calcul posé (algorithmes des quatre opérations) et la comparaison de nombres. Mais, comme le souligne Mounier (2010), « il ne révèle son efficacité que pour des opérations assez complexes et pour des nombres relativement grands ». Cela est bien en accord avec le long processus historique de développement de ce système de numération, comme l'ajoute Mounier (2010) : « même après son introduction en Occident, l'usage du système chiffré décimal de position fut lent à s'imposer comme outil de calcul à la plupart de la population, même chez les scientifiques ».
Il pourrait alors être difficile de recréer artificiellement des conditions amenant la nécessité d'une telle désignation. Par exemple la question de l'économie apportée par l'écriture n'est en jeu que pour des nombres très grands : pour des nombres avec 3 ou 4 chiffres, les écritures avec unités de numération du type 3M 2C 5U sont également peu coûteuses.
Nous posons donc comme condition sur le milieu de la situation fondamentale : **le code de désignation utilisé (par l'actant A) pour décrire les quantités est l'écriture en chiffres de notre système décimal de position**. Ainsi quand nous parlerons de *dénombrement* (jeu de l'actant A), il s'agira toujours de la production d'une écriture en chiffres de la quantité.
En lien avec la construction itérative des savoirs de numération, comme nous l'avons déjà signalé, nous faisons l'hypothèse que ce code est déjà connu par les actants pour les nombres à trois chiffres (puisque nous étudions en particulier le passage du millier dans notre travail).

III.4 Une variable didactique essentielle pour mettre en jeu les principes de la numération : l'organisation des collections

Les conditions précédentes étant fixées, une variable didactique essentielle pour mettre en jeu les savoirs de la numération est l'organisation des collections (organisation de la collection de départ et organisation du stock à disposition pour réaliser la deuxième collection).

Organisation de la collection initiale de l'émetteur (actant A)

Les collections peuvent être en vrac ou totalement groupées (groupements successifs par dix totalement réalisés), mais étant donné la taille des nombres en jeu, pour une mise en œuvre des savoirs de la numération, il va être également essentiel d'utiliser des collections pour lesquelles les groupements ne sont pas finis (partiellement groupées). Cela se produit dans le cas de la réunion de plusieurs collections dont on veut produire une collection équipotente. Cela peut par exemple être le cas si des joueurs (ayant le rôle de l'actant A) se partagent une collection en vue de la dénombrer. En réunissant les groupements effectués, on se retrouve avec plus de dix unités à certains ordres. Nous considèrerons donc les trois cas suivants pour l'organisation de la collection initiale : **en vrac, totalement groupée ou partiellement groupée.**

Si la collection initiale est **totalement groupée**, c'est alors le **lien entre ces différents groupements et la position des chiffres** dans l'écriture qui est en jeu. En supposant par exemple le code construit pour les nombres inférieurs à mille, c'est le lien entre le quatrième rang (à partir de la droite) et le groupement en dizaines de centaines qui permet de passer directement de la collection à l'écriture en chiffres. C'est le moyen le plus économique pour désigner la quantité quand la collection est totalement organisée.

Dans cette association il se peut qu'il existe un ou des groupements pour lesquels il n'y a aucune unité isolée, comme par exemple 3 milliers 5 unités. Si l'émetteur écrit 3 5, il y a plusieurs possibilités d'interprétations de cette écriture : 3 centaines 5 unités, 3 dizaines 5 unités, 3 milliers 5 dizaines, etc. Le récepteur produit la collection correspondante et la mise en correspondance des deux collections[21] permet de pointer l'ambigüité du message et donc **la nécessité de marquer par un zéro l'absence de certaines unités**[22]. La situation de communication apparaît alors comme essentielle pour mettre en jeu le principe d'unicité de l'écriture en chiffres (une écriture chiffrée ne désigne qu'un seul nombre).

Dans le cas des collections en vrac ou partiellement groupées, nous allons maintenant voir qu'une connaissance essentielle, pour l'émetteur (actant A), en lien avec le principe décimal est en jeu : **avec les unités d'un certain ordre, il est possible de constituer des unités d'ordres supérieurs** (et ces unités se constituent toujours selon la même règle : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur).

Si la **collection initiale est en vrac** (aucun groupement réalisé), il peut alors être utile d'effectuer des groupements successifs par dix qui ne mettent en jeu que des comptages jusqu'à dix. Cela permet d'arrêter le comptage en cours de route pour le réaliser en plusieurs fois par exemple, et cela limite le risque d'erreurs liées à l'énumération d'une grande collection. Cela permet également, une fois tous les groupements réalisés, de se ramener au cas précédent (collection totalement groupée) qui fournit un moyen efficace d'associer la collection à l'écriture en chiffres.

Si les savoirs de la numération sont supposés connus pour les nombres à trois chiffres par exemple, c'est seulement la réalisation de la dizaine de centaines qui est en jeu pour

[21] Dans ce cas, il est possible de faire une correspondance « groupe à groupe » pour réaliser la mise en relation des deux collections.

[22] Si l'absence d'unités isolées concerne les unités simples ou les dizaines l'utilisation du chiffre 0 se fait en mobilisant les savoirs déjà construits sur les nombres inférieurs à mille. La question du chiffre 0 ne se pose donc véritablement ici que pour l'absence de centaines isolées.

terminer tous les groupements. Elle peut être faite par extension des principes de groupement des unités d'ordres inférieurs.
Dans le cas d'une **collection partiellement groupée**, qui est plus approprié à un travail avec de grandes collections, c'est aussi cette réalisation d'une dizaine de centaines qui est en jeu, puis le lien entre cette nouvelle unité et le quatrième rang de l'écriture en chiffres.
Des erreurs peuvent aussi intervenir pour la désignation en chiffres si l'émetteur ne réalise pas les groupements « jusqu'au bout ». Par exemple pour une collection de 3 milliers 12 centaines 5 unités, si l'émetteur écrit 3 12 5, il y a plusieurs possibilités d'interprétation de cette écriture : 3 milliers 1 centaine 2 dizaines 5 unités, ou 3 centaines 12 dizaines 5 unités. S'il écrit 3 12 0 5 cela peut aussi donner lieu à différentes interprétations en fonction de la taille des espaces entre chaque chiffre[23] … Une fois que le récepteur a produit la collection correspondante, la mise en correspondance des deux collections permet de mettre en évidence l'ambigüité du message. Il apparaît alors **nécessaire d'écrire un seul chiffre par rang pour avoir une écriture non ambigüe[24], ce qui implique alors de finir les groupements** (dans cet exemple de centaines en milliers) **afin d'avoir un nombre d'unités isolées de chaque ordre au plus égal à 9**.
Pour finir sur cette variable didactique, remarquons que dans le cas particulier où la collection comporte seulement des groupements en centaines (en nombre compris entre 1 et 99), c'est alors la juxtaposition de zéros qui est en jeu. En effet, si par exemple la collection comporte 32 groupements de cent éléments, le moyen le plus efficace pour déterminer l'écriture en chiffres consiste à écrire le 2 au rang des centaines. Il est alors nécessaire d'écrire des zéros aux rangs des dizaines et unités.
Nous allons maintenant nous intéresser au stock du récepteur.

Organisation du stock du récepteur (actant B)

Rappelons que le stock est constitué des objets à disposition du récepteur pour construire la collection équipotente à celle de l'émetteur. Etant donnée la taille des collections nous considérons uniquement le cas où des groupements sont déjà réalisés dans le stock.
Lorsque le récepteur récupère le message de l'émetteur (une écriture en chiffres), si le stock contient des groupements en nombre suffisant pour chaque unité, il peut prendre directement les groupements correspondants à l'écriture en chiffres (décodage de l'écriture en appui sur la relation entre le rang de l'écriture en chiffres et les différentes unités).
Afin de mettre en jeu les propriétés liées au principe décimal de la numération et **amener l'élève à utiliser des groupements d'ordre inférieur pour faire des unités d'un certain ordre** (par exemple utiliser des centaines pour faire des milliers), **nous posons des contraintes sur le stock**. Par exemple le stock comporte des unités simples, des groupements en dizaines et

[23] Dans un système de numération de type additif, le fait d'écrire un nombre d'unités supérieur à la base ne donne pas lieu à différentes interprétations possibles, puisque la position des différentes unités importe peu. Dans un système positionnel, la représentation des unités par la position rend essentielle la prise en compte de l'absence d'unités à certains ordres et d'écriture d'un nombre inférieur au plus égal à neuf d'unités pour des raisons d'unicité de l'écriture.
[24] Dans un système de numération chaque nombre n'a qu'une seule écriture (ou qu'un seul nom) selon le principe de non redondance (Mounier 2010) : « L'élaboration des définitions des types de numération se fonde en particulier sur les principes d'exhaustivité (tous les entiers doivent pouvoir avoir un nom), de non redondance (un entier n'a qu'un seul nom) et de non ambiguïté (un nom ne désigne qu'un seul nombre) auxquels doit se conformer a minima une numération » (p.71,72).

en centaines mais pas de groupements en milliers. Ainsi pour construire une collection ayant pour cardinal le nombre à quatre chiffres écrit par l'émetteur, le récepteur doit construire des milliers avec les unités d'ordres inférieurs (par exemple avec les centaines, s'il y en a assez, voire avec les dizaines ou les unités). Cela met donc en jeu les relations entre le millier et ces unités (1 millier = 10 centaines, 1 milliers = 100 dizaines, 1 millier = 1000 unités).

D'autres conditions sont possibles, comme par exemple, un seul millier, ou pas de centaine, etc. Pour mettre en jeu les relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs, il faut qu'il y ait moins de milliers dans le stock que dans le nombre écrit en chiffres.

Concernant la contrainte d'absence d'un seul type d'unité (comme « pas de millier » ou plus précisément pas de groupement en milliers) dans le stock, c'est elle qui permet de **mettre en jeu la technique de troncature de l'écriture en chiffres**. En effet le nombre de centaines (ou de dizaines) peut se lire directement dans l'écriture en chiffres par troncature à la centaine (ou à la dizaine) de cette écriture. Par exemple pour une collection de 1234 éléments, la troncature à la centaine fournit directement le nombre de centaines (12) permettant de compenser l'absence de milliers dans le stock. En cas d'absence de milliers et de centaines c'est la troncature à la dizaine (123) qui est en jeu.

Des erreurs sont possibles pour le récepteur, en particulier la construction d'une collection ne tenant pas compte du nombre de milliers. Par exemple s'il n'y a pas de groupements en milliers disponibles dans le stock et qu'il faut construire une collection de 1234 éléments, l'actant peut ne prendre que 2 groupements en centaines, 3 groupements en dizaines et 4 éléments isolés. Sa connaissance de la numération pour les nombres inférieurs à mille lui apporte alors un moyen de contrôle. Sinon, la comparaison avec la collection initiale (de l'émetteur) peut aussi permettre de contrôler cette réponse.

Ainsi pour le récepteur (actant B) des connaissances essentielles pour le principe décimal sont en jeu. Tout d'abord **dans une unité d'un certain ordre il y a des unités des ordres inférieurs (donc dans les milliers il y a des centaines, dizaines et unités)**. Cela se traduit au niveau de l'écriture en chiffres par le fait que **le nombre de centaines d'un nombre à quatre chiffres n'est pas seulement le nombre de centaines isolées : il y a des centaines dans les milliers. Il y a aussi des dizaines (et bien sûr des unités simples) dans les milliers. On peut lire leur nombre directement dans l'écriture en chiffres.**

Le jeu sur cette contrainte du stock du marchand pour un même nombre peut aussi amener l'actant à comprendre qu'il existe différentes manières de construire des collections de même cardinal.

III.5 Bilan sur les deux premiers jeux de la situation fondamentale : jeu de l'émetteur (jeu 1) et jeu du récepteur (jeu 2)

Pour mettre en jeu les savoirs de la numération pour des nombres compris entre 1 000 et 9 999, nous utiliserons donc de grandes collections et supposerons connus les principes de notre système de numération pour les nombres inférieurs à 1000 pour les deux actants (A et B). Nous utiliserons aussi la variable didactique d'organisation de la collection (collection initiale de l'émetteur et stock du récepteur).

Nous allons maintenant revenir sur la formulation des deux jeux de la situation fondamentale en tenant compte des choix indiqués précédemment.

<u>Description du jeu 1</u>

> **Jeu 1 : un actant A (*émetteur*) possède une grande collection (en vrac, partiellement ou totalement groupée) de plus de mille éléments (mais moins de dix-mille). Il doit**

communiquer un nombre écrit en chiffres selon les principes de notre système de numération décimal de position à un actant B (les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps) pour que celui-ci réalise une collection équipotente. Il connait le système de numération pour les nombres inférieurs à mille (et sait qu'il est aussi connu pour la personne à laquelle se destine son message).

Description du jeu 2

Jeu 2 : un actant B (*récepteur*) a à sa disposition un stock d'éléments déjà groupés. Il reçoit un message où un nombre (compris entre mille et dix-mille) est écrit en chiffres selon les principes de notre système de numération décimal de position. A partir de ce nombre il doit construire une collection équipotente à celle de l'émetteur de ce message (les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps). Il peut y avoir suffisamment de groupements de chaque ordre disponibles dans le stock ou bien il peut manquer des groupements à certains ordres (contraintes sur le stock). Les deux actants connaissent le système de numération pour les nombres des tranches inférieures.

III.6 Les désignations intermédiaires éventuelles entre collection et écriture chiffrée

Nous avons déjà indiqué que nous nous centrons sur l'écriture chiffrée comme moyen de désignation des quantités. Mais il est possible d'utiliser d'autres désignations des quantités pour passer d'une collection à l'écriture chiffrée (jeu 1) ou inversement (jeu 2).
Par exemple effectuer un comptage oral à partir des objets de la collection fournit un nom du nombre qu'il faut ensuite traduire en écriture en chiffres comme par exemple trois-cent-vingt qui s'écrit 320. Cela peut d'ailleurs se faire en passant par une autre désignation intermédiaire selon les puissances de dix. Par exemple trois-cent-vingt s'écrit (3x100)+(2x10) soit 320. Pour une collection groupée, effectuer un comptage en unités de numération (un, deux, trois, trois centaines, un, deux, deux dizaines par exemple) amène à une désignation en unités de numération qu'il faut ensuite traduire en écriture en chiffres (par exemple trois centaines deux dizaines s'écrit 320). La désignation intermédiaire peut également être un dessin d'un matériel de numération utilisé dans la classe, pouvant servir à désigner des quantités pour diverses collections.
On peut alors représenter par le schéma suivant les jeux 1 et 2, en tenant compte de la possibilité d'utiliser une désignation intermédiaire, représentée par les flèches en pointillé (jeux 1' et 2') :

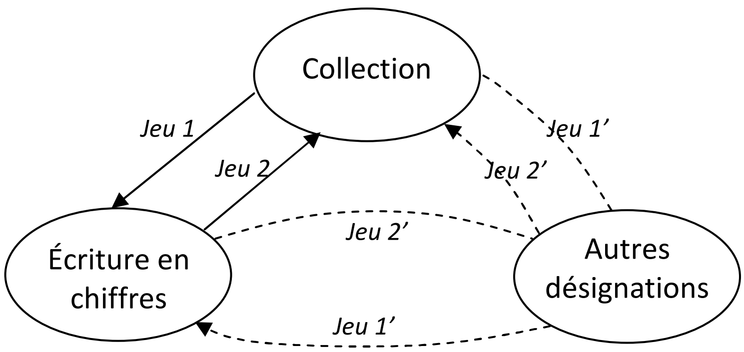


Figure 9 : schéma des jeux 1 et 2, tenant compte d'autres désignations éventuelles de la quantité

Après la présentation de ces deux premiers jeux, nous allons montrer maintenant la nécessité d'autres jeux pour mettre en jeu les conversions entre unités.

III.7 La question du comptage et des conversions. Nécessité d'autres jeux.

Dans ce paragraphe nous ne considérons plus le cas de collections en vrac (pour la collection initiale ou le stock).

Pour le jeu 1

Pour le jeu 1, nous avons mis en évidence la stratégie d'association directe entre le nombre de groupements (obtenu par comptage) d'une collection totalement groupée et l'écriture en chiffres par le principe de position. Pour un groupement donné, le comptage s'appuie sur une association de chaque élément à un mot de la suite numérique orale. On distingue le comptage en unités de numération (un, deux, trois, trois centaines, …), intercalé éventuellement avec le nom du groupement (une centaine, deux centaines, trois centaines, …), du comptage en unités simples : cent, deux-cents, trois-cents, …

Pour une collection partiellement groupée, le comptage en unités peut dépasser dix. Il est alors possible de compter toutes les unités et de faire ensuite les conversions ou bien de faire les conversions dès que l'on a dix unités. Par exemple pour une collection de 32 centaines, il est possible de compter :

- un, deux, …, dix, onze, …, trente-deux centaines, donc trois milliers deux centaines ;
- un, deux, …, dix centaines soit un millier, un, deux, …, dix centaines soit un millier, etc., donc trois milliers deux centaines.

Avec un comptage en unités simples il n'y a pas de conversion en jeu puisque c'est la connaissance de la suite numérique orale qui prend en charge les changements d'unités. Pour l'exemple précédent c'est la connaissance de la suite numérique orale de cent en cent : cent, deux-cents, trois-cents, …, neuf-cents, mille, mille-cent, …, trois-mille-deux-cents.

Ces trois stratégies ont un coût assez proche en termes de nombre de mots énoncés. Or, pour la compréhension du système de numération, il est essentiel que les élèves s'approprient les conversions entre unités, notamment le passage direct de 32 centaines par exemple à 3 milliers 2 centaines. C'est par exemple ce type de conversion qui est en jeu dans les techniques opératoires. Mais le fait que des collections soient dans le milieu de la situation rend possibles et tout aussi efficaces les autres formes de comptage. Nous faisons alors le choix de considérer une restriction du jeu 1 où ce n'est pas la collection qui est dans le milieu de la situation mais une description de la quantité correspondante en différentes unités[25]. Par exemple plutôt que d'avoir une collection constituée de 32 groupements en centaines et 5 éléments isolés, c'est la description 32 centaines 5 unités (ou 32 centaines d'éléments et 5 éléments isolés) qui est donnée. La collection n'est plus présente : elle peut être évoquée mais c'est la donnée d'une désignation de la quantité qui importe. Le problème posé revient alors à chercher une autre désignation, celle usuelle en chiffres, de cette quantité. D'un problème de dénombrement on passe alors à un problème de traduction d'écriture d'une quantité (avec différentes unités) en une autre écriture, celle en chiffres.

Il est aussi possible de construire une collection à partir de la désignation de la quantité puis d'en effectuer le dénombrement (par un comptage en unités simples par exemple) mais cela est beaucoup plus coûteux que la conversion entre unités (32 centaines = 3 milliers 2 centaines), notamment avec un grand nombre de milliers.

[25] Pour les raisons données dans le paragraphe sur les savoirs de la numération nous considérons l'écriture en unités de numération pour désigner une quantité selon les différentes unités.

Pour le jeu 2

Pour le jeu 2, les mêmes types de comptages sont possibles à partir du stock pour construire la collection. Pour une écriture de 3 200, sans groupement en milliers disponible, le récepteur peut en effet compter les groupements en centaines :

- un, deux, …, dix centaines soit un millier, un, deux, …, dix centaines soit un millier, etc., et s'arrêter à « trois milliers deux centaines » ;
- cent, deux-cents, trois-cents, …, neuf-cents, mille, mille-cent, …, et s'arrêter à « trois-mille-deux-cents ».

Il est aussi possible, toujours à partir de l'écriture en chiffres 3200, de convertir 3 milliers en 30 centaines et donc prendre 32 centaines dans le stock. Le coût de ces différentes stratégies est à peu près équivalent.
Comme pour le jeu 1, nous considérons alors une restriction du jeu 2 pour lequel le récepteur n'a pas à construire de collection mais à produire une désignation de la quantité en unités (permettant la construction éventuelle d'une collection). Ainsi à partir d'une écriture comme 3200, la stratégie la plus efficace consiste à convertir 3 milliers 2 centaines en 32 centaines.
Les restrictions des jeux 1 et 2 ainsi construites permettent une mise en jeu des conversions entre unités, qui apparaissent alors comme les stratégies optimales de résolution.

III.8 Description des jeux 3 et 4 : jeux de traductions d'écritures

Ces jeux sont construits à partir des deux jeux de la situation fondamentale, mais on ne considère plus de collections (elles peuvent être évoquées) : c'est une désignation autre que celle en chiffres qui permet de décrire la quantité de cette collection qui est donnée (jeu 3) ou à construire (jeu 4). Ces jeux sont donc des jeux de traduction de l'écriture chiffrée en une autre désignation et vice-versa. Nous nous limitons ici au cas où cette autre désignation est l'écriture en unités de numération (EUN).

Description du jeu 3

> **Jeu 3 : ce jeu peut s'inscrire dans la situation générale de réalisation de collections équipotentes décrite précédemment (jeux 0 et 1). Ici le joueur a une description en unités d'une quantité qu'il doit traduire en une écriture en chiffres. La quantité décrite compte soit un nombre d'unités au plus égal à neuf pour chaque unité, soit des unités en nombre supérieur à dix à certains ordres.**

Description du jeu 4

> **Jeu 4 : ce jeu peut aussi s'inscrire dans la situation générale de réalisation de collections équipotentes décrite précédemment (jeux 0 et 2). Ici le joueur a une écriture en chiffres qu'il doit traduire en une description de la quantité correspondante en unités. Il peut pour cela utiliser un nombre limité (ou non) d'unités de chaque ordre.**

La variable didactique d'organisation de la collection des jeux 1 et 2 peut donc être ici considérée comme le nombre d'unités de chaque ordre : il peut être au plus égal à neuf, ce qui met en jeu le principe de position (dont le rôle du chiffre 0 en cas d'absence d'unité isolée à un certain ordre) ou il peut exister des ordres pour lesquels il est supérieur ou égal à dix, ce qui met en jeu des conversions entre unités (donc le principe décimal). Cette variable didactique concerne l'écriture en unités donnée (jeu 3) ou bien le nombre d'unités qu'il est possible d'utiliser à chaque ordre pour produire l'écriture en unités de numération (jeu 4).

III.9 Schéma récapitulatif de la situation fondamentale pour les propriétés de l'écriture en chiffres

En tenant compte de ces jeux 3 et 4, nous pouvons donc schématiser la situation fondamentale construite ainsi :

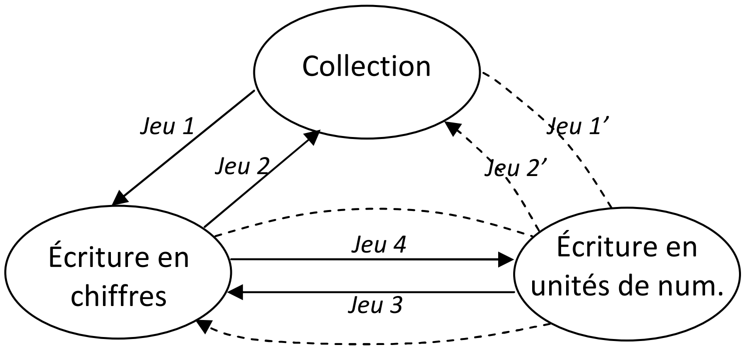


Figure 10 : schéma des différents jeux de la SF

Nous allons maintenant nous appuyer sur ce travail pour terminer la construction de l'OM de référence en mettant en évidence les savoir-faire et leurs technologies.

IV. Les savoir-faire de l'étude de la numération et leurs technologies

À partir de l'étude d'une théorie pour la numération à l'école primaire et de l'étude de la mise en fonctionnement de ces savoirs dans une situation fondamentale, nous allons maintenant chercher à construire la partie de l'OM de référence concernant le niveau des savoir-faire et de leurs technologies.

Cette partie de l'OM de référence est construite principalement en tenant compte des praxéologies enseignées depuis le siècle dernier à l'école primaire. La construction de la situation fondamentale a permis de pointer les aspects fonctionnels des savoirs en jeu. En effet, selon Artaud (2007) l'OM de référence devrait se démarquer des OM existantes et inclure « les fonctions des mathématiques en jeu », ce qui est indispensable « dans la perspective de pouvoir juger la mesure dans laquelle les OM existantes prennent en charge cet aspect fonctionnel. » Pour cela il faut donc « motiver l'étude des différents types de tâches et donc que l'on puisse obtenir une articulation, au moins partielle, des types de tâches entre eux ».

Ainsi, nous nous appuyons à la fois sur la recherche de la situation fondamentale de la numération (§III) et sur l'étude de l'enseignement de la numération au cours du XX^{ème} siècle faite par Chambris (2008) qui nous permet de relever les types de tâches, techniques et technologies utilisés dans l'enseignement de la numération sur cette période (au moins dans les programmes officiels et les manuels scolaires).

Nous commençons par décrire les différents niveaux d'OM[26] concernés par l'étude de la numération.

[26] Selon Bosch et Chevallard (1999) : « Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches forme une organisation praxéologique (ou praxéologie) ponctuelle. L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie locale, ou régionale ou globale, selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée ».

IV.1 Une OM régionale de la connaissance des nombres entiers et les trois OM locales.

En appui sur la situation fondamentale de la numération, dans l'OM globale (OMG) des grandeurs, mesures, nombres et calculs, nous pouvons considérer que l'OM régionale (OMR) de l'étude des nombres entiers (appelée connaissance des nombres entiers) est constituée de trois organisations mathématiques locales (OML) :

- Une OML qui comprend les types de tâches mettant en jeu le nombre sous son aspect cardinal[27] (principalement dénombrement et comparaison de collections) ;
- Une OML qui comprend les types de tâches mettant en jeu le nombre sous son aspect ordinal[28] (comparer, ranger, placer des nombres sur une droite graduée, etc.) ;
- Une OML qui comprend les types de tâches de traductions d'écritures.

Cela peut se résumer par le schéma de la page suivante.

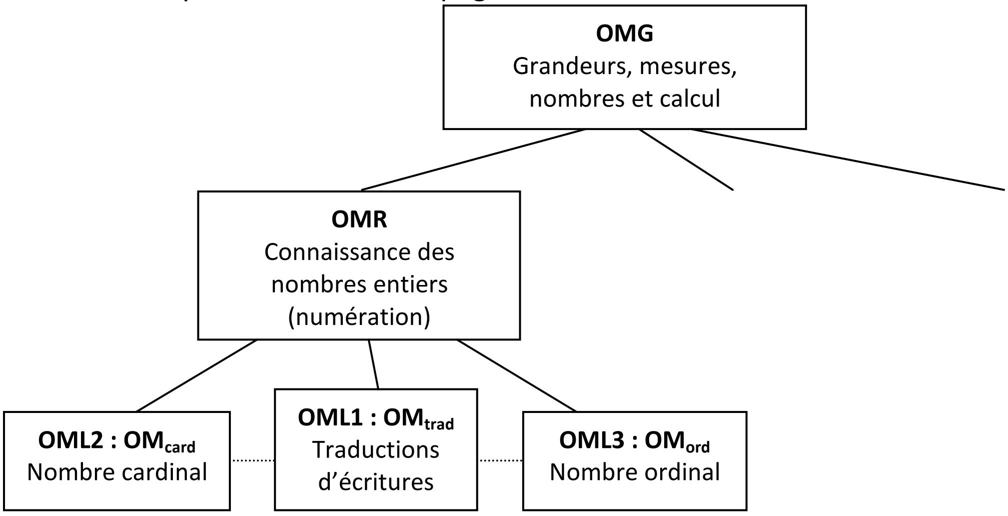


Figure 11 : schéma de l'OM régionale de l'étude de la numération

Il y a des recoupements possibles avec d'autres OM locales des grandeurs et mesure ou du calcul. Par exemple OM_{card} est une OML faisant aussi partie de l'OMR des grandeurs et mesures puisque le cardinal est une grandeur discrète des collections d'objets.
Les OM locales OM_{card} et OM_{ord} apparaissent comme des raisons d'être de OM_{trad}. En effet dénombrer une collection par exemple (type de tâches de l'OM_{card}) peut amener :

- après un comptage en unités de numération à traduire une EUNC (ou EUN) en EC. Par exemple traduire 1 millier, 2 centaines, 3 dizaines et 4 unités en écriture chiffrée 1 234 (ou encore 12 centaines 34 unités en 1 234) ;
- après un comptage en unités simples (mille, mille-cent, mille-deux-cents, etc.) à traduire le nom d'un nombre en EC. Par exemple mille-deux-cent-trente-quatre en écriture chiffrée 1 234 ;
- etc.

De même comparer ou ordonner des nombres (type de tâches de l'OM_{ord}) peut amener, souvent pour des raisons technologiques (explication ou justification), à faire :

[27] La conception du nombre mise en avant est celle de mesure du cardinal.
[28] La conception du nombre mise en avant est liée à la notion d'ordre.

- une décomposition canonique de ces nombres en unités de numération et comparer les unités de plus haut ordre. Par exemple pour justifier la comparaison de 1234 et 1321 il est possible de regarder le nombre de milliers, (ici c'est le même) puis de centaines isolées (2 et 3) pour en déduire que 1321 est supérieur à 1234.
- ou une troncature au niveau du premier chiffre différent (en partant de la gauche). Par exemple pour justifier la comparaison de 1234 et 1321 il est possible de regarder le nombre de centaines (12 et 13) pour en déduire que 1321 est supérieur à 1234.

Ce découpage est cohérent avec les raisons d'être de la numération du schéma général de communication d'El Bouazzaoui (1982), au moins pour l'aspect cardinal du nombre. Il peut être mis en relation avec les différents jeux de la situation fondamentale. On y retrouve le passage de jeux portant sur des collections (jeux 1 et 2, aspect cardinal) vers des jeux de traductions d'écriture (jeux 3 et 4).

On peut aussi signaler que Chambris (2008, 2012) montre que les conversions de grandeurs du système métrique sont aussi une raison d'être de l'OML_{trad}. Enfin les types de tâches de calcul (posé, mental ou écrit en ligne) sont aussi des raisons d'être de l'OML_{trad} du fait de la mobilisation des principes de numération pour expliquer et justifier ces techniques. Nous y reviendrons par la suite.

Nous allons maintenant présenter ces trois OM locales. Pour illustrer les types de tâches sur des exemples de tâches nous donnerons des extraits de manuels anciens ou récents. En lien avec nos questions de départ et notre objet de recherche nous ne traiterons que brièvement le cas de l'OM_{ord} qui concerne moins l'enjeu lié aux relations entre unités.

IV.2 L'OM_{trad} : traductions d'écritures (traductions canoniques/ conversions)

Nous considérons que les types de tâches de traduction peuvent se classer selon deux catégories, en fonction des savoirs principalement mis en jeu. Ce découpage peut sembler artificiel mais il est lié à nos questions : il doit nous permettre de mettre en évidence les traductions mettant en jeu des conversions ou non. Nous distinguons ainsi les *traductions canoniques d'écritures* des *conversions*. Nous terminerons ce paragraphe en montrant leur articulation possible en traductions (générales) d'écritures et en formulant de manière générale la technique de juxtaposition.

Les types de tâches de traductions canoniques d'écritures : $T_{Tec/n}$, $T_{Tec/eunc}$, $T_{Tec/eac}$, $T_{Tec/epdc}$

$T_{Tec/n}$ (et $T_{Tn/ec}$) : associer la désignation en chiffres au nom du nombre (aussi nommé « écrire/nommer ») et réciproquement.

Il s'agit donc de passer d'une désignation dans notre système de numération écrit à une désignation dans notre système de numération parlé.

Voici des exemples de tâches :

1. *Lire les nombres suivants : 2 578. — 3 659. — 4 795. — 5 490. — 6 804. — 7 046. — 8 900. — 9 007. — 9 090. — 8 070.*

1re et 2e années. — 359. Ecrire en chiffres : Quatre mille sept cent quatre-vingt-cinq. — Huit mille trois cent quatre-vingt-dix. — Six mille quatre cent sept. — Cinq mille soixante-seize.

Extraits de Boucheny CE (Larousse 1930), p.75

4 Écris en chiffres.

a) huit mille neuf cent quatre

b) mille cent quatre-vingt-dix-neuf

c) sept mille soixante et onze

5 Écris en lettres.

a) 2 159

b) 5 468

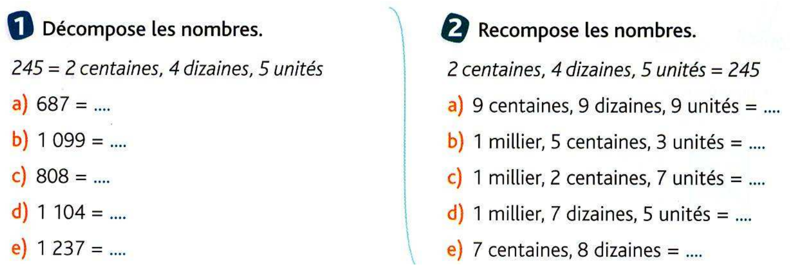
c) 8 905

Extrait de « La tribu des maths » CE2 (Magnard, 2008)

$T_{Tec/eunc}$, $T_{Tec/eac}$, $T_{Tec/epdc}$ (et $T_{Teunc/ec}$, $T_{Teac/ec}$, $T_{Tepdc/ec}$) : traduire l'écriture en chiffres en écriture canonique (aussi appelées « décompositions et recompositions canoniques »)
Il s'agit ici de traduire un nombre en chiffres en une écriture canonique :

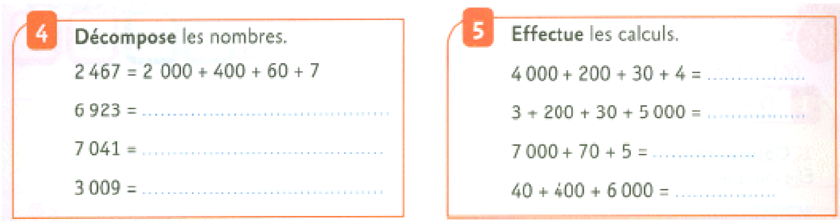
- en unités de numération pour $T_{Tec/eunc}$,
- additive pour $T_{Tec/eac}$,
- utilisant les puissances de dix pour $T_{Tec/epdc}$.

Et réciproquement ($T_{Teunc/ec}$, $T_{Teac/ec}$, $T_{Tepdc/ec}$).
Exemples de tâches :


1 Décompose les nombres.
245 = 2 centaines, 4 dizaines, 5 unités
a) 687 = ...
b) 1 099 = ...
c) 808 = ...
d) 1 104 = ...
e) 1 237 = ...

2 Recompose les nombres.
2 centaines, 4 dizaines, 5 unités = 245
a) 9 centaines, 9 dizaines, 9 unités = ...
b) 1 millier, 5 centaines, 3 unités = ...
c) 1 millier, 2 centaines, 7 unités = ...
d) 1 millier, 7 dizaines, 5 unités = ...
e) 7 centaines, 8 dizaines = ...

Figure 12 : extrait de « La tribu des maths » CE2 (Magnard 2008)


4 Décompose les nombres.
2 467 = 2 000 + 400 + 60 + 7
6 923 = ...
7 041 = ...
3 009 = ...

5 Effectue les calculs.
4 000 + 200 + 30 + 4 = ...
3 + 200 + 30 + 5 000 = ...
7 000 + 70 + 5 = ...
40 + 400 + 6 000 = ...

Figure 13 : extrait de « Vivre les maths » CE2 (Nathan 2010)

D'autres types de traductions seraient possibles, comme la traduction du nom d'un nombre en écriture en unités de numération (par exemple mille-deux-cent-trente-quatre en 1 millier, 2 centaines, 3 dizaines et 4 unités ou réciproquement), etc., mais nous nous sommes centré sur les types de tâches principalement enseignés en numération (depuis le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle) : ils ne font intervenir que des traductions mettant en jeu l'écriture en chiffres[29].

<u>Techniques et technologies de traduction canoniques d'écritures</u>
La principale technique, appelée *technique de juxtaposition* $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{jux}}$, consiste à associer à chaque unité sa position dans l'écriture en chiffres (ou réciproquement) par une juxtaposition des nombres d'unités de chaque ordre. Nous en donnerons une formulation générale par la suite. Elle s'appuie sur l'élément technologique *principe de position* θ_P:

> θ_P : **Les unités du premier ordre s'écrivent au premier rang, les unités du deuxième ordre s'écrivent au deuxième rang, etc.**

[29] On pourra aussi noter, même si cela ne nous servira pas pour la suite que le type de tâches de changement de base (traduire une écriture en base dix dans une autre base et réciproquement) a existé au moment de la réforme des mathématiques modernes en France. Il n'est plus travaillé à l'école primaire depuis 1980 environ.
On peut aussi trouver dans des manuels de l'école primaire actuel des exercices de traduction d'écritures en chiffres avec notre système de numération écrit en une écriture dans un autre système de numération historique (égyptien, romain, …). Ce type de tâches n'est pas cité par Chambris, mais nous l'avons trouvé dans certains manuels. L'objectif affiché est en général de mettre à distance notre système de numération en en étudiant un autre et ainsi mieux le comprendre.

Les unités étant en relation de dix en dix successivement, le *principe décimal* θ_D est une technologie en jeu mais qui apparaît en arrière-plan (il n'y a pas d'utilisation directe de ces relations comme on le verra pour les conversions) :

> θ_D : **Dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.** Par exemple : dix centaines sont égales à un millier, ce qui peut également s'écrire : 10×100 = 1000.

La technique $\tau_{\mathrm{ec/n}}$ (ou $\tau_{\mathrm{n/ec}}$) :
Des adaptations de la technique de position sont nécessaires pour $T_{Tec/n}$ du fait de la non régularité de notre système de numération parlé (Mounier 2010). Cette technique $\tau_{\mathrm{ec/n}}$ consiste à associer les différentes unités, … au rang correspondant dans l'écriture en chiffres. Elle s'appuie sur l'élément technologique $\theta_{E/P}$: lien *entre numération écrite et numération parlée*. Nous ne préciserons pas dans le détail ce lien puisque ce n'est pas l'objet principal de notre étude. En voici quelques éléments principaux :

> $\theta_{E/P}$: **Les chiffres 1, 2, …, 9, se disent un, deux, …, neuf, les dizaines se disent dix, vingt, trente, …, quatre-vingt-dix, les centaines se disent cent mais pour une centaine « un cent » ne se dit pas (on dira « cent »), etc.**

Les techniques $\tau_{\mathrm{Teunc/ec}}$, $\tau_{\mathrm{Tepdc/ec}}$, $\tau_{\mathrm{Teac/eac}}$ (ou $\tau_{\mathrm{Tec/eunc}}$, $\tau_{\mathrm{Tec/epdc}}$, $\tau_{\mathrm{Tec/eac}}$) :
Nous allons donner ici l'illustration de la technique de position pour le type de tâches suivant : traduire en chiffres un nombre donné en EUNC, EAC ou EPDC (la technique est inversée pour le type de tâches inverse). La réalisation de la technique de position dépend du type d'écriture de départ : EUNC, EAC, EPDC.
$\boldsymbol{\tau_{Teunc/ec}}$ (pour 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités = … ?) : 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités s'écrit 1 234 par juxtaposition du nombre d'unités isolées, de dizaines isolées, etc. car <u>les unités s'écrivent au 1er rang (à partir de la droite), les dizaines s'écrivent au 2ème rang, etc. (</u>θ_P).
$\boldsymbol{\tau_{Tepdc/ec}}$ (1 × 1000 + 2 × 100 + 3 × 10 + 4 × 1 = … ?) : 1 × 1000 + 2 × 100 + 3 × 10 + 4 × 1 s'écrit 1 234 par juxtaposition des coefficients des puissances de 10, ce qui peut se justifier par :

- <u>le coefficient de 1 s'écrit au 1er rang (à partir de la droite), le coefficient de 10 s'écrit au 2ème rang, etc. (</u>θ_P) ;
- ou bien : 1 × 1000 + 2 × 100 + 3 × 10 + 4 × 1 = 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités et on se ramène à $\tau_{Tec/eunc}$.

$\boldsymbol{\tau_{Teac/ec}}$ (1000 + 200 + 30 + 4 = … ?) : 1000 + 200 + 30 + 4 = par juxtaposition des chiffres non nuls de chaque terme de l'addition car 1000 + 200 + 30 + 4 = 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités et on se ramène à $\tau_{Tec/eunc}$.
L'absence d'unités à certains ordres met en jeu le rôle du chiffre 0. Exemple : 1 millier 3 dizaines 4 unités = … nécessite d'écrire un 0 au rang des centaines pour que le 1 se retrouve bien au 4ème rang à partir de la droite.
Comme l'a montré (Chambris 2008) cette technique de position peut être mise en œuvre en appui sur des *technologies de calcul*, dans le cas de l'utilisation des EAC ou EPDC. Ces technologies de calcul s'appuient sur des manipulations graphiques et spatiales des écritures chiffrées et peuvent être amenées à remplacer, dans une institution, les technologies de la numération. Elles ont donc un statut ambigu entre technologies de numération et technologies de calcul.
<u>Technologies de calcul de multiplication :</u> en EPDC, multiplier par 1000 revient à écrire trois zéros à droite soit 1 × 1000 = 1000, etc. On se ramène alors à une EAC et on peut traduire

cette écriture en EC, par des technologies de calcul d'addition[30] (comme pour l'addition posée sans retenue : 1000 + 200 + 30 + 4 = 1234).
La numération parlée peut apparaître comme intermédiaire dans toutes les techniques de position citées précédemment :

- 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités c'est mille-deux-cent-trente-quatre,
- 1 × 1000 + 2 × 100 + 3 × 10 + 4 et 4 c'est mille-deux-cent-trente-quatre,
- 1000 + 200 + 30 + 4 c'est mille-deux-cent-trente-quatre.

Les éléments technologiques en jeu sont alors les liens entre les différentes unités « millier », etc. ou « 1000 », etc. et les mots nombres « mille », etc. ainsi que le lien entre ces mots « mille », etc. et leur position dans l'écriture en chiffres.
Dans ce cas la technique peut être justifiée par la relation numération parlée/numération écrite ($\theta_{E/P}$) et le principe de position formulé avec les mots-nombres de la numération parlée. Par exemple, 1 millier 2 centaines 3 dizaines 4 unités c'est mille-deux-cent-trente-quatre (car 1 millier se dit mille), ce qui s'écrit 1234 car les « mille » s'écrivent au 4ème rang, etc.

Les types de tâches de conversion
Ce sont des types de tâche mettant en jeu le principe décimal. Nous avons choisi de mettre ici à la fois les conversions entre unités dans un même registre (EUN, EAPD, EPD), qui ne sont donc pas des traductions d'écritures, ainsi que les traductions d'écritures entre ces différents ostensifs (EUN, EAPD, EPD) et l'écriture du nombre[31].
Cela regroupe donc tous les types de tâches où il s'agit d'exprimer un nombre d'unités donné en une ou plusieurs autres unité(s), l'écriture en chiffres donnant une écriture en unités simples. On trouve ce type de tâches de conversion sous différentes formes à l'école : on parle de recherche du nombre de … (dizaines, centaines, …) ou encore de décomposition ou de recomposition de nombres, etc.

Les conversions dans un même registre d'écriture : T_{Ceun}, T_{Ceapd}, T_{Cepd}
Il s'agit de convertir un nombre d'unités données en une autre unité, comme on peut le faire entre les unités du système métrique. Ces unités peuvent être exprimées en unités de numération ou avec des écritures utilisant les puissances de 10 (1, 10, 100, …) comme dans les exemples ci-dessous.

186. Convertir en unités : 5 centaines, 7 centaines, 40 dizaines.
187. Convertir en dizaines : 8 centaines, 6 centaines, 300 unités.
188. Convertir en centaines: 500 unités, 20 dizaines, 90 dizaines.

Extrait de Boucheny CE (Larousse 1930), p.44

Chambris (2008) a montré que ce type de tâches a disparu à partir de la « contre réforme » (1980), mais commence à réapparaître aujourd'hui. Par exemple, on en trouve des traces dans cet extrait de manuel (page suivante) :

[30] Voici comment Chambris (2008) la formule : « une formulation possible nous semble être : pour ajouter des nombres de 1 chiffre suivi de zéros de longueurs toutes différentes, on aligne les chiffres à partir de la droite, les uns sous les autres et on fait les sommes par colonne » (p.505).
[31] A ne pas confondre avec la terminologie de Duval (1996) où les « conversions » concernent les traductions entre deux registres différents et les « traitements » le travail dans un même registre.

3 Complète.
On peut échanger :
a. 4 dizaines contre ... unités.
b. 300 unités contre ... dizaines.
c. 20 dizaines contre ... centaines.
d. 30 dizaines contre ... unités.
e. 5 centaines contre ... dizaines.
f. 12 dizaines contre ... unités.
g. 8 centaines contre ... unités.

Extrait de « Cap Maths » CE2 (Hatier, 2011), p.35

Pour simplifier nous traiterons uniquement le cas de conversion d'unités en unités de rang supérieur (avec des unités consécutives), mais il existe bien sûr d'autres conversions comme par exemple « convertir 2 milliers en centaines » (tâche inverse), « convertir 200 dizaines en milliers » (conversion entre des unités non consécutives), etc.

Techniques et technologies de conversion
L'élément technologique principal en jeu est le principe décimal θ_D :

> θ_D : **Dix unités d'un certain ordre sont égales à 1 unité de l'ordre immédiatement supérieur.** Par exemple : dix centaines sont égales à un millier, ce qui peut également s'écrire : 10×100 = 1000.

Considérons la tâche suivante : convertir 20 dizaines en centaines. La technique est donnée avec le discours technologique (souligné) qui l'accompagne.
$\boldsymbol{\tau_{Ceun}}$ (pour 20 dizaines = … centaines ?) : 20 dizaines = 2 dizaines de dizaines = 2 centaines car 1 dizaine de dizaines = 1 centaine (relation entre unités).
Cela peut aussi s'accompagner du discours technologique suivant : 20 dizaines = (2×10) dizaines = 2×(10 dizaines) et 10 dizaines = 1 centaine (relation entre unités) donc 20 dizaines = 2 centaines.
Une autre technique consisterait à s'appuyer sur l'écriture en chiffres et utiliser la troncature. Par exemple pour une conversion de 20 dizaines en centaines, on écrit le 0 au rang des dizaines, le 2 vient alors se placer au rang des centaines, soit 2 centaines. Cela peut se faire dans un tableau de numération.

$\boldsymbol{\tau_{Cepd}}$ (pour 20 × 10 = … × 100 ?)[32] : 20×10 = (2×10)×10 = 2×(10×10). Et 10×10 = 100 (relation entre unités) donc 20×10 = 2×100.
Ces deux ostensifs n'ont pas la même valence sémiotique vis-à-vis du principe décimal de la numération : les unités de numération donnent à voir les relations entre unités alors que les écritures utilisant les puissances de 10 donnent à voir une technologie multiplicative de calcul (écriture d'un zéro à droite) qui peut rendre transparentes les relations entre unités. En effet l'utilisation des puissances de 10 peut amener à interpréter la justification par la technologie 10×10 = 100 non par les relations entre unités mais par une technologie de calcul (comme l'a observé Chambris, 2008) : multiplier par 10 revient à écrire un zéro à droite du nombre.

[32] Il est aussi possible de convertir à partir des expressions « paquets » ou « groupes ». Par exemple pour 20 paquets de 10 = … paquets de 100 ? 20 paquets de 10 c'est 2 fois 10 paquets de 10. Et 10 paquets de 10 c'est 1 paquet de 100 (relation entre unités). Donc 20 paquets de 10 c'est 2 paquets de 100.

$\boldsymbol{\tau_{Cea}}$ **:** L'utilisation d'écritures additives ne permet de faire des conversions que dans le cas d'additions itérées de puissances de 10 ou d'utilisation des mots « paquets » (ou « groupes ») :

- 100 + 100 + … + 100 = 1000,
- ou 10 paquets de 100 = 1000.

Comme dans le cas des EPD, ces relations peuvent être interprétées comme des technologies de calcul additif : 100 + … + 100 = 1000 comme dans une addition posée et 10 paquets de 100 = 1000 par écriture d'un zéro à droite, comme pour la multiplication par 10.

Rappelons que la numération parlée ne permet pas de faire des conversions entre unités : la valence instrumentale de cet ostensif est plus faible que celle des unités de numération ou des EPD pour cette technique (Chambris, 2008). Il n'est pas possible d'associer un nombre supérieur ou égal à dix avec les mots-nombres unités (dix, cent, mille, …), même si certaines exceptions existent (onze cents, douze cents, …). Dans l'exemple que nous avons considéré ci-dessus, il n'est pas possible de dire « vingt-cents ». Cependant, comme pour les ECPD, en utilisant les écritures en matériel de numération (EMN) des expressions « paquets de » (ou « groupes de ») cela devient alors possible. Par exemple vingt paquets de dix, c'est deux fois dix paquets de dix. Or dix paquets de dix c'est cent, donc vingt paquets de dix, c'est deux fois cent, soit deux-cents. Cette technique $\boldsymbol{\tau_{Cemn}}$ se prête surtout à une utilisation à l'oral et peut donc apparaître comme l'oralisation de la technique $\boldsymbol{\tau_{Cepd}}$.

<u>Le type de tâches général $\mathbf{T_{Teun/ec}}$ (et $\mathbf{T_{Tec/eun}}$) et la généralisation de la technique de juxtaposition $\boldsymbol{\tau_{jux}}$</u>

Ce type de tâches consiste en une traduction d'une écriture en unités en écriture en chiffres et réciproquement. Il est donc plus général que $T_{Teunc/ec}$ et $T_{Tec/eunc}$ car l'écriture en unités peut avoir plus de 10 unités à certains ordres, comme par exemple 3 centaines 24 dizaines 8 unités. Il s'inscrit donc bien dans les traductions d'écritures faisant intervenir des conversions. Nous ne décrivons ici que le cas où cette traduction concerne une écriture en unités de numération, mais on peut trouver le même type de tâches pour les écritures selon les puissances de dix.

Ce type de tâches fait appel à une généralisation de la technique de juxtaposition déjà présentée (c'est cette technique générale que nous appellerons technique de juxtaposition τ_{jux}) prenant en compte les conversions. Cette généralisation s'accompagne donc d'une technologie permettant d'adapter la technique à différentes variantes[33].

La technique consiste en une association des nombres d'unités de chaque ordre à leur position dans l'écriture en chiffres par juxtaposition. Cette juxtaposition ne peut se faire que sous les trois conditions suivantes (s'appuyant sur les technologies θ_P et θ_D) :

- condition $\theta_{CondRang}$: **respect du rang de chaque unité** dans l'écriture en chiffres (les unités simples s'écrivent au premier rang à partir de la droite, les dizaines au deuxième, etc.), ce qui peut nécessiter de modifier l'ordre dans lequel les unités sont données avant de faire la juxtaposition des chiffes dans l'écriture chiffrée ;

[33] Cela peut être rapproché de ce que Castela (2008) évoque ici : « on peut certes considérer que dans la situation plus complexe décrite ci-dessus est finalement élaborée une technique unique mais arborescente intégrant les différentes techniques connues avec des critères de décision » (p.168)

- condition $\theta_{CondUnité}$: **présence de chaque unité** (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter d'utiliser le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées ;
- condition $\theta_{CondChiffre}$: **présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang** de l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter de faire des conversions entre unités.

Ainsi, si le nombre d'unités isolées de chaque ordre est inférieur ou égal à neuf, on écrit le nombre d'unités simples isolées au premier rang à partir de la droite, le nombre de dizaines isolées au deuxième rang à partir de la droite, etc. Par exemple 3C 2M 4U 1D s'écrit 2 314.
En cas d'absence d'unités isolées à un (ou plusieurs) ordre(s) d'unité(s), on écrit 0 au rang correspondant à cet (ou ces) ordre(s), à condition qu'il existe une unité de plus haut rang pour laquelle il y a un nombre non nul d'unités isolées. Par exemple 2M 3C 4U s'écrit 2 304 (mais ne peut pas s'écrire 02 304 car l'écriture en chiffres est unique) ou encore 2M 4U s'écrit 2 004.
S'il existe un ordre d'unité (ou plusieurs) pour lequel (ou lesquels) il y a plus de dix unités isolées, alors on convertit ces unités en unités d'ordre supérieur (en utilisant les relations entre unités : 10U = 1D, 10D = 1C, etc.) jusqu'à se ramener au cas précédent. Par exemple 2M 12C 4U = 3M 2C 4U = 3 204 ou encore 3M 21C 45D 51U = 3M 21C 50D 1U = 3M 26C 1U = 5M 6C 1U = 5 601.

Ainsi à l'intérieur de l'OM_{trad} on peut identifier un type de tâches plus général[34] faisant appel aux traductions canoniques d'écritures et aux conversions. Cela peut se schématiser ainsi pour le cas des écritures en unités de numération :

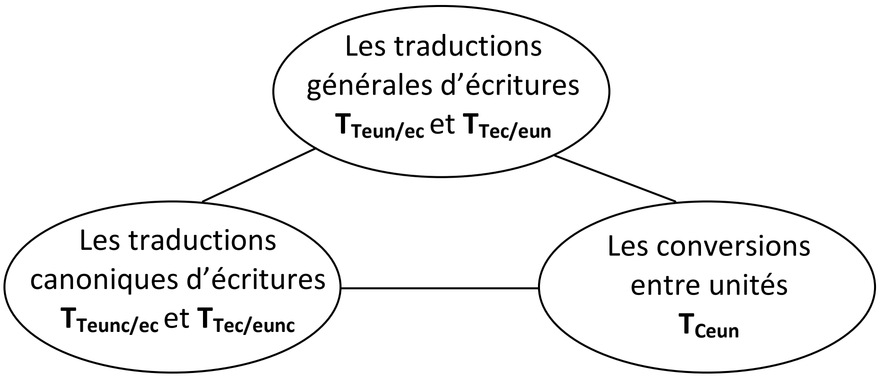


Figure 14 : les différentes traductions d'écritures (OM_{trad})

Une traduction $\mathbf{T_{Tec/eun}}$ particulière, le *nombre de* (et *chiffre des*) : $\mathbf{T_{Cnd}}$
Il s'agit de déterminer le nombre d'unités d'un certain ordre (ou le chiffre des unités d'un certain ordre). Pour simplifier nous dirons *nombre de* (et *chiffre des*).
Dans les manuels *nombre de* et *chiffre des* sont souvent associés. Il s'agit alors souvent de mettre en évidence la différence entre le nombre de dizaines isolées dans un nombre et le nombre total de dizaines.
Exemples de tâches :

3. Dans le nombre 509, quel est le chiffre des unités ?
Combien y a-t-il d'unités ? Quel est le chiffre des dizaines ?
Combien y a-t-il de dizaines ? Quel est le chiffre des centaines ?
Combien y a-t-il de centaines ?

Extrait de Boucheny CE (Larousse 1930), p.50

[34] Que l'on peut lier aux jeux 3 et 4 de la situation fondamentale.

4 **Recopie et complète ce tableau.**

Nombre	Chiffre des milliers	Nombre de milliers	Chiffre des centaines	Nombre de centaines	Chiffre des dizaines	Nombre de dizaines
5 423	*5*	*5*	*4*	*54*	*2*	*542*
8 764	....	....	....	....	....	....
9 070	....	....	....	....	....	....
7 301	....	....	....	....	....	....
6 845	....	....	....	....	....	....

Extrait de « La tribu des maths » CE2 (Magnard 2008), p.35

Ce type de tâches « nombre de » est donc bien un cas particulier de conversion (d'unités simples en une autre unité). Mais il peut aussi être considéré comme un type de tâches relevant du calcul : division par des puissances de 10. Par exemple, s'il s'agit de déterminer le quotient de 145 divisé par 10 (ou dans un contexte de timbres par exemple le nombre de carnets de 10 qu'il faut acheter pour avoir 145 timbres. Dans les deux cas cela revient à chercher le nombre de dizaines dans 145.

Dans les savoirs de la numération nous avions mis en parallèle les techniques de troncature, qui sont en jeu dans ce type de tâches, et de juxtaposition de zéros. Cependant il semblerait que le type de tâches de multiplication par les puissances de dix (mettant en jeu la juxtaposition de zéros, voir remarque ci-dessous), dans les praxéologies de l'école, n'apparaisse qu'au niveau du calcul. Ce type de multiplication n'est pas reconnu comme relevant de la numération.

Voici une description de la technique de troncature et des éléments technologiques sur lesquels elle s'appuie.

$\boldsymbol{\tau_{tronc}}$ **:** la troncature à un ordre donné d'unité consiste à considérer le nombre formé par tous les chiffres situés à partir du rang de l'ordre d'unité considéré (de la droite vers la gauche). Cela revient à supprimer tous les chiffres des rangs d'ordres inférieurs. Par exemple, dans 2354 il y a 23 centaines.

Cela se justifie par les deux principes de la numération. Pour l'exemple précédent, le nombre de milliers, écrit au quatrième rang de l'écriture chiffrée, est aussi le nombre de dizaines de centaines. Par juxtaposition avec le chiffre du rang des centaines on obtient donc un nombre à deux chiffres de centaines.

Une remarque concernant la technique de juxtaposition de zéros. Comme nous l'avons mis en parallèle avec la technique de juxtaposition de zéros dans la description des savoirs de numération, nous indiquons ici cette technique (pour le type de tâches « multiplier par une puissances de dix »). La technique de juxtaposition de zéros (couramment appelée « règle des zéros »), que nous noterons $\boldsymbol{\tau_{multPD}}$, consiste à écrire autant de zéros à droite de l'EC du nombre de départ que le nombre de zéros de la puissance de dix. Par exemple 23×100 = 2300. La justification est du même ordre que pour la technique de troncature (puisque c'est la technique inverse) : multiplier 23 par 100 revient à déterminer l'EC de 23 centaines. Or 23 = 2 dizaines 3 unités et 2 dizaines de centaines = 2 milliers, donc 23 centaines = 2 milliers 3 centaines = 2300.

IV.3 L'OM$_{card}$: étude de la numération selon l'aspect cardinal du nombre

T_{Dc} : dénombrer une collection (ou **T_{Pc}** produire une collection de cardinal donné)

Nous regroupons sous ce terme les types de tâches de dénombrement de collections (mesure du cardinal) par un nombre écrit en chiffres[35], ainsi que le type de tâches inverse de construction de collections dont le cardinal est donné (à partir d'un nombre écrit en chiffres). La collection à dénombrer (ou à construire) peut être matérielle ou représentée.

Il existe plusieurs variantes qui dépendent de l'organisation de la collection (collection en vrac, collection partiellement ou totalement groupée) comme cela a été étudié dans la situation fondamentale. Etant donné la taille des nombres qui nous intéresse par la suite (nombres compris entre 1 000 et 9 999), nous ne considérons que le cas de collections partiellement ou totalement groupées.

Exemple de tâche de dénombrement d'une collection (représentée) :

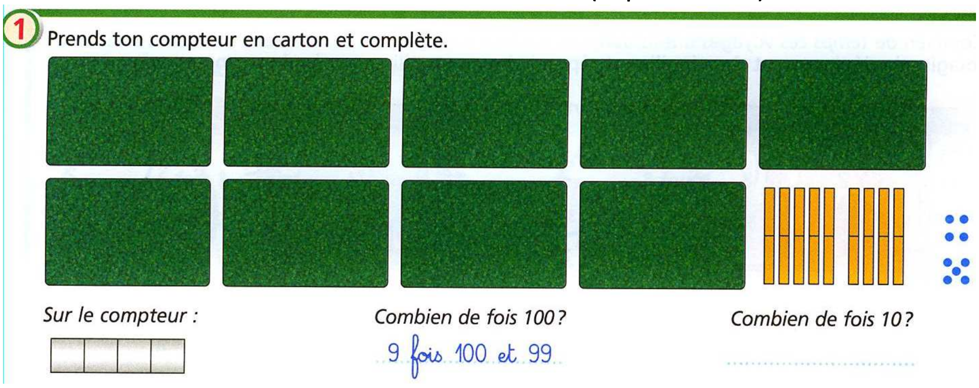


Figure 15 : Extrait de J'apprends les maths, CE2, Retz (2003), p.106

Les techniques et technologies de dénombrement (pour T_{Dc} et T_{Pc})

Pour simplifier nous ne traitons que le dénombrement, les techniques de construction d'une collection étant les techniques inverses.

Les techniques de dénombrement d'une collection amènent à effectuer un comptage (soit en unités simples soit en unités) puis à partir de la désignation orale obtenue utiliser les techniques déjà décrites de traduction en écriture en chiffres. Elles se différencient par les types de comptages effectués. On retrouve bien le fait que l'OM$_{trad}$ peut être convoquée par le dénombrement, qui en constitue une raison d'être.

Nous distinguons le *comptage en unités simples* du *comptage en unités de numération* par le fait que dans le premier les mots utilisés peuvent être interprétés seulement comme un nombre d'unités simples (« trente » c'est trente unités simples, « cent » c'est cent unités simples) alors que dans un comptage en unités les mots utilisés peuvent à la fois désigner un nombre d'unités simples ou une autre unité (on ne dit pas trente mais trois dizaines, on ne dit pas cent mais une centaine). Pour d'autres exemples comme trois-cents ou deux-mille la distinction est moins nette entre l'interprétation « en unités simples » et « en unités » car trois-cents c'est trois-cents unités simples mais c'est aussi trois « cents » (équivalent de trois centaines), deux-mille c'est deux-mille unités simples mais c'est aussi deux « mille » (équivalent de deux milliers).

[35] Suite à un dénombrement la quantité peut être donnée oralement (nom du nombre, ou avec unités de numération) ou par écrit (en chiffres, en lettres, en unités de numération, …). Nous nous intéressons uniquement au cas où la quantité est désignée *in fine* à l'écrit, en chiffres.

Dans le cas d'une collection partiellement groupée, le comptage en unités de numération peut être accompagné d'une conversion entre unités avant la traduction en écriture en chiffres, ce qui n'est pas le cas pour la technique de comptage en unités simples. A titre d'exemple nous considérons une collection partiellement groupée constituée de 3 unités, 25 centaines et 1 millier.

$\boldsymbol{\tau_{DCus}}$**. Technique s'appuyant sur un comptage en unités simples** : mille, mille-cent, mille-deux-cents, …, trois-mille-cinq-cent-trois. Par $\tau_{\text{n/ec}}$, trois-mille-cinq-cent-trois s'écrit 3 503. Cela s'appuie donc sur la technologie de la suite orale (θ_{SO}) de un en un, dix en dix, cent en cent et mille en mille (et $\theta_{E/P}$ pour $\tau_{\text{n/ec}}$). Pour une collection totalement groupée, la technique est la même.

$\boldsymbol{\tau_{DCun}}$. **Technique s'appuyant sur un comptage en unités de numération** : un millier, un, deux, trois, …, vingt-cinq centaines[36], soit deux milliers cinq centaines (conversion τ_{Ceun}) donc trois milliers en tout, cinq centaines et trois unités[37]. Par τ_{jux}, trois milliers cinq centaines trois unités s'écrit 3 503. Cela s'appuie donc sur le fait que l'on compte en dizaines, centaines ou milliers comme on compte en unités simples[38] (un, deux, trois, …) et θ_D pour la conversion τ_{Ceun} ainsi que θ_P pour τ_{jux}. Pour une collection totalement groupée les conversions ne sont pas en jeu. L'utilisation du tableau de numération est possible pour réaliser cette technique.

Enfin une technique de calcul est aussi possible à partir d'un comptage en unités simples.

$\boldsymbol{\tau_{Dcalc}}$. **Technique s'appuyant sur un calcul** : mille s'écrit 1 000 ($\tau_{\text{n/ec}}$), cent, deux-cents, …, deux-mille-cinq-cent s'écrit 2 500 ($\tau_{\text{n/ec}}$), trois s'écrit 3. Il suffit alors de calculer 1 000 + 2 500 + 3 (technique de calcul d'addition en ligne ou posé) : 1 000 + 2 500 + 3 = 3 503. Cela s'appuie donc sur la technologie de la suite orale de un en un, dix en dix, cent en cent et mille en mille ainsi que $\theta_{E/P}$ pour $\tau_{\text{n/ec}}$ puis sur θ_P pour justifier le calcul.

Ces techniques s'appliquent de la même manière dans le cas particulier de collections totalement groupées (les conversions ne sont alors pas en jeu). Une dernière **technique consiste à finir les groupements** (soit effectivement avec les objets, soit par un dessin). On se ramène alors au cas du dénombrement d'une collection totalement groupée, ce qui permet d'appliquer les techniques précédentes.

$\mathbf{T_{Cc}}$: comparer des collections

Comparer des quantités à partir de collections est un type de tâches peu utilisé pour les nombres supérieurs à cent. En général ce sont directement des nombres écrits en chiffres qui sont à comparer ($\mathbf{T_C}$), type de tâches généralement associé à l'OM locale OM_{ord}.

$\mathbf{T_{Ndc}}$: *Nombre de* pour des collections

Comme on peut le voir dans l'extrait de manuel de la page précédente (*J'apprends les maths CE2*), le *nombre de* peut être travaillé avec des collections. Dans cet exemple il s'agit de chercher le nombre de centaines (ou de groupes de 100) puis de dizaines (ou groupes de 10) dans une collection totalement groupée de moins de mille éléments. Il est alors possible de déterminer l'écriture en chiffres de la quantité totale de la collection pour se ramener à T_{Nd}

[36] Il n'est pas possible d'utiliser la numération parlée pour effectuer ce type de comptage du fait de la limite instrumentale de cet ostensif pour les conversions.

[37] Une variante consiste à effectuer les conversions au fur et à mesure du comptage : un millier, un, deux, trois, …, dix centaines, deux milliers. Un, deux, trois, …, dix centaines, trois milliers. Un, deux, trois, quatre, cinq, cinq centaines. Un, deux, trois, trois unités. Donc trois milliers cinq centaines trois unités.

[38] Cette technologie est formulée dans certains manuels anciens (cf. Chambris 2008).

ou bien de chercher directement à partir de la collection. Par exemple pour le nombre de dizaines il s'agit de déterminer le nombre de dizaines « isolées » ainsi que le nombre de dizaines dans les centaines.

IV. 4 L'OM_{ord} : étude de la numération selon l'aspect ordinal du nombre

Nous ne décrivons pas cette OM locale mais indiquons seulement les types de tâches et technologies principalement en jeu.
Les types de tâches concernant l'aspect ordinal des nombres sont :
- comparer ($\mathbf{T_C}$) ou ranger (dans l'ordre croissant ou décroissant) des nombres ;
- avancer ou reculer ($\mathbf{T_{AR}}$) dans la suite écrite ou orale des nombres ;
- placer des nombres sur une droite graduée (ou réciproquement déterminer des nombres correspondant à une graduation) ;
- intercaler des nombres ou encadrer des nombres (entre deux dizaines, centaines, … consécutives) ;
- …

La suite écrite ainsi que la suite orale des nombres constituent les éléments technologiques essentiels. Pour les premiers apprentissages du nombre on trouve généralement des bandes numériques (ou tableaux de nombres jusqu'à 100 par exemple) dans les manuels et les classes en France qui sont utilisées comme des éléments technologiques. Mais le travail sur « avancer/reculer » dans la suite écrite permet de mettre en évidence un autre élément technologique : la construction algorithmique de la suite écrite des nombres (qui peut s'appuyer sur l'objet « compteur »). Le travail consiste à repérer des régularités dans cette suite et les passages d'un nombre au suivant. On entraîne aussi les élèves à réciter la suite numérique orale. Ainsi pour comparer deux nombres, une technique possible consiste à s'appuyer sur leur ordre dans la suite écrite (avec l'aide d'une bande numérique ou sur les principes de succession des nombres écrits en chiffres) ou bien dans la suite orale si le nom du premier nombre vient avant/après dans la suite orale il est plus petit/plus grand que le deuxième.
Les deux principes de la numération (position et décimalité) permettent eux aussi de justifier les techniques associées à ces types de tâches. Par exemple comparer 123 et 128 en considérant ces nombres comme des cardinaux et en regardant le nombre d'unités de chaque ordre. Ici le fait d'avoir 3 unités simples isolées dans 123 contre 8 unités simples isolées dans 128 permet de conclure (puisqu'il y a le même nombre total de dizaines).
Le type de tâches avancer/reculer permet de faire le lien entre les technologies des deux OM locales OM_{ord} et OM_{card} par le fait que prendre le successeur d'un nombre (aspect ordinal) revient à lui ajouter une unité simple (aspect cardinal) et réciproquement.
Du coup certaines techniques de l'OM_{ord} peuvent mettre en jeu le principe décimal, comme par exemple pour justifier l'algorithme consistant à avancer (ou reculer) dans la suite écrite. Pour l'illustrer, considérons l'exemple de l'avancée de 10 en 10. Il faut ajouter 1 au chiffre du deuxième rang à partir de la droite. Si le chiffre du deuxième rang est 9, alors on écrit 0 à ce rang et on ajoute 1 au rang immédiatement supérieur. Cette technique met bien en jeu le principe décimal pour sa justification (9 dizaines + 1 dizaine = 10 dizaines = 1 centaine). Mais elle peut aussi être justifiée par le compteur qui apparaît alors comme élément technologique mettant en évidence la construction algorithmique de la suite écrite, ce qui peut rendre transparentes les conversions entre unités (ici de dix dizaines en une centaine).

IV.5 Des raisons d'être possibles des conversions entre unités de numération

Nous avons déjà montré que les OM locales OM_{card} et OM_{ord} constituent des raisons d'être de l'OM locale OM_{trad}. Elles peuvent en particulier amener à faire des conversions entre unités sous certaines conditions.
Cette question des conversions étant centrale dans la problématique générale de la thèse, nous allons maintenant montrer d'autres raisons d'être possibles des conversions entre unités afin de montrer différentes utilisations possibles de ces conversions dans les mathématiques de l'école primaire (sans en faire une étude exhaustive).
Pour cela nous allons étudier les types de tâche de calcul posé, de calcul en ligne sur les puissances de dix, de conversions entre unités et nous tiendrons également compte des prolongements de l'étude de la numération pour les « grands nombres » et des nombres décimaux. Pour les techniques que nous décrirons, nous ne donnerons que les éléments technologiques relevant de la numération.

Le calcul posé pour les quatre opérations

Les techniques décrites ici sont celles usuellement utilisées en France.

<u>Technique de l'addition posée usuelle française</u>
Dans le cas de l'addition posée, quand on ajoute 345 à 593 (voir ci-contre), il est nécessaire d'aligner à partir de la droite les deux nombres pour avoir les nombres d'unités isolées de même ordre les uns sous les autres. On ajoute ces nombres en commençant par la droite (pour ne pas avoir à faire de rature).

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ 1 & 5 & 9 & 3 \\ + & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 9 & 3 & 8 \end{array}$$

Au rang des dizaines on ajoute 4 dizaines à 9 dizaines, on obtient 13 dizaines qu'il faut ensuite convertir en 1 centaine et 3 dizaines. Il y a donc une retenue au rang des centaines.
La numération intervient donc à un niveau technologique de justification de la technique : principe de position pour justifier l'alignement vertical des chiffres et principe décimal pour justifier les retenues (relation 10 dizaines = 1 centaine pour l'exemple proposé).
Dans le cas d'une addition ayant une retenue au rang le plus élevé, comme 512 + 834, alors la conversion se fait directement dans l'écriture du résultat. Pour cet exemple : 5 centaines + 8 centaines = 13 centaines, soit 1 millier et 3 centaines, on écrit donc 3 au rang des centaines et 1 au rang des milliers.

<u>Deux techniques de soustraction posée</u>
Nous allons présenter les deux techniques qui sont couramment utilisées en France, pour l'exemple de la soustraction de 392 à 527. Dans les deux cas on retrouve, comme pour l'addition, le principe de position dans la justification de l'alignement vertical des chiffres selon leur rang, à partir de la droite. Nous allons donc étudier l'utilisation des conversions en considérant en particulier le cas où la soustraction à un ordre donné n'est pas possible directement : ici au rang des dizaines.
Technique dite « par emprunt » : au rang des dizaines, on ne peut soustraire 9 dizaines de 2 dizaines, donc on convertit 1 centaine contre 10 dizaines (il est d'usage de dire que l'on « emprunte », d'où le nom de cette technique). Il est maintenant possible de soustraire 9 dizaines de 12 dizaines : cela fait 3 dizaines. Il reste alors 4 centaines, etc.

$$\begin{array}{rccc} & 4 & & \\ & \cancel{5} & 12 & 7 \\ - & 3 & 9 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

Technique traditionnelle française : au rang des dizaines, on ne peut soustraire 9 dizaines de 2 dizaines. On ajoute alors 10 dizaines aux 2 dizaines de 527. Pour ne pas modifier la différence il faut aussi ajouter 10 dizaines à 392 (propriété de conservation des écarts). Mais ces dizaines sont ajoutées en tant que centaine à 392 (10 dizaines = 1 centaine). On peut maintenant soustraire 9 dizaines de 12 dizaines : cela fait 3 dizaines. Il reste alors à soustraire 4 centaines de 5 centaines.

```
  5 12 7
– 3  9 2
  1
--------
  1  3 5
```

Les technologies de ces deux techniques relèvent du principe décimal : relation entre 10 unités d'un certain ordre et 1 unité d'ordre immédiatement supérieur pour la soustraction traditionnelle ou inversement pour la soustraction « par emprunt ». Les relations entre unités se jouent principalement pour deux unités d'ordres consécutifs[39].

<u>Technique de la multiplication posée usuelle française</u>

Pour la multiplication posée (usuelle française), nous allons commencer par regarder le cas de la multiplication par un nombre à un chiffre, comme par exemple 543 × 6.

La technique consiste en une multiplication du multiplicateur par chacun des nombres d'unités isolées du multiplicande. Pour l'exemple ci-contre, cela se justifie par une décomposition de 543 en 5 centaines + 4 dizaines + 3 unités à partir de laquelle on utilise la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

```
  5 4 3
×     6
-------
3 2 5 8
        6×3u = 18u = 1d+8u
   6×4d +1d = 25d = 2c +5d
6×5c + 2c = 32c = 3m + 2c
```

Cela fait alors intervenir les relations entre les unités au niveau des retenues (non écrites ici) comme on le voit dans les détails des calculs ci-contre.

On voit apparaître dans les étapes du calcul des conversions entre unités du type 25d = 2c + 5d. Contrairement aux additions et soustractions il est donc possible d'avoir des conversions avec plus de 10 unités d'un certain ordre en jeu.

Pour la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres, nous allons considérer l'exemple de 543 × 26. La technique s'appuie sur une décomposition de 26 (multiplicateur) en 2 dizaines + 6 unités (ce qui va amener encore à mettre en jeu la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

```
    5 4 3
×     2 6
---------
  3 2 5 8  ←  543 × 6 unités
1 0 8 6 0  ←  543 × 2 dizaines
---------
1 4 1 1 8  ←  543 × (6u + 2d)
```

On a alors 543 × 26 = 543 × (2 dizaines + 6 unités) = 543 × (2 dizaines) + 543 × (6 unités) = (543 × 2) dizaines + (543 × 6) unités[40]. On obtient donc deux multiplications par des nombres à un chiffre : 543 × 6 et 543 × 2 (dans cet ordre). On multiplie pour les dizaines comme pour les unités, c'est-à-dire en utilisant la technique de multiplication par un nombre à un chiffre.

Reste la question du « décalage » pour la deuxième multiplication : comme on a un nombre de dizaines, on décale l'écriture d'un rang vers la gauche, ce qui amène à écrire un 0 à droite de ce nombre. Il n'est pas nécessaire ici d'écrire ce zéro de décalage : l'alignement des chiffres en colonnes permet d'écrire directement le nombre « décalé ». Il est aussi possible d'écrire un point pour marquer ce décalage.

[39] Pour la soustraction par emprunt, s'il n'y a aucune unité isolée au rang immédiatement supérieur il faut « remonter » à un rang de plus (voire plus) pour pouvoir réaliser les conversions.

[40] Ici aussi une utilisation d'une décomposition du multiplicateur utilisant les puissances de dix peut amener à utiliser une décomposition du type : 543 × 26 = 543 × (20 + 6) = 543 × (2 × 10) + 543 × 6 = (543 × 2) × 10 + (543 × 6). La question du décalage devient alors une question de multiplication par 10. Le décalage peut alors être interprété comme une règle de calcul sans référence à la numération.

La justification à chaque pas du calcul fait donc intervenir des conversions d'unités en unités d'ordre immédiatement supérieur (avec une conversion pouvant aller jusqu'à 8 unités d'ordre immédiatement supérieur) et la justification générale du calcul s'appuie, elle, sur une conversion plus générale qui permet de justifier le décalage ou l'écriture éventuelle de zéros.

<u>Technique de la division posée usuelle française</u>
La numération est également en jeu pour la justification de la technique de la division posée (usuelle française) : pour les différentes étapes ainsi que pour la détermination du nombre de chiffres du quotient.
Par exemple dans la division de 1 234 par 5, on commence par faire la division de 12 centaines par 5. Cela fait appel au type de tâches nombre de (T_{Cnd}) qui amène à effectuer une troncature de façon à ce que l'on obtienne un nombre d'unités supérieur au diviseur. Ici on s'arrête au rang des centaines car 12>5. On effectue alors la division de 12 centaines par 5 : dans 12 centaines il y a 5 fois 2 centaines (et il reste 2 centaines). Le premier chiffre (à partir de la gauche[41]) du quotient de la division est donc un 2 au rang des centaines. Ce sera le chiffre de plus haut rang. Cela permet d'en déduire le nombre de chiffres du quotient : ici c'est donc un nombre à 3 chiffres[42].
Ensuite on poursuit l'algorithme en considérant le nombre d'unités d'ordre immédiatement inférieur restant au dividende. Cela se fait par juxtaposition du nombre de centaines du reste obtenu avec le nombre de dizaines isolées du dividende : 2 centaines + 3 dizaines = 23 dizaines[43]. On dit que l'on « abaisse » le 3 du diviseur. C'est le type de tâches de conversion entre unités (T_{Ceun}) qui est en jeu pour justifier cet « abaissement ».
Finalement pour diviser 1234 par 5, on utilise une décomposition de 1234 en 12 centaines + 3 dizaines + 4 unités. Voici comment nous pouvons écrire en ligne les différentes étapes du calcul (nous encadrons les chiffres du quotient obtenus successivement) :
12 centaines = 5× $\boxed{2}$ centaines + 2 centaines
2 centaines + 3 dizaines = 23 dizaines (car 1 centaine = 10 dizaines)
23 dizaines = 5 × $\boxed{4}$ dizaines + 3 dizaines
3 dizaines + 4 unités = 34 unités (car 1 dizaine = 10 unités)
34 unités = 5× $\boxed{6}$ unités + 4 unités

1 234	5
23	246
34	
4	

On obtient alors 1234 unités = 5 × (2 centaines + 4 dizaines + 6 unités) + 4 unités = 5 × 246 unités + 4 unités.

Le calcul sur les puissances de 10 (1, 10, 100, …)

Ce type de calcul peut être effectué à l'écrit en ligne (32x10=320) ou mentalement en appui sur l'oral (trente-deux fois dix est égal à trois-cent-vingt). Contrairement au calcul posé les techniques usuellement utilisées en France ne font pas toujours appel aux conversions entre

[41] Pour la division on obtient les chiffres du quotient à partir de la gauche, ce qui est différent des techniques précédentes.
[42] Une autre méthode pour la détermination du chiffre du quotient consiste à utiliser les ECPD pour faire un encadrement du dividende par des multiples du diviseur : ici 5 × 100 < 1 234 < 5 × 1 000. Le quotient possède alors 3 chiffres puisqu'il est compris entre 100 et 1 000. Dans ce cas on considère à la fois le dividende et le diviseur en termes de nombre d'unités simples, alors que dans la méthode présentée au-dessus on s'appuie sur une décomposition de ces nombres en différentes unités.
[43] Dans le cas de la division par un nombre à plusieurs chiffres il serait possible d'avoir un nombre de centaines ayant plusieurs chiffres.

unités puisqu'elles pourraient être interprétées comme des technologies de calcul, en raison notamment de l'utilisation des écritures avec les puissances de dix. Nous ne faisons pas une étude de ces techniques usuelles (qui pourrait se faire à partir de manuels) mais choisissons de nous centrer sur la possibilité d'utilisation des conversions dans des techniques de calcul en ligne sur les puissances de 10.

<u>Ajouter/soustraire des puissances de 10 ou des multiples[44] de puissances de 10</u>
A titre d'exemple nous allons regarder une technique possible pour l'addition de 100 à 1934 et pour celle de 900 à 1234 :

- ajouter 100 à 1934 revient à ajouter 1 centaine à 1934 (unités simples). On ajoute alors 1 à 19, ce qui donne 20 centaines, soit 2034 ;
- ajouter 900 à 1234 revient à ajouter 9 centaines à 1234 (unités simples). On ajoute alors 9 à 12, ce qui donne 21 centaines, soit 2134.

D'autres techniques existent. Celle que nous présentons ici présente l'avantage de se formuler de la même manière pour les cas avec ou sans passage à l'unité supérieure à un ordre : ajouter 100 à 1234 se fait aussi par ajout d'une centaine à 12 centaines et non par ajout d'une centaine à 2 centaines, ce qui amènerait à distinguer les deux cas (ajout de 1 centaine à 1224 et ajouter de 9 centaines à 1234).
La technique montrée ici amène à faire une troncature (donc déterminer le *nombre de* : T_{Cnd}) à l'ordre d'unités à ajouter (ou soustraire), puis ajouter (ou soustraire) le nombre d'unités et terminer en recomposant ($T_{Teun/ec}$) le nombre obtenu en tenant compte du nombre d'unités simples restantes.
La technologie sur laquelle s'appuie cette technique afin de faire appel aux types de tâches de numération est le lien entre les puissances de 10 et les unités de numération, comme par exemple : ajouter 100 revient à ajouter une centaine, ou ajouter 900 revient à ajouter 9 centaines.

<u>Multiplier par des puissances de 10</u>
La technique de multiplication usuelle par les puissances de 10 consiste à écrire un ou plusieurs 0 à droite de l'écriture du nombre (souvent appelée « règle des zéros »). A titre d'exemple considérons la multiplication de 123 par 10 : 123 × 10 s'écrit donc 1 230 en appliquant cette technique.
Dans la multiplication par 10, les unités deviennent des dizaines, les dizaines des centaines, etc. Dans la multiplication par 100, les unités deviennent des centaines, etc. Cela s'appuie donc sur le principe décimal de la numération.

<u>Diviser par des puissances de 10</u>
Une technique consiste à effectuer une troncature à l'ordre de la puissance de 10 pour déterminer le quotient puis à considérer le nombre d'unités simples restantes pour le reste. Cela revient au type de tâches de décomposition d'un nombre en une écriture en unités de numération non canonique ($T_{Tec/eun}$) qui lui-même fait appel au type de tâches nombre de (T_{Cnd}).
Par exemple, diviser 1234 par 10 peut se faire par la troncature de 1234 au rang des centaines, ce qui donne 123 pour le quotient et 4 pour le reste.
Dans la division par 10, les dizaines deviennent des unités, les centaines des dizaines, etc. Dans la multiplication par 100, les centaines deviennent des unités, etc. Cela s'appuie donc sur le principe décimal de la numération.

[44] Nous considérons les multiples des puissances de 10 de la forme n, n0, n00, … (n entier compris entre 1 et 9).

Les conversions entre unités du système métrique

Cet aspect est développé dans les travaux de Chambris (2008, 2012, 2013) qui fait le constat suivant :

> « Système métrique et numération semblent effectivement séparés dans l'enseignement actuel mais des leviers semblent exister pour que les deux enseignements se nourrissent mutuellement. Cela nécessite de faire des adaptations dans chacun des domaines de façon à ce que les tâches et les techniques qui s'y enseignent se ressemblent davantage » (2012, p.27).

En nous appuyant sur les résultats de Chambris, nous allons présenter ici brièvement comment construire cette articulation entre numération et système métrique, en regardant en particulier le rôle des conversions entre unités.
Le système métrique est un système décimal, comme notre système d'écriture des nombres. A partir d'une unité de référence (le mètre, le gramme, …) on définit les unités de 10 en 10 fois plus grandes (qui constituent les « multiples » de cette unité) par l'utilisation des préfixes *deca*, *hecto*, *kilo*... Ainsi 1 décamètre = 10 mètres, 1 hectomètre = 100 mètres, 1 kilomètre = 1000 mètres[45].
En associant ces préfixes aux unités de la numération (*deca* à dizaine, *hecto* à centaines et *kilo* à millier) on peut exprimer les relations entre ces unités comme pour les entiers : 1 décamètre = 1 dizaine de mètres, 1 hectomètre = 1 centaine de mètres, 1 kilomètre = 1 millier de mètres.
Ainsi pour convertir 5 kilogrammes en grammes (exemple proposé par Chambris 2012), on peut considérer que 5 kg c'est 5 milliers de g. Or 5 milliers = 5000 (car les milliers s'écrivent au 4ème rang à partir de la droite), donc 5 kg = 5 000 g. Dans le cas où plusieurs unités sont utilisées le principe est le même : pour convertir 5 kg 6 hg 3g en grammes, on peut réécrire le nombre de départ avec les unités de numération. 5 kg 6 hg 3g = 5 milliers de g 6 centaines de g et 3 g, donc 5 603 g. On peut aussi faire la conversion inverse selon le même principe. C'est alors la tâche de conversion entre unités de numération (T_{Ceun}) qui est mobilisée, avec pour l'exemple donné un cas particulier qui est la recomposition (ou la décomposition pour la tâche inverse).
Il est aussi possible de considérer les conversions pour lesquelles l'unité de référence n'est pas en jeu, comme par exemple convertir 5 kg en hg. En procédant de la même manière, il est possible de se ramener à la conversion de 5 milliers en centaines : comme 5 milliers = 50 centaines, 5 kg = 50 hg.
L'élément technologique qui permet de faire le lien avec la numération est le lien décrit ci-dessus entre les unités du système métrique et les unités de numération (facilité par l'utilisation des mêmes préfixes que ce soit pour des mètres, grammes ou litres).
Mais il est aussi possible de considérer une autre unité que le mètre, par exemple, comme unité simple. C'est d'ailleurs essentiel, tant que les élèves ne connaissent pas les nombres décimaux. Cela s'appuie sur la technologie des relations entre les différentes unités du système métrique homologue à celle des unités de numération. Par exemple en considérant le mm comme unité de référence, alors le cm est la dizaine de mm, le dm est la centaine de mm, le m est le millier de mm, etc. Ainsi pour convertir 5m 3cm on peut écrire 5 milliers de

[45] On définit de la même manière les sous-multiples de l'unité de référence, de 10 en 10 fois plus petites en utilisant les préfixes déci, centi, milli.

mm 3 dizaines de mm, ce qui donne 503 dizaines de mm ou 5030 mm (T_{Ceun}). Le principe est le même pour la conversion inverse.
Dans les praxéologies de l'école primaire, Chambris fait remarquer que :

> « Depuis le début des années 70, les tâches du type : convertir 30 centaines en milliers n'existent pas en numération des entiers en primaire en France. En revanche, leur équivalent existe en système métrique : convertir 30 hm en km. Ces tâches existaient en numération avant la réforme » (p.10).

Leur réintroduction dans une organisation mathématique locale de la numération pourrait ainsi permettre une articulation entre les conversions en système métrique et en numération.

Des raisons d'être dans les prolongements de la numération

<u>L'étude des grands nombres</u>
Comme cela a été montré dans la construction itérative des savoirs de la numération, une fois les principes de numération définis pour les nombres jusqu'à 9 999, on définit une nouvelle unité, avec la spécificité que cette nouvelle unité n'a pas de nom spécifique comme les unités d'ordres précédents : c'est la dizaine de milliers. Il en est de même pour la centaine de milliers. Cela est lié au principe des classes, utile pour la lecture des « grands nombres ».
Les classes amènent à faire des décompositions non canoniques, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir un nombre au plus égal à neuf pour chaque ordre d'unité. Le type de tâches de décomposition ($T_{Teun/ec}$ et $T_{Tec/eun}$) est alors réinvesti pour ces grands nombres pour produire des écritures selon les classes permettant de nommer ces nombres.
Déterminer le nom d'un grand nombre comme 123056 amène à en faire une décomposition selon les classes (par troncature au rang du millier) : 123 milliers 56 unités. C'est $T_{Tec/eun}$ qui est donc réinvesti ici (avec une généralisation de la troncature). Il reste ensuite à lire les nombres à l'intérieur de chaque classe, en faisant suivre le nom du nombre de la classe des milliers par « mille ». Pour l'exemple donné : « cent-vingt-trois-mille-quatre-cent-cinquante-six ».
Écrire en chiffres un grand nombre comme « cent-vingt-trois-mille-quatre-cent-cinquante-six » peut se faire par la technique inverse, ce qui met donc en jeu $T_{Teun/ec}$ (recomposition à partir d'une écriture en unités de numération non canonique) pour passer de 123 milliers 56 unités à 123 056.
Dans les deux cas, les traductions d'écritures en unités de numération en écriture en chiffres mettent donc bien en jeu des conversions en unités afin de produire des décompositions selon les classes.

<u>L'étude des nombres décimaux</u>
L'écriture à virgule des nombres décimaux s'appuie sur une extension des principes de l'écriture en chiffres des nombres entiers (et sur des technologies liées aux fractions). La virgule permet de marquer le rang des unités simples. Une unité d'un certain ordre est égale à dix unités de l'ordre immédiatement inférieur. Ainsi 1 unité simple = 10 dixièmes, 1 dixième = 10 centièmes, etc.
Ce sont en particulier les possibilités d'extension des algorithmes de calcul posé sur les nombres entiers qui fournissent une raison d'être de l'écriture décimale et vont amener à utiliser et étendre la praxéologie construite autour des nombres entiers et du calcul sur ces nombres.

L'extension des règles d'écritures des entiers au cas des nombres décimaux permet de plonger ces règles dans l'ensemble des règles d'écritures des nombres décimaux : l'écriture des nombres entiers apparaît alors comme le cas particulier où l'absence d'unités d'ordre inférieur à l'unité simple amène à ne pas utiliser la virgule. Cette reconstruction ne peut se faire qu'après coup puisque les entiers sont étudiés avant les décimaux. Cependant cela peut amener à questionner, dans la praxéologie de l'étude des entiers, des techniques ou des formulations de techniques (technologies) qui permettront plus ou moins facilement cette extension au cas des nombres décimaux.

C'est le cas par exemple de la technique de multiplication par des puissances de dix. La formulation usuellement utilisée en France de la technique consiste à dire que l'on écrit un ou plusieurs zéro(s) à droite de l'écriture, ce qui pose des problèmes lors de sa généralisation au cas des nombres décimaux. Pour la multiplication de 1,23 par 10 par exemple, elle peut amener des élèves à écrire 1,230 ou 10,23 ou encore 10,230. Il faut revenir à la raison de cette juxtaposition de zéros : quand on multiplie par 10, les unités deviennent des dizaines, les dizaines des centaines, etc. Cela entraîne un décalage des chiffres d'un rang vers la gauche. Cela résiste à l'extension aux nombres décimaux : dans la multiplication par 10, la valeur de chaque unité est multipliée par 10, ce qui revient à décaler tous les chiffres d'un rang vers la gauche. Cela peut se traduire par un décalage de la virgule (éventuel) d'un rang ou l'écriture d'un 0 à droite.

Pour la comparaison des nombres décimaux, Chambris[46] montre qu'une technique usuelle en France consiste à utiliser deux techniques : comparer les parties entières comme des entiers[47] puis, si elles sont égales, comparer les parties décimales chiffre à chiffre. Finalement, « les élèves doivent donc apprendre non seulement la technique de comparaison des décimaux et aussi que la technique qu'on leur a enseignée pour comparer les entiers ne fonctionne pas avec les décimaux (qui ressemblent pourtant beaucoup aux entiers !) ». Elle formule une technique alternative :

> « On compare les unités des chiffres significatifs les plus gros. Si elles sont différentes, celui qui a la plus grosse est le plus grand. Si elles sont égales, on compare le nombre de ces unités, celui qui a le plus grand nombre est le plus grand. S'ils sont égaux, on compare les unités représentées immédiatement inférieures. Cette technique passe « la barrière » de la virgule » (Chambris, *id*).

Pour les nombres décimaux, les conversions entre unités se font entre les unités d'ordres supérieurs et/ou d'ordres inférieurs aux unités simples. Par exemple 1 centaine = 1 millier de dixièmes. Le calcul posé sur les décimaux s'appuyant sur les techniques de calcul posé sur les entiers, les conversions y sont également en jeu. Il en est de même pour le calcul en ligne sur les puissances de dix et bien sûr pour le lien avec les conversions entre unités du système métrique pour lesquelles il y a correspondance entre les sous-multiples de l'unité de référence (mètre, gramme, litre) et les unités d'ordres inférieurs aux unités simples (dixièmes, centièmes, …).

---

[46] Présentation au séminaire du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR), Université de Paris 7, le 29/03/2013 dont on peut trouver un complément en ligne (consulté le 09/04/2013) : http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/sites/default/files/complementEMF2012.pdf

[47] Dans ce même document on peut lire une description de la technique de comparaison pour les entiers : « La technique […] (dominante en France) pour comparer les entiers […] consiste donc à comparer les longueurs des nombres, puis, en cas d'égalité, à comparer les chiffres successivement en partant de la gauche. Cette technique ne fonctionne pas pour les décimaux » (Chambris).

Conclusion

L'objectif de ce chapitre était la recherche d'une OM de référence (étude des ostensifs, types de tâches, techniques, … ainsi que la recherche d'une situation fondamentale), devant permettre ensuite de faire un état des lieux de l'enseignement de la numération (en CE2) et la proposition d'un processus d'enseignement de la numération.

La progression générale des savoirs de numération à l'école primaire est itérative (nombres jusqu'à 100 en CP, nombres jusqu'à 1000 en CE1, etc.). La théorie classique apparaît alors comme la plus adaptée pour la description de ces savoirs. Cette description s'appuie sur l'ostensif unités de numération, qui présente l'intérêt de besoins trophiques adaptés à l'école primaire ainsi qu'une valence instrumentale pour les conversions (Chambris 2008). La construction itérative met en évidence la régularité du principe de position θ_P (une unité s'écrit au rang situé immédiatement à gauche du rang de l'unité d'ordre inférieur) et du principe décimal θ_D (une unité est égale à dix unités de l'ordre immédiatement inférieur), avec une complexification croissante des relations entre unités (par exemple un millier = dix centaines = cent dizaines = mille unités).

Notre situation fondamentale (SF) de la numération est une adaptation de celle du nombre de Brousseau (1995) tenant compte des savoirs de la numération pour des nombres supérieurs à cent. À partir du jeu 0 de cette situation, la prise en compte de deux conditions sur le milieu (taille de la collection et écriture en chiffres imposée) et d'une variable didactique essentielle (l'organisation de la collection) a permis la construction des jeux 1 et 2 de notre SF. Mais il est aussi nécessaire de considérer des jeux 3 et 4 pour lesquels les collections ne sont plus présentes et qui consistent alors en des traductions de désignations de quantités (nous avons choisi la traduction entre écriture en chiffres et écriture en unités de numération et inversement). Cela permet de rendre nécessaire le recours au conversions entre unités. Nous obtenons alors le schéma récapitulatif suivant :

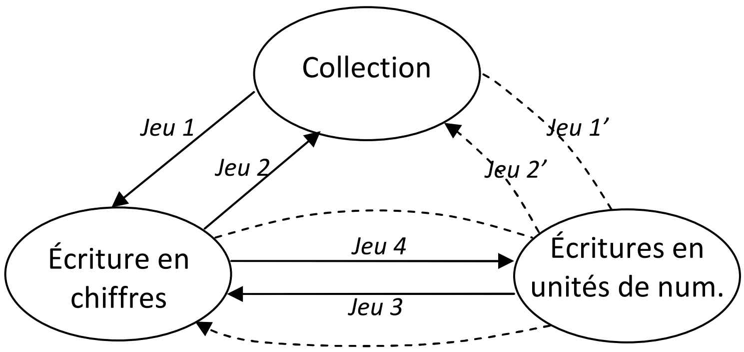


Figure 16 : schéma des différents jeux de la SF

Cette SF de la numération et l'analyse de l'enseignement de la numération au siècle dernier réalisée par Chambris (2008) sont des points d'appui pour la construction d'une OM de référence. L'OM régionale de l'étude des nombres entiers peut se découper selon trois OM locales : OM_{trad} concernant les types de tâche de traductions d'écritures (mettant en jeu une écriture en chiffres), OM_{card} et OM_{ord} concernant des types de tâche mettant en jeu le nombre sous ses aspects cardinal et ordinal et constituant des raisons d'être de la première OM locale.

L'OM_{trad} se compose de traductions canoniques mettant principalement en jeu le principe de position et de conversions entre unités s'appuyant sur le principe décimal. Ce découpage permet de mieux pointer le lien entre les types de tâches et les savoirs de la numération principalement travaillés (principe de position et principe décimal). Les traductions non

canoniques d'écritures permettent de mettre en jeu à la fois la position des unités et les conversions entre unités et permettent ainsi l'articulation de ces deux pôles de l'OM_{trad}. On peut alors parler de type de tâches complexe. La technique de juxtaposition permettant de traiter ce type de tâches s'appuie sur trois conditions : respect du rang de chaque unité dans l'EC ($\theta_{CondRang}$), présence de chaque unité jusqu'à l'unité de plus grand ordre dans l'EC ($\theta_{CondUnité}$), présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'EC ($\theta_{CondChiffre}$).
Une rapide étude de raisons d'être des types de tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération, en dehors du secteur de la numération, met en évidence l'implication des conversions entre unités dans de nombreux types de tâches relevant du calcul (posé ou en ligne, notamment sur les puissances de 10) et des conversions entre unités du système métrique. Pour le calcul posé, les conversions sont motivées par des besoins technologiques de justification de certaines étapes du calcul, par exemple la retenue pour l'addition et la soustraction. Les conversions en jeu dans la soustraction et dans l'addition de deux nombres se limitent à au plus dix unités à convertir en une unité de l'ordre immédiatement supérieur, alors que pour les multiplications on rencontre des conversions jusqu'à 80 unités. Dans ces techniques ce sont principalement des conversions entre unités d'ordres consécutifs qui sont en jeu (hormis pour la soustraction avec emprunt et la division où des relations entre unités d'ordres non consécutifs peuvent être en jeu). En particulier ce ne sont pas les relations entre chaque unité et les unités simples. Cela est lié au fait que l'on traite les chiffres les uns après les autres sans revenir systématiquement aux unités simples. C'est donc une interprétation de l'écriture chiffrée comme composée de différentes unités et non comme un nombre d'unités simples qui est mobilisée. Pour la technique de division, le traitement des chiffres se fait dans l'autre sens (de la gauche vers la droite). Cela fait appel au type de tâches *nombre de* pour effectuer une troncature permettant d'effectuer le premier pas de la division.
Les conversions sont aussi en jeu lors du travail sur les « grands nombres » pour produire des décompositions selon les classes, ce qui permet de passer du nom du nombre à son écriture en chiffres.
Nous allons maintenant passer à notre état des lieux de l'enseignement de la numération (partie I).

Partie I

Un regard sur l’enseignement ordinaire

de la numération décimale de position à

l’école primaire

Notre objectif, dans cette partie, est d'esquisser un état des lieux de l'enseignement de la numération à la fois du côté des manuels et programmes officiels actuels mais aussi des pratiques effectives des enseignants en classe et des apprentissages des élèves.
Le volet « apprentissage des élèves » a une place un peu à part du fait qu'il s'agit de faire un état des lieux de certaines connaissances avant l'apprentissage des nombres à quatre chiffres (après les « révisions » de numération de début d'année de CE2), alors que pour le reste nous nous intéresserons uniquement au travail sur les nombres à quatre chiffres.
Le premier chapitre a mis en évidence l'importance des conversions entre unités pour travailler l'aspect décimal de la numération. Chambris (2008) a montré que le type de tâche de « conversion » (par exemple : « combien y-t-il de centaines dans 30 dizaines ? ») a disparu à partir des années 1980 environ, remplacé en partie par le type de tâche *nombre de*, qui en est un cas particulier. Cela s'accompagne dans des manuels récents d'un retour des unités de numération (Chambris 2008).
De premières questions consistent donc à se demander ce qu'il en est dans les manuels étudiés et dans les programmes récents : peut-on constater l'absence de conversions entre unités ou bien y'a-t-il un retour de ce type de tâche ? Quelle est effectivement la place accordée au type de tâche *nombre de* ? Apparaît-il comme un cas particulier de conversion ou bien comme un type de tâche isolé ? Et dans les classes, comment se traduisent les constats de l'OM à enseigner sur les choix de types de tâches proposés par les enseignants ?
Notre OM de référence a permis de constater que le principe décimal est aussi en jeu dans d'autres types de tâche de numération, qui peuvent relever de l'aspect cardinal ou ordinal du nombre ou bien des traductions d'écritures. Par exemple, lorsque les traductions d'écritures sont non canoniques, des conversions entre unités peuvent être en jeu : décomposer 1250 en milliers et dizaines ou encore traduire 3m 12c 5u en EC. Il apparaît donc nécessaire d'élargir nos questions en étudiant comment les conversions sont susceptibles d'être en jeu dans le travail proposé dans les manuels étudiés ou dans les objectifs annoncés par les programmes et les conséquences possibles sur les choix des enseignants. Nous essaierons alors de cibler notre étude sur certains types de tâches. L'étude des manuels et l'analyse des séances de classes doivent permettre d'aller plus loin en regardant les choix de certaines valeurs des variables didactiques dans les tâches proposées car l'OM de référence nous a montré l'importance de certaines de ces variables pour la mise en jeu de conversions (organisation de la collection pour le dénombrement, taille des nombres d'unités de chaque ordre pour les recompositions, etc.). Les unités de numération sont-elles utilisées dans les énoncés ? Dans les techniques et éléments technologiques proposés ? Ces questions peuvent être regardées en lien avec la prise en compte des OM locales de l'OM de référence. Par exemple, est-ce que le dénombrement est un point de départ pour le travail autour des groupements successifs avant les conversions entre unités ? Rappelons que pour limiter notre étude nous ne regardons pas tout ce qui touche à l'aspect ordinal du nombre.
Quand les conversions sont potentiellement en jeu, on peut se demander si le travail proposé permet d'aboutir à l'institutionnalisation d'une technique de conversion voire du principe décimal de la numération. Nous regarderons donc également comment apparaît ce savoir dans les programmes et les manuels choisis. Est-il formulé ? Si oui, comment ? Dans les classes, ce sera la question de l'institutionnalisation de ce savoir qui sera alors étudiée.
Comme il est essentiel s'approprier ce savoir étroitement en lien avec le principe de position pour permettre la compréhension de l'écriture en chiffres, nous regarderons également comment est pris en compte le principe de position et comment se fait l'éventuelle

articulation de ces savoirs dans les programmes, manuels ainsi que dans les classes observées.
Le plan de cette première partie s'appuie sur la méthodologie d'étude de la transposition didactique et en particulier sur le fait que « l'analyse de tout problème didactique doit prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique ». Nous réalisons donc notre esquisse de l'état des lieux de l'enseignement de la numération à l'école primaire par une étude de certaines difficultés des élèves (chapitre 2) sur les nombres inférieurs à mille, en début de CE2, et nous poursuivons avec une étude des programmes et manuels (chapitre 3) et de séances de classe des trois enseignants (chapitre 4) autour des questions posées ci-dessus (pour les nombres à quatre chiffres).

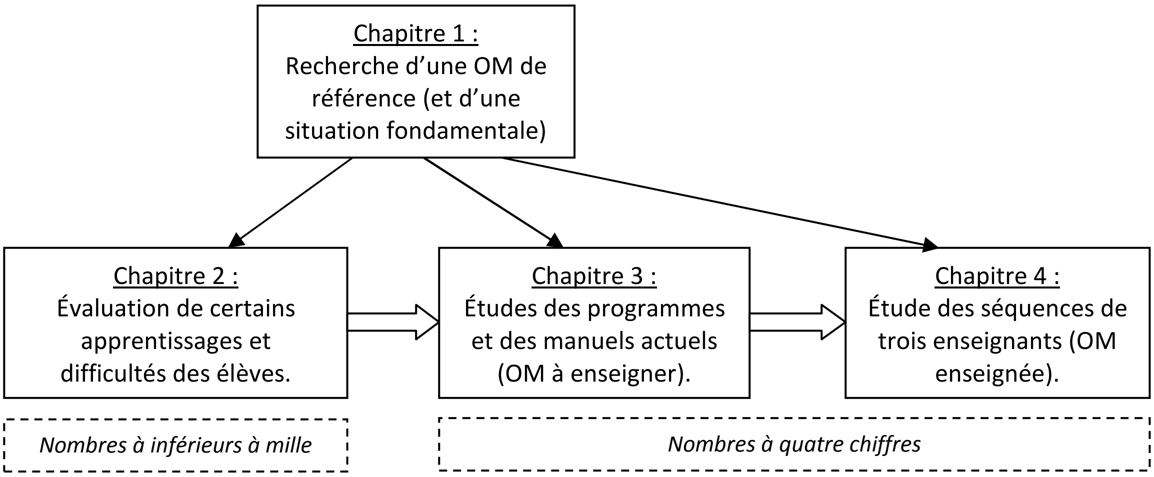


Figure 17 : schéma général de l'état des lieux de l'enseignement de la numération de la partie I

Voici le sommaire de la partie I :

Chapitre 2

Du côté des élèves

L'objectif de ce chapitre est de faire un point sur les principales difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération, en particulier dans la prise en compte du principe décimal de la numération.
Dans un premier temps, nous commencerons par une revue de travaux de recherche français et internationaux traitant cette question. Nous n'avons pas trouvé d'étude portant sur les nombres à quatre chiffres. Nous ferons donc un point sur les études portant sur les nombres inférieurs à cent d'une part et inférieurs à mille d'autre part.
Dans un deuxième temps, nous chercherons à déterminer ce qu'il en est actuellement, dans le contexte de l'enseignement de la numération en France, en CE2, après deux années de travail sur notre système de numération, sur les nombres à 2 chiffres d'abord (CP) puis à trois chiffres (CE1). Nous étudierons alors les résultats d'élèves de CE2 à une évaluation sur les nombres à trois chiffres donnée en début d'année. Cela pourra permettre de confirmer ou non certaines difficultés déjà pointées dans les recherches et peut-être d'en identifier de nouvelles. Nous chercherons en particulier à mettre en relation ces connaissances avec certains types de tâches de numération de l'OM de référence (et certaines variables didactiques).

I. La prise en compte du principe décimal de la numération : une difficulté déjà repérée dans des recherches

De nombreuses recherches internationales pointent des difficultés d'élèves dans l'apprentissage de la numération pour les nombres inférieurs à 100. Certaines[48], citées par Thompson et Bramald (2002), mettent en évidence des difficultés des élèves pour une tâche nommée « face value task[49] » dans laquelle est évaluée la capacité des élèves à associer une collection en vrac à une écriture chiffrée et à interpréter le chiffre de dizaines en termes de groupements par dix des éléments de la collection. Voici un tableau récapitulatif des pourcentages de réussite obtenus à cette tâche :

Classe (équivalent France)	**% Ross (USA)**	**% Kamii (USA)**	**% Price (AUS)**
CP		0	
CE1	20		44
CE2	33	33	
CM1	53	50	
CM2	67		

Figure 18 : tableau récapitulatif des résultats des élèves pour « face value task » dans différentes recherches, Thompson et Bramald (2002)

On peut par exemple s'étonner de voir que seulement la moitié des élèves de 9/10 ans interrogés par Ross ou Kamii et Joseph réussissent à faire le lien entre le chiffre des dizaines et une quantité d'objets, sachant que par exemple en France à cet âge-là les enfants ont à étudier les nombres jusqu'au milliard (dans les programmes 2008).

Van de Walle (2008), en appui sur des recherches antérieures[50], expose différents niveaux de compréhension pour la numération positionnelle. Les niveaux intermédiaires témoignent d'une compréhension partielle pour laquelle les élèves peuvent identifier la dizaine uniquement à une position (à gauche puisque ce sont des nombres à deux chiffres), sans l'associer à une quantité ou encore l'associent à une quantité uniquement d'unités simples (dans une collection de 36 éléments le 3 réfère à 30 éléments et non 3 dizaines d'éléments).

Comme le soulignent Fosnot et Dolk (2001) il y a un important changement conceptuel pour les élèves lorsqu'ils doivent considérer que dix objets forment une nouvelle unité (idée d'« unitizing ») :

> « Unitizing underlies the understanding of place value; ten objects become one ten. Unitizing requires that children use number to count not only objects but also groups—and to count them both simultaneously. The whole is thus seen as a group of a number of

[48] Ross, S. (1989). Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 47-51.
Kamii, C. and Joseph, L. (1988). Teaching place value and double column addition. *Arithmetic Teacher*, 48-52.
Price, P. (1998). Year 3 students' place-value misconceptions: another look at MAB, *Teaching mathematics in new times* (Vol. 2). Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 452-459.

[49] Cette tâche consiste à :

- faire nommer un nombre à deux chiffres à l'élève,
- faire constituer une collection à partir de ce nombre,
- entourer le chiffre des unités devant l'élève et lui demander de montrer avec les objets de la collection ce que signifie cette partie du nombre,
- faire de même avec le chiffre des dizaines.

[50] Ross, S. (1989). Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 47-51.

> objects. The parts together become the new whole, and the parts (the objects in the group) and the whole (the group) can be considered simultaneously » (p.11).

Cette question est bien sûr centrale pour l'apprentissage de la numération des nombres inférieurs à cent, pour la construction de la dizaine. Pour les nombres plus grands, ce qui nous intéresse est la question de l'extension de la compréhension de cette idée d'unité aux centaines, milliers ..., des relations entre ces unités et de l'articulation avec les rangs de l'écriture en chiffres. Sinclair, Tièche-Christinat et Garin (1994) concluent de leur étude auprès d'enfants de 5 à 7 ans (en Suisse) que même s'il est vrai que dans le domaine arithmétique les enfants se construisent des propriétés sur des petits nombres qu'ils étendent ensuite progressivement aux nombres plus grands, en revanche, « en ce qui concerne la compréhension du système écrit », ils ne font pas ce constat :

> « Il n'est pas vrai que le jeune enfant (5-7 ans) construit des intuitions (ou même une compréhension) de la signification différente des chiffres dans les nombres écrits représentant des petits nombres (dizaines) pour ensuite étendre cette compréhension à des nombres progressivement plus grands. L'enfant dispose d'un répertoire varié de conduites face à ce matériel graphique particulier et les diverses procédures qu'il utilise dépendent du type de nombres présentés » (p.248).

Nous allons, maintenant, faire le point sur ce que nous apprennent les recherches qui se sont penchées sur les nombres à trois chiffres et plus. On peut, tout d'abord, observer des difficultés du même ordre que pour les nombres à deux chiffres, liées au traitement des chiffres de l'EC sans prise en compte de leur valeur. C'est par exemple ce que relèvent Bednarz et Janvier (1984) dans une recherche québécoise de cinq années sur la numération de position au primaire[51] :

> « [l'élève] interprète l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position sans donner à la position une signification véritable en termes de groupements. On dicte à l'enfant beaucoup de règles ou de procédures qu'il apprend et applique, le plus souvent, mécaniquement. En conséquence, lorsque l'enfant rencontre [une difficulté], il est complètement démuni et n'a aucun recours (dessin, matériel, situation significative analogue …) autre que l'écriture. Il n'essaie pas de donner un sens à ce à quoi il est confronté mais cherche plutôt à retrouver la règle oubliée ou la faille dans la procédure qu'il applique. Ceci nous révèle le peu de compréhension de la numération » (p.30).

Ainsi pour une partie des élèves évalués, « un nombre est une suite de chiffres ». Il n'y a « aucune prise en considération des mots centaines, dizaines, unités (41% en 3e année, 35% en 4e année) ». Ces élèves :

> « travaillent exclusivement avec les chiffres des étiquettes sans s'occuper des mots qui y sont écrits. Ils proposent 445 en alignant les étiquettes 4 unités, 4 dizaines, 5 unités. Ils regardent avant tout 4, 4, 5 » (p.9).

Pour d'autres, « les mots centaines, dizaines, unités sont associés à un découpage, à un ordre dans l'écriture (30% en 3e année, 21% en 4e année). » Par exemple, certains élèves, pour faire 445 à partir des étiquettes, « prendront 4 dizaines, 5 unités et chercheront à tout prix 4 centaines ».

[51] Il est à noter que certaines des propositions qu'elles ont faites par la suite pour la classe (Bednarz et Janvier, 1984) ont servi de point d'appui pour certaines situations proposées dans le manuel ERMEL (1995) que nous étudierons au chapitre suivant.

On retrouve ce type de difficulté dans l'étude de DeBlois (1996) portant sur six enfants en « difficulté d'apprentissage » âgés de 8 à 11 ans, dans une tâche de traduction d'une EUN en EC (traduire 14 dizaines et 6 unités en EC) où

> « les enfants expliquent alors qu'ils « collent » 4 et 6, les dizaines à côté des unités. Ils peuvent aussi « coller », comme ils disent, 4 centaines, 4 dizaines et 5 unités pour construire le nombre 445 ou des zéros pour former le nombre 5 100 avec la quantité 51 centaines ». (p.86)

Ces réussites apparentes ne résistent pas quand la chercheuse leur propose 12 unités et 2 unités ou 4 dizaines et 5 dizaines. De telles juxtapositions de nombres sont également utilisées dans l'écriture d'un nombre dicté : par exemple « le nombre 6 332 entendu, en ne retenant pour ce nombre, que le 6, le 3 et le 32. Le nombre 6 332 est écrit sans tenir compte des termes ''mille'' et ''cent'' » (p.86). Mais là encore cette réussite apparente ne résiste pas à l'écriture de nombres comme cinq-mille-soixante-quatre pour lequel on n'entend plus « cent », ce qui nécessite d'écrire un zéro qui ne s'entend pas non plus. DeBlois (1996) conclut que, pour ces élèves, « les chiffres semblent être utilisés comme des objets ou comme des unités, sans relation avec les unités de mesure de quantités qu'ils représentent ».

Toujours selon DeBlois (1996), d'autres élèves attribuent une position à chaque chiffre et le zéro est alors considéré comme « un chiffre qui représente ''aucun de quelque chose'' qui est groupé ailleurs ». Cela leur permet de dire que 41 dizaines = 410 par écriture d'un zéro à droite mais ne leur permet pas de « vérifier la solution apportée autrement qu'en demandant à l'adulte ». Nous interprétons cela comme une difficulté liée à la coordination des deux principes de la numération : les conversions ne sont pas disponibles pour convertir 41 dizaines en 4 centaines et 1 dizaine (qui aurait pu fournir un moyen de contrôle de la réponse).

Même si des élèves ne mobilisent pas les conversions entre unités ils peuvent toutefois être capables de réaliser des groupements par dix en contexte, lors du dénombrement de collections (Thomas[52] 2004). Ils peuvent aussi reconnaître l'équivalence entre des quantités organisées différemment (DeBlois 1996), même si cela n'est pas suffisant pour permettre des conversions entre unités (non n'exprimé avec ce terme), mêmes consécutives. Les manifestations de conversions restent alors étroitement liées aux actions réalisées avec un matériel et aux relations de base (1 dizaine = 10 unités), ce qui ne permet pas aux élèves de « généraliser cette relation d'égalité entre plusieurs unités de mesure de quantités (3 dizaines = 30 unités ou 8 dizaines = 80 unités) » (DeBlois 1996, p.90).

Le pourcentage des élèves qui manifestent une compréhension des relations entre unités en lien avec l'EC et qui sont, par exemple, capables de convertir 40 dizaines en 4 centaines, correspond à 27% en 3^e^ année, 44% en 4^e^ année des élèves interrogés par Bednarz et Janvier (1984).

Enfin, une autre difficulté pour les nombres supérieurs à cent concerne l'itération des groupements. Par exemple Bednarz et Janvier (1984) mettent également en évidence des difficultés liées à opérer sur deux groupements successifs. Dans une situation où avec dix « sous » on fabrique un « rouleau » puis avec 10 « rouleaux » une « brique », et on leur demande si avec 1 091 ils en auraient assez pour faire une « brique »,

[52] Etude portant sur 132 élèves de 1ère primaire à 6ème primaire (équivalent du CP à la sixième en France), en Australie.

> « Beaucoup d'enfants ne peuvent rien faire, ou bien ils ne savent pas et ne répondent rien, ou ils répondent au hasard, ou encore ils travaillent juste sur des chiffres 1, 0, 9, 1 pour fournir une réponse (54% en 3e année, 35% en 4e année) » (p.20)

Pour d'autres élèves ces chercheuses observent une difficulté dans la coordination des deux groupements, avec des confusions à un moment donné de leur raisonnement entre ces deux groupements.

Selon Thomas (2004) les élèves auraient de grandes difficultés à comprendre les relations entre les différentes unités et la nature itérative de ces relations : « très peu d'enfants sont capables de généraliser la structure multiplicative du système », même s'ils sont capables d'utiliser les groupements (pour un dénombrement par exemple).

Dans le contexte de l'enseignement de la numération en France, les évaluations nationales de 2002 organisées par le ministère de l'éducation et de la recherche (direction de l'évaluation et de la prospective) et proposées à tous les élèves entrant en classe de 6ème (11/12 ans) contiennent deux exercices portant sur la connaissance de la numération des nombres entiers, dont nous indiquons les pourcentages de réussite :

- écrire en chiffres « cent vingt-trois plus deux dizaines » : 73,8% de réussite,
- compléter : « 25 dizaines = … unités » : 47,7% de réussite.

Le premier met en jeu la connaissance de la position des dizaines dans l'EC. Le deuxième met en jeu une conversion de dizaines en unités et peut être traité par une multiplication par 10 avec la règle des zéros. Pourtant il est réussi par moins de la moitié des élèves. Cela témoigne de difficultés persistantes pour l'apprentissage de la numération des entiers même pour des élèves de cet âge ayant appris le fonctionnement des nombres décimaux. Nous n'avons pas trouvé d'exercices de ce type dans les évaluations ultérieures.

Toujours en France, deux travaux de recherches plus récents apportent des éclairages sur certaines difficultés rencontrées par les élèves pour le type de tâches *nombre de*, qui met en jeu les deux principes de la numération. Elles mettent en avant des difficultés liées à une interprétation uniquement en termes de position, comme celles relevées dans les études précédentes.

Parouty (2005) dresse un « état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 » en France. Sur un échantillon important d'élèves de cycle 3 (421 élèves de CE2, CM1, CM2), elle observe les difficultés rencontrées sur certaines tâches. Elle propose l'exercice suivant : « pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? ». Elle constate un échec massif des élèves en CE2 (moins de 10% de réussite). La taille du nombre de carreaux rend difficile l'utilisation de techniques s'appuyant sur un dessin (avec un comptage ou des groupements). C'est donc la technique de troncature ou des essais de multiplication par 100 qui peuvent ici être attendus. Même si une partie des erreurs des élèves peut provenir du fait d'avoir à prendre un paquet de plus pour avoir le nombre de carreaux demandé, on peut penser que la numération n'est pas un outil disponible au CE2 pour résoudre de tels problèmes.

Elle montre également que pour les enseignants des élèves évalués cette situation est considérée comme difficile par plus de 85% d'entre eux. Elle ajoute :

> « Dubitative, j'ai posé la même question aux enseignants en formation, dans le cadre de mon protocole expérimental. A l'unanimité, tous les enseignants […] ont répondu soit qu'il s'agissait d'une résolution de problème, soit, à l'écrasante majorité, qu'il s'agissait d'une situation d'apprentissage de la division et d'ajouter que c'était impossible de demander cela à des CE2 » (p.41).

Cette non reconnaissance, par les enseignants, de ce problème comme relevant de connaissances de numération semble pouvoir expliquer en grande partie les résultats obtenus par les élèves. Elle pourrait témoigner également du manque de visibilité de ce type de tâches dans les programmes et manuels, notamment dans des problèmes contextualisés. Cela pourra éventuellement être confirmé par l'étude de l'OM à enseigner.
Chambris (2008) dans sa thèse a étudié la réussite à un exercice de *nombre de* hors contexte. L'exercice a été proposé à 251 élèves de CM2. Il est extrait d'un questionnaire plus général portant sur des connaissances liées à la numération et au système métrique :

Complète chacune des lignes : Le **chiffre des dizaines** de 6529 est ……….. Le **nombre de centaines** de 8734 est ………

Figure 19 : Exercice proposé par Chambris (2008)

Pour le chiffre des dizaines, 76,1% des élèves donnent une réponse correcte. 8,4% répondent par 20 ou 29 et 8,7% par un autre chiffre que celui des dizaines. Pour le nombre de centaines, 21,1% répondent correctement et 46,2% proposent le chiffre des centaines. Enfin 22,7% donnent comme réponse 700 ou 734.
Cela permet de remarquer que la difficulté rencontrée pour les élèves se situe dans ce qu'il est d'usage d'appeler la « différence entre chiffre et nombre » et qui est lié à un découpage de l'écriture chiffrée vu uniquement à travers les valeurs de chacun des chiffres. Cela entre en résonnance avec les difficultés pointées dans les études précédentes (Bednarz et Janvier 1984, DeBlois 1996) ou encore au « verbalisme des écritures chiffrées » dont parle Brissiaud (2005). Est-ce qu'il serait aussi possible de mettre cela en relation avec le contenu des programmes et manuels ? Qu'est-ce qui pourrait expliquer les difficultés rencontrées par les élèves du point de vue de l'OM à enseigner ? Nous tenterons d'apporter des éléments de réponses dans le chapitre suivant, mais pour les nombres à quatre chiffres.
Avant cela nous allons poursuivre l'étude des difficultés des élèves à travers l'analyse des résultats d'une évaluation proposée à des élèves de CE2, sur les nombres à trois chiffres.

II. Un état des lieux des connaissances des élèves pour certains types de tâches de numération, en début de CE2

L'objectif est maintenant de préciser les difficultés des élèves dans le contexte actuel de l'enseignement de la numération en France. Pour cela nous allons nous intéresser :

- à des types de tâches mettant en jeu principalement le principe de position : des traductions d'écritures canoniques ($T_{Tec/n}$, $T_{Teunc/ec}$ …) et des comparaisons (T_C) ;
- à des types de tâches mettant en jeu des conversions : des traductions d'EUN en EC ($T_{Teun/ec}$) du type « 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = … », des conversions entre unités (T_{Ceun}) et *nombre de* (T_{Cnd}).

Les recherches de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996) montrent des difficultés pour les élèves dans la traduction d'EUN en EC qui peuvent être rapprochées des conditions que nous avons identifiées dans le chapitre 1 pour la technique de position : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité et nombre à un seul chiffre à chaque rang de l'EC. Dans l'évaluation que nous proposons aux élèves nous mettrons en évidence le choix des valeurs des variables didactiques afin de préciser ce constat et de faire le lien entre les difficultés des élèves et la prise en compte de ces conditions.

Enfin pour préciser le constat de Parouty, nous proposons également un problème de type « *nombre de* » en contexte.

II.1 Dispositif expérimental

Dans le cadre du travail avec les enseignants que nous présenterons en partie 2, nous avons proposé une évaluation à faire passer à leurs élèves avant l'expérimentation. Cette évaluation porte sur les nombres inférieurs à 1000. Tous les enseignants qui participent aux expérimentations travaillent la numération des nombres inférieurs à 1000 avant de faire l'étude des nombres plus grands, ce qui constitue en quelque sorte des révisions des connaissances du niveau de classe inférieur (CE1, 2ème primaire). Ce travail se fait au minimum pendant la première période de l'année (jusqu'à la fin du mois d'octobre) mais s'étale parfois sur un temps un peu plus long (au plus jusqu'aux vacances de Noël, soit jusqu'à la deuxième période de l'année).
Les enseignants n'avaient alors pas connaissance du contenu du travail qui serait ensuite proposé sur les nombres à 4 chiffres dans l'expérimentation. Ils ont donc mis en œuvre leur séquence habituelle sur les nombres strictement inférieurs à 1000. L'évaluation leur a été donnée tardivement pour que son contenu n'ait pas d'influence sur la séquence proposée. Lorsque l'évaluation a été donnée aux enseignants, il leur a été indiqué qu'il ne s'agissait pas d'une évaluation « de classe » habituelle mais plutôt d'une évaluation « de recherche » pour regarder en particulier des connaissances qui ne sont pas évaluées habituellement et qu'il ne fallait donc pas s'inquiéter de possibles difficultés rencontrées par les élèves. L'objectif était de prévenir les enseignants pour éviter qu'ils n'interviennent au cours de l'évaluation, ce qui leur a été également indiqué. Nous leur avons également demandé de faire cette évaluation environ deux semaines après la fin de leur séquence sur les nombres strictement inférieurs à 1000, afin d'éviter des réussites liées à un travail « à chaud ».
L'évaluation comporte deux parties. Elle a été donnée en deux fois aux élèves. Nous avons indiqué aux enseignants de laisser 30 minutes par partie, ce qui constitue un temps raisonnable pour que les élèves traitent tous les exercices (il était possible de dépasser ce temps si besoin).
Les enseignants doivent lire les consignes avec les élèves pour s'assurer que ceux-ci comprennent de quoi il s'agit, en particulier pour les problèmes en contexte (monnaie).

II.2 Présentation de l'évaluation et des résultats

Cette évaluation a été pensée à la fois comme permettant de faire un diagnostic des connaissances des élèves sur les nombres strictement inférieurs à 1000 mais aussi dans le cadre des expérimentations des parties suivantes, pour une comparaison des résultats des élèves avant et après utilisation d'une ressource sur la numération des nombres supérieurs à mille.
Malgré la présence d'un cadre (espace vide encadré) pour que l'élève laisse une trace de sa recherche, nous savons qu'il est difficile avec ce type d'évaluation de connaître les techniques des élèves. Il s'agit plus modestement d'un travail exploratoire permettant d'identifier les réussites et difficultés rencontrées à certains types de tâches et l'influence de certaines variables sur ces réussites/difficultés.
Étant donné que nous avons expérimenté pendant trois années consécutives, avec des effectifs d'élèves différents d'une année sur l'autre, lorsque les exercices sont les mêmes nous avons cumulé les résultats sur deux ou trois années. Il y a eu toutefois de légères

modifications d'une année sur l'autre (soit sur un item d'un exercice soit sur un exercice entier). Tous les exercices n'ont donc pas été faits par tous les élèves. Pour clarifier cela nous indiquerons pour chaque exercice le nombre d'élèves qui ont été évalués.
Nous allons maintenant présenter plus en détail chaque exercice en indiquant le type de tâches en jeu, les choix de variables didactiques effectués ainsi que le nombre d'élèves à qui il a été proposé et le pourcentage de réussite global. Pour étudier l'influence de certaines variables didactiques sur les réussites ou difficultés des élèves, nous regarderons aussi les résultats de chaque item.

Exercices 1 et 2 : $T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$

1. Écris en chiffres		**2. Écris en lettres**	
a. Cinquante-deux : ………	**96,9%**	a. 49 : ………………………………………………	**96,1%**
b. Soixante-treize : ………	**93,7%**	b. 95 : ………………………………………………	**81,1%**
c. Cinq cent quatre : ………	**85,3%**	c. 257 : ………………………………………………	**84,3%**
d. Cent quatre-vingt-douze : ………	**80,3%**	d. 170 : ………………………………………………	**88,2%**
e. Deux cent cinq : ………	**92,9%**	e. 509 : ………………………………………………	**88,2%**
Total	**89,9%**	Total	**87,6%**

Figure 20 : exercices 1 et 2 de l'évaluation, pourcentages de réussite pour 127 élèves

Ce qui est évalué dans cet exercice est le fait de passer du nom du nombre à l'écriture en chiffres (exercice 1, $T_{Tn/ec}$) ou inversement (exercice 2, $T_{Tec/n}$).
Voici les choix des valeurs des variables didactiques.

- Taille des nombres : supérieurs ou inférieurs à 100. Dans le cas de nombres supérieurs à 100, il faut prendre en compte le mot « cent » comme indiquant le rang du premier mot nombre.
- Absence d'unités à certains rangs ou unités non nulles à chaque rang. Dans le cas du passage de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres il y a alors des zéros, ou pas, à écrire alors que l'on ne les entend pas dans la lecture du nombre.
- Nombre au rang des dizaines égal à 7 ou à 9 (ou différent de ces nombres) : dans ce cas il y a des irrégularités.

<u>Interprétation des résultats.</u>
Le pourcentage de réussite est élevé (près de 90%) pour ces deux exercices. En regardant les résultats de chaque item, on peut noter que ce n'est ni la taille des nombres, ni l'absence d'unités à certains rangs qui sont liés au pourcentage de réussite. Par exemple à l'exercice 2, « 509 » est réussi par 88,2% des élèves alors que « 95 » par 81,1%. C'est plutôt le fait d'avoir un chiffre des dizaines égal à 9 qui a posé le plus de difficultés dans ces exercices avec le plus faible pourcentage de réussite pour les items 1.d (« cent quatre-vingt-douze ») et 2.b (« 95 »), alors que pour 7 au chiffre des dizaines, les items 1.b et 2.d sont un peu mieux réussis.
Les difficultés rencontrées par les élèves sont donc principalement liées à la non congruence entre le système écrit et le système parlé (notamment pour le 9 au chiffre des dizaines). Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, il semblerait que pour les nombres à 3 chiffres l'absence d'unité à certains rangs n'est pas une difficulté. Ces items sont même un peu mieux réussis que les autres. Par exemple écrire 257 en lettres est réussi par 84,3% des élèves contre 88,2% pour 509. De même, écrire « deux-cent-cinq » en chiffres est réussi par plus de 90% des élèves. On peut donc considérer que ces difficultés, qui pourraient être

importantes dans les débuts de l'apprentissage des nombres à trois chiffres, sont maintenant dépassées par la majorité des élèves.

Exercices 3 et 5 : $T_{Teunc/ec}$ *et* $T_{Teun/ec}$

3. Complète		**5. Complète**	
a. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = …	**90,6%**	a. 2 dizaines + 15 unités = …	**41%**
b. 8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = …	**78%**	b. 4 centaines + 10 dizaines = …	**32,3%**
c. 6 centaines + 9 unités = …	**64,6%**	c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = …	**38,6%**
d. 7 unités + 4 centaines = …	**63%**	d. 21 dizaines + 3 centaines = …	**21,4%**[53]
e. 3 dizaines + 6 centaines = …	**52%**	e. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = …	**16,5%**
Total	**69,6%**	Total	**32,1%**

Figure 21 : exercices 3 et 5 de l'évaluation, pourcentages de réussite pour 127 élèves.

Même si nous avons regroupé ces deux exercices qui relèvent de traductions d'EUN en EC, ils se distinguent par le fait que le deuxième (exercice 5) met en jeu des conversions entre unités. L'exercice 3, lui, a pour but d'évaluer une traduction d'une EUNC en EC, ce qui met en jeu principalement le principe de position.
Le premier choix au niveau des variables didactiques concerne le fait de n'utiliser que les EUN, et non les EPD par exemple. Nous avons toutefois intégré quelques traductions avec cet ostensif dans l'évaluation proposée la dernière année d'expérimentation. Nous évoquerons plus loin les résultats.
Les autres choix des valeurs des variables didactiques ont été faits pour mettre en jeu les trois conditions énoncées dans la formulation générale de la technique de conversion.

- Nombre d'unités de chaque ordre : inférieur ou égal à 9 dans l'exercice 3 alors que dans l'exercice 5, une ou deux unités (et pas au rang le plus élevé) sont données en nombre supérieur ou égal à 10, ce qui amène à mettre en jeu les conversions.
- Ordre dans lequel les unités sont données : ordre conventionnel (une unité de plus haut rang avant une unité de rang inférieur) ou non. Cela permet de mettre en jeu la condition du respect du rang de chaque unité dans l'EC.
- Absence d'unités à certains rangs ou unités non nulles à chaque rang. Dans le premier cas cela amène les élèves à utiliser le chiffre 0 selon la condition de présence de chaque unité dans l'EC.

Notons également que le choix a été fait, pour l'exercice 5, de proposer des traductions pour lesquelles la simple juxtaposition des nombres d'unités donnés ne fonctionne pas, comme par exemple ce serait le cas pour un nombre comme 34 centaines 86 unités.

<u>Interprétation des résultats.</u>
Les résultats globaux des deux exercices sont très différents (69,6% pour l'exercice 3 et 32,1% pour l'exercice 5); cela témoigne de l'influence essentielle de la valeur >10 de la première variable didactique sur les pourcentages de réussite et donc peut-être de difficultés liées à la condition « nombres à un seul chiffre par rang », qui doit amener à faire des conversions.

[53] Pour cet item, seuls 103 élèves ont été évalués.

Nous allons maintenant regarder chaque exercice séparément pour déterminer l'influence des autres valeurs des variables didactiques sur les pourcentages de réussite aux différents items.

Exercice 3.

L'item 3.a est réussi par environ 90,6% des élèves. Les erreurs que nous avons pu voir sont des erreurs d'ajout de tous les chiffres (1+9+3 = 13) sans tenir compte de la valeur des différentes unités, ce qui peut être rapproché des élèves pour qui « un nombre est une suite de chiffres » signalés dans les travaux de Bednarz et Janvier (1984).

La différence de réussite entre l'item 3.a (90,6%) et 3.b (77,8%) montre l'influence de la variable « ordre des unités » et semble principalement liée à une simple juxtaposition des nombres sans tenir compte de la position de chaque unité dans l'EC (8d 2c 5u = 825). Cela peut cette fois être rapproché des élèves pour qui « les mots centaines, dizaines, unités sont associés à un découpage, à un ordre dans l'écriture » signalés par Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996).

De même la différence de réussite entre les items 3.a (90,6%) et 3.c (64,6%), où la seule différence concerne l'absence d'unité isolée au rang des dizaines (qui met en jeu le 0), relève du même phénomène (la simple juxtaposition des nombres ne fonctionne plus).

Un certain pourcentage d'élèves qui réussissent 3.b fait une erreur à 3.e. L'erreur courante que nous avons observée consiste à effectuer une simple juxtaposition des nombres, comme pour le 3.b mais :

- soit, comme pour le 3.b, sans tenir compte des unités ;
- soit en tenant compte de l'ordre des unités dans l'écriture chiffrée (les centaines à gauche des dizaines) mais sans utiliser le 0 pour marquer l'absence d'unités simples isolées.

En regardant les productions des élèves il apparait que l'erreur principale des élèves qui ont réussi le 3.d mais échoué au 3.e est d'écrire 603, ce qui pourrait donc aussi être interprété comme une influence de la place du zéro dans les deux cas précédents (3.c et 3.d).

Les résultats de cet exercice montrent que les connaissances d'une partie des élèves concernant la traduction d'une EUNC en EC ne permettent pas une prise en compte de la position des unités dans l'écriture chiffrée et les amènent alors à faire une simple juxtaposition des nombres. On pourrait alors penser que le jeu sur les variables proposées dans cet exercice n'est peut-être pas souvent proposé dans les manuels et dans les classes. Cela sera à vérifier dans l'étude de l'OM à enseigner.

Exercice 5

Les nombres ont ici été choisis de façon à ce que la juxtaposition des nombres d'unités de numération, même dans le « bon ordre », ne donne pas le nombre attendu. Il n'est donc pas étonnant que l'on retrouve une grande partie des erreurs de l'exercice 3 chez les élèves qui :

- ajoutent les nombres d'unités de chaque ordre sans tenir compte de la valeur de ces unités. Par exemple pour 5.a : 2 dizaines + 15 unités = 17.
- juxtaposent les nombres sans tenir compte du fait que les unités sont données dans le désordre. Par exemple pour 5.a : 2 dizaines + 15 unités = 215 (parfois 17).

Cependant des élèves qui avaient réussi tous les items de l'exercice 3 font également ce type d'erreurs (17 ou 215 pour 5a par exemple), ce qui témoigne de la difficulté de prise en compte de la condition de nombres à un seul chiffre par rang de l'EC.

Pour le 5.c, certains élèves juxtaposent simplement les nombres donnés (5123) mais d'autres prennent en compte le fait que l'on doit obtenir un nombre à 3 chiffres (par effet de contrat ou en repérant que l'unité la plus grande qui est la centaine) et utilisent alors divers « manipulations » erronées des chiffres :

- ajout de nombres d'unités, principalement du type 5c 12d 3u = 515 (voire 605).
- suppression de chiffres du type 5c 12d 3u = 513 ou 5c 12d 3u = 523.

Pour 5.d le fait d'avoir trois nombres à un seul chiffres a, semble-t-il, amené les élèves à les juxtaposer (213) éventuellement en tenant compte de la position des centaines (321). Enfin, l'item 5.e qui met en jeu les deux conversions est très peu réussi (16,5%), ce qui n'est pas étonnant compte-tenu des résultats précédents.

<u>Complément n°1 : la question des traductions d'EPD (ou EPDC) en EC</u>

On peut se demander dans quelle mesure les résultats obtenus sont liés au choix de l'ostensif EUN. Pour avoir des éléments de réponse à cette question, nous avons proposé dans l'évaluation de la dernière année des traductions à partir d'EUN mais aussi d'EPD. Seuls 60 élèves (sur six classes différentes) ont été évalués.

Pour les traductions d'écritures canoniques ($T_{Tepdc/ec}$), les résultats montre que les réussites sont équivalentes aux traductions à partir d'EUN lorsque les unités sont données dans l'ordre conventionnel, avec présence de chaque unité : traduire (7×100) + (4×10) + 5 en EC est aussi bien réussi que pour 1c + 9d + 3u. Mais pour une traduction où les unités sont données dans un ordre non conventionnel et avec absence de dizaine, les résultats sont meilleurs avec les EPD : 80% de réussite pour traduire (6×10) + (4×100) en EC contre 65% de réussite pour 3d + 6c. Il est possible que le calcul (naturellement sollicité par les EPD) leur permet de réussir (et la présence de 0 dans les EPD facilite leur écriture dans l'EC). Il est aussi possible que les élèves soient plus familiers de cet ostensif.

Il faudrait une étude plus importante (plus d'élèves, plus d'items) pour pouvoir interpréter cette différence entre EUN et EPD. Nous n'avons pas proposé de traductions avec les EAC (par exemple 700 + 10).

<u>Complément n°2 : *les erreurs de juxtaposition des nombres*</u>

Selon Brousseau (1983) l'erreur n'est pas

> « seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée ».

Ainsi les erreurs faites par certains élèves dans les exercices 3 et 5, témoignent, selon nous, d'utilisations de techniques de juxtaposition de nombres (construites par ces élèves) ayant une portée limitée. Le jeu sur les variables didactiques effectué dans ces deux exercices a permis de mettre en évidence des juxtapositions de nombres utilisées par les élèves. Elles peuvent fonctionner dans certains particuliers mais les élèves cherchent à les étendre hors de leur domaine de validité. Nous pouvons alors parler *d'erreur de juxtaposition des nombres* dans le sens où il n'y a pas de prise en compte des trois conditions de la technique de position. En fonction des conditions prises ou non en compte, cela donne lieu à différentes techniques[54]. Nous allons illustrer leur domaine de validité en considérant les quatre quantités suivantes :

[54] Ces techniques ne sont pas explicitées dans l'OM de référence car il s'agit de « techniques-élèves », non explicitées dans des manuels par exemple. Celle qui a vocation à être institutionnalisée dans une classe est la technique de position du fait de son plus grand domaine d'application. Nous avons reconstruit ces techniques de simple juxtaposition à partir des observations des réponses des élèves aux exercices de l'évaluation ainsi qu'avec les résultats des travaux de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996).

- quantité 1 : 2m 3c 1d 4u, les unités sont données dans l'ordre conventionnel, nombre d'unités compris entre 1 et 9 à tous les ordres ;
- quantité 2 : 3c 2m 4u 1d, les unités sont données dans un ordre non conventionnel, nombre d'unités compris entre 1 et 9 à tous les ordres ;
- quantité 3 : 2m 3c 4u, les unités sont données dans l'ordre conventionnel, absence d'une unité isolée, nombre d'unités inférieur ou égal à 9 à tous les ordres ;
- quantité 4 : 12c 2m 1d 4u, les unités sont données dans un ordre non conventionnel, absence d'une unité isolée, nombre d'unités supérieur à dix à un certain ordre ;

$\boldsymbol{\tau_{jux1}}$. **Simple juxtaposition des nombres** : écriture des nombres d'unités « visibles » dans l'ordre où ils sont donnés. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour la quantité 1 (2314) mais des résultats erronés pour les autres (3241, 234 et 12214).

$\boldsymbol{\tau_{jux2}}$. **Juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'EC** : écriture des nombres d'unités visibles en respectant l'ordre relatif des unités (prise en compte de la première condition) : les unités simples s'écrivent avant les dizaines (en partant de la droite et en allant vers la gauche), les dizaines avant les centaines, etc. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 1 et 2 (2314) mais des résultats erronés pour les autres (234, 21214). Elle prend en compte la condition de respect du rang de chaque unité.

Remarque : ces deux premières simples juxtapositions peuvent donner un résultat juste pour des quantités comme 2m 12d 4u ou 12c 2d 4u …

$\boldsymbol{\tau_{jux3}}$. **Juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'EC** : écriture des nombres d'unités « visibles » en respectant l'ordre relatif des unités et en écrivant des 0 en cas d'absence d'unité isolée. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 1, 2 et 3 (2314 et 2304) mais des résultats erronés pour la dernière (21214). Elle prend en compte les conditions de respect du rang de chaque unité et de présence de chaque unité.

Ainsi quand nous parlerons d'*erreur de juxtaposition des nombres* dans la suite de la thèse, il s'agira d'une de ces techniques d'application d'une juxtaposition hors de son domaine de validité, qui peut donner lieu à différents résultats en fonction des conditions de la technique générale de juxtaposition prises ou non en compte. Nous préciserons si besoin.

Exercice 4 : comparer deux nombres (T_C)

a. 200 et 199	b. 592 et 597	c. 789 et 902	d. 345 et 309	Total
93,6%	**96,3%**	**94,1%**	**95,2%**	**94,8%**

Figure 22 : exercice 4 de l'évaluation, pourcentages de réussite pour 187 élèves

Il s'agit de comparaisons de deux nombres écrits en chiffres où l'utilisation des signes de comparaison n'est pas demandée, ce qui permet d'évaluer uniquement la comparaison uniquement et non la connaissance de ces signes.

Choix des valeurs des variables didactiques : égalité des chiffres des centaines, des dizaines ou des unités.

<u>Interprétation des résultats</u>

La réussite est très élevée : environ 95% sur l'exercice avec peu de différence entre les items. Les erreurs des élèves sont majoritairement liées à une non compréhension de la consigne : par exemple un élève pense qu'il faut entourer le plus grand de toute la liste ou bien un autre le couple de nombres dont la somme est la plus grande, etc. La comparaison de deux nombres de trois chiffres ne semble donc pas poser de difficultés aux élèves.

Exercice 6 : T_{Cnd} (nombre de)

6. Complète	
a. Dans 67 il y a ……… dizaines	**70,2%**
b. Dans 105 il y a ……… dizaines	**51%**
c. Dans 260 il y a ……… centaines	**53%**
d. Dans 400 il y a ……… dizaines	**46,2%**
e. Dans 764 il y a ……… dizaines	**38,5%**
Total	**51,7%**

Figure 23 : exercice 6 de l'évaluation, pourcentages de réussite pour 103 élèves

Il s'agit de déterminer le nombre de dizaines ou centaines dans un nombre donné par son EC. La principale variable didactique est la relation entre l'unité dont le « *nombre de* » est demandé et le nombre de chiffres du nombre de départ. Par exemple quand il s'agit de déterminer le *nombre de* dizaines d'un nombre à 2 chiffres ou le *nombre de* centaines d'un nombre à 3 chiffres (items 6.a et 6.c) cela revient à chercher le « chiffre des » ce qui est différent de la détermination du *nombre de* dizaines d'un nombre à 3 chiffres (items 6.b, 6.d et 6.e).

<u>Interprétation des résultats</u>
La réussite globale est de 51,7%. Quand il s'agit de déterminer le *nombre de* dizaines dans un nombre à 3 chiffres les pourcentages de réussite tombent en-dessous de 50%.
Les items où les nombres d'unités cherchés n'ont qu'un chiffre sont les mieux réussis mais avec une différence entre le cas des dizaines et celui des centaines (6.a compte 70,2% et 6.c 52,9%).
Pour les autres items (*nombre de* dizaines dans un nombre à 3 chiffres), beaucoup d'élèves ont écrit le « chiffre des », comme dans l'évaluation proposée par Chambris (2008) en CM2. Par exemple pour 6.b : dans 105 il y a 0 dizaine. Même si c'est plus rare, d'autres élèves ont au contraire cherché à écrire un nombre formé de plusieurs chiffres dès le premier cas. Par exemple pour le 6.a ils écrivent 67 ou 60.
Il est difficile de faire ressortir les erreurs principales car il y a une plus grande variété de réponses que dans les autres exercices.

Exercice 7 : T_{Ceun} (conversions entre EUN)

7. Complète	
a. 5 dizaines = ……… unités	**54,7%**
b. 80 unités = ……… dizaines	**54,7%**
c. 1 centaine = ……… dizaines	**48,4%**
d. 3 centaines = ……… unités	**36,7%**
e. 60 dizaines = ……… centaines	**31,3%**
Total	**45,2%**

Figure 24 : exercice 7 de l'évaluation, pourcentages de réussite pour 128 élèves

Il s’agit d’un exercice de conversion d’un nombre d’unités d’un certain ordre en une autre unité.
Choix des valeurs des variables didactiques :

- sens de la conversion : unité d’ordre inférieur vers unité d’ordre supérieur ou inversement,
- unités d’ordres consécutifs (conversion 10 pour 1) ou non,

Enfin, un élément important dans le choix des unités de conversion est également le fait de proposer pour l’une des deux unités l’unité du premier ordre (c'est-à-dire l’unité simple). En effet les élèves peuvent alors utiliser la position des chiffres ou la multiplication par 10 ou 100 (par exemple 5 dizaines = 50).
Convertir 1 centaine en dizaines peut aussi se traiter en repassant par l’unité simple (1 centaine = 100 unités et dans 100 unités il y a 10 dizaines) mais cela met en jeu un « *nombre de* » et devient plus coûteux que la conversion directe.

Interprétation des résultats
45,2% de réussite globale avec des différences importantes entre les premiers et les derniers items qui nous permettent de dire que la relation entre dizaines et centaines est moins maîtrisée que celle entre unités et dizaines.
Même si les conversions sont en sens inverse, les items 7.a et 7.b ont le même pourcentage de réussite (54,7%). Pour 7.c et 7.e (respectivement 48,4% et 31,3%) ce qui pourrait être lié au fait que 7.c met en jeu directement la relation 1 centaine = 10 dizaines. L’item 7.e est le moins réussi. Cela pourrait être lié au fait que cette conversion concerne deux unités dont aucune n’est l’unité simple, ou encore tout simplement parce qu’il s’agit de la dernière : les élèves pourraient avoir eu une baisse d’attention.
On peut aussi s’étonner des difficultés rencontrées par la plupart des élèves pour l’item 7.d où la position des centaines dans l’EC permet de traduire 3c en 300u.
La conversion n’est pas un type de tâches présent dans les programmes actuels et très peu dans les manuels de la fin du XX^{ème} siècle, début du XXI^{ème} siècle, d’après Chambris (2008), ce qui pourrait expliquer ces résultats. Notre étude de l’OM à enseigner pourra nous le confirmer pour le cas des nombres à 4 chiffres en CE2.

Exercice 8 : T_{Cnd} dans un problème en contexte

8. Un directeur d’école a rassemblé les pièces de 1 euro qui ont été récoltées lors de la tombola de la fête de fin d’année. Il a en tout 218 euros. Il va à la banque pour échanger ces pièces contre le plus possible de billets de 10 euros. Combien de billets de 10 euros peut-il obtenir ?
Total : 30%

Figure 25 : exercice 8 de l’évaluation, pourcentages de réussite pour 187 élèves

Le choix principal au niveau des valeurs des variables didactiques concerne la taille du nombre. Ici 218 est choisi car il permet de passer par un dessin des billets de 10 puis effectuer un comptage ou une conversion. Cela est également rendu possible par le cadre laissé pour la recherche en-dessous de l’énoncé. D’autres techniques sont possibles comme la troncature à la dizaine, des essais de multiplication par 10 pour se rapprocher de 218 sans le dépasser ou encore des essais d’additions itérées.

Des difficultés peuvent intervenir concernant la compréhension de la situation en particulier la notion d'échange de pièces contre des billets de 10€. Ce type de connaissance fait partie des programmes des niveaux précédents (CP et CE1 soit 1ère et 2ème primaire).

<u>Interprétation des résultats</u>
Les résultats sont faibles (30% de réussite globale). Les erreurs relèvent d'une mauvaise représentation du problème ou bien d'un mauvais traitement :

- des élèves tentent une opération posée ou en ligne comme par exemple 218 + 10 = 228 (ou 218-10=208). Ils en déduisent alors qu'il y a 228 (ou 208) billets de 10 ou bien ne concluent pas (peut-être ont-ils conscience du problème d'ordre de grandeur).
- Des élèves dessinent des billets de 10 ou écrivent des additions itérées de 10 (10 + 10 + 10 + …) et comptent (on peut le supposer) jusqu'à « deux-cent-dix ». Ils ne dessinent pas de paquets donc on peut penser qu'ils n'effectuent pas de conversion (ou d'échange en billets de cent). Cette procédure est correcte mais des élèves font des erreurs dans la conclusion : confusion entre le nombre de billets et le montant total en euros, comme par exemple « il faut 210 billets ».

Très rares sont les élèves qui donnent directement la réponse, c'est-à-dire sans faire de dessin ou de calcul, ce qui pourrait témoigner de l'utilisation de la technique de troncature. Mais cela peut être un effet de la présence du « cadre pour la recherche » : les élèves, par effet de contrat, peuvent penser qu'il faut justement faire un dessin ou une opération.
Les résultats trouvés ici rejoignent les constats faits par Parouty (2005), même s'il s'agit ici de nombres à 3 chiffres.

Conclusion

Les recherches concernant l'apprentissage de la numération pour les élèves de l'école primaire attestent de certaines difficultés liées à la compréhension de l'écriture chiffrée en lien avec le principe décimal. Ces difficultés peuvent persister tout au long de l'école primaire.
Les résultats des élèves à l'évaluation que nous avons proposée mettent en évidence une bonne réussite pour les types de tâches <u>écrire/nommer</u> ($T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$) et <u>comparer des nombres écrits en chiffres</u> (T_C). Même les cas mettant en jeu l'écriture d'un 0 que l'on n'entend pas dans le nom du nombre (pour $T_{Tn/ec}$) ne posent pas vraiment de difficultés. Cela pourrait témoigner du fait que ces types de tâches sont beaucoup travaillés dans les classes.
Concernant les <u>traductions entre EUN et EC</u> ($T_{Teun/ec}$ et $T_{Tec/eun}$), l'évaluation que nous avons proposée aux élèves, en faisant un choix approprié de valeurs des variables didactiques, permet de retrouver et d'affiner les constats de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996).
Nous avons par exemple observé certaines erreurs liées à l'absence de prise en compte des unités comme par exemple 1c + 9d + 3u = 13. Mais l'analyse des erreurs des élèves permet aussi de voir que certains essaient d'étendre une technique de juxtaposition de nombres qui fonctionne pour certains cas particuliers, hors de son domaine de validité. Les comparaisons des résultats des élèves aux différents items montrent des difficultés spécifiques liées au respect de chacune des conditions d'application de cette technique (dès qu'une nouvelle condition est en jeu on observe une baisse des réponses correctes). Nous appelons ainsi les trois techniques ainsi reconstruites : simple juxtaposition des nombres, juxtaposition avec respect de l'ordre des unités et juxtaposition avec respect de la position des unités.

Ces erreurs peuvent paraître surprenantes puisqu'il ne s'agit pas d'un nouvel apprentissage en CE2 mais d'un travail de reprise de connaissances construites au cours du niveau de classe antérieur (CE1). Elles pourraient être liées à l'utilisation des unités de numération qui est actuellement moins répandue que celle des EPD (10, 100, …), mais nous avons vu avec notre dernière évaluation (portant sur uniquement 60 élèves) que les résultats ne sont que légèrement supérieurs avec cet ostensif.
Nous n'avons pas évalué la capacité des élèves à effectuer des groupements par dix pour dénombrer une collection par exemple car cela pourrait être difficile avec ce type d'évaluation. Même si les élèves sont capables de réussir à faire de tels groupements, cela ne semble pas suffisant pour s'approprier le lien entre ces groupements et le fonctionnement de l'EC (DeBlois 1996, Thomas 2004). Par contre, nous avons évalué <u>les conversions entre unités</u> (T_{Ceun}). Elles posent problème aux élèves, comme en témoigne le fait que seulement un tiers d'entre eux environ réussit à convertir 60 dizaines en centaines. Pourtant environ la moitié maîtrise la relation directe entre 1 centaine et 10 dizaines. Cela témoigne de la difficulté supplémentaire pour la généralisation des conversions au-delà des conversions de base comme 1c=10d, comme cela avait déjà été observé par DeBlois (1996).
De plus la comparaison des pourcentages de réussite aux conversions de 80 unités en dizaines (plus de 50%) et 60 dizaines en centaines (environ 30%) montre une meilleure maîtrise de la relation unités/dizaines que dizaines/centaines, comme on pouvait s'y attendre. Cela peut être rapproché du constat de Sinclair, Tièche-Christinat et Garin (1994) : la compréhension du fonctionnement de la numération pour les nombres à deux chiffres ne garantie pas son extension aux nombres plus grands. La compréhension de l'itération des relations entre unités en lien avec le fonctionnement de l'EC est une difficulté importante selon Thomas (2004).
Ces difficultés permettent aussi de mieux comprendre les difficultés rencontrées dans les traductions indiquées ci-dessus, mettant en jeu des conversions.
Enfin pour affiner les constats de Parouty (2005) et Chambris (2008), nous avons aussi proposé le type de tâches <u>nombre de</u> (T_{Cnd}) hors contexte et dans un problème en contexte.
Ce n'est pas une surprise de voir que dans l'exercice 6 les cas où les nombres d'unités cherchés ont un seul chiffre (ce qui revient à chercher le « *chiffre des* ») sont mieux réussis que les autres. Le type de tâches *nombre de* est source de difficultés pour les élèves, comme l'avait déjà montré Chambris (2008) pour des élèves plus âgés. Moins de 40% des élèves arrivent à déterminer le nombre de dizaines dans 764. Nous pouvons alors faire l'hypothèse que le fait de ne pas maîtriser suffisamment les conversions ne permet pas aux élèves de comprendre la technique de troncature, ce qui les amène alors à faire des découpages de l'écriture chiffrée non appropriés. Cela peut aussi être rapproché des constats de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996) sur la difficulté pour les élèves d'avoir des moyens de contrôle de leur réponse.
Dans le problème de « *nombre de* » (contexte de monnaie) il semble que les élèves ne mobilisent pas la technique de troncature. L'analyse des réponses des élèves montre que parmi le peu d'élèves qui réussissent (environ 30%), la plupart utilisent des procédures de comptage. Cela confirme les constats de Parouty (2005) pour les nombres inférieurs à 1000.

Ces résultats sont à même d'interroger les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres, alors que les relations entre unités vont se complexifier du fait de l'introduction d'une unité supplémentaire ou de relations entre unités non consécutives comme dizaines/milliers (difficulté pointée par Thomas 2004 jusqu'en fin d'école primaire) : une bonne partie des élèves ne sont pas dans des conditions

favorables pour aborder ce travail. Dans quelle mesure les élèves et les enseignants pourront-ils alors s'appuyer sur les relations entre unités/dizaines/centaines pour travailler les nouvelles relations avec les milliers ?
On peut aussi s'interroger sur les possibilités pour les élèves de comprendre le fonctionnement des techniques de calcul posé, qui justement s'appuient, entre autres, sur les conversions entre unités comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.
Nous allons maintenant passer à l'étude des programmes et de quelques manuels récents sur les nombres à quatre chiffres.

Chapitre 3

Etude des programmes et de quelques manuels récents

I. Objectifs et méthodologie

Nous venons de voir au chapitre 2 les difficultés que posent aux élèves certaines tâches de numération, en particulier celles mettant en jeu les conversions entre unités, pour les nombres inférieurs à mille, en début de CE2 (3ème primaire). L'objectif de ce chapitre est de déterminer comment l'institution scolaire et les manuels prennent en compte les deux principes de la numération et en particulier le travail autour des conversions entre unités, à ce niveau de classe lors du travail sur les nombres à 4 chiffres. En particulier, nous chercherons à déterminer la présence ou non du type de tâche de conversion entre unités mais aussi la possibilité de mise en jeu des conversions dans les autres types de tâches proposés. Dans ce cas nous nous demanderons alors comment est pris en compte le principe décimal de la numération. Est-il formulé et si oui, comment ? Et comment se fait l'articulation avec le principe de position ?[55]
Nous nous appuyons sur une étude des OM de la numération dans les programmes officiels et certains manuels et guides de l'enseignant associés. Nous nous limitons à l'OM proposée

[55] Ces questions ont déjà étaient formulées dans l'introduction de la partie I, de manière plus précises.

dans le thème des « nombres entiers », même si la numération est travaillée dans d'autres thèmes comme le calcul ou les grandeurs et mesures.
Chambris (2008) a consacré un chapitre de sa thèse à l'étude de l'enseignement de la numération au cours du XX^{ème} siècle. Son étude de la période la plus récente s'appuie sur des manuels dont les dernières éditions consultées datent de 2004. Un manuel actuellement utilisé dans les classes ainsi qu'en formation des enseignants n'a pas été étudié. Il s'agit de « *Cap Maths* » aux éditions Hatier. De plus les programmes de 2002 ne sont pas étudiés alors que leur intégration par les enseignants a donné lieu à beaucoup de formation. Nous avons donc choisi de prolonger son étude en incluant ce manuel et en prenant en compte des éditions plus récentes.
De plus, pour compléter cette étude, nous pointons tout au long de ce travail la façon dont ces ressources décrivent (ou ne décrivent pas) les enjeux liés aux deux principes de la numération (et en particulier au principe décimal). En effet, nous faisons l'hypothèse que, quand des éléments de savoir sont formulés dans un encadré de manuel (ou mémento, etc.), ils témoignent à la fois de techniques et/ou éléments technologiques de l'OM étudiée mais constituent également pour l'enseignant un apport sur les techniques et/ou éléments technologiques visés lui permettant d'identifier l'enjeu de l'activité proposée et les savoirs à institutionnaliser. D'autres apports plus spécifiquement destinés à l'enseignant pourraient être proposés, notamment pour la conception d'une organisation didactique permettant de faire vivre l'OM décrite. Nous prenons donc en compte ces questions des apports pour l'enseignant dans notre étude de l'OM à enseigner. Elles nous serviront aussi pour notre questionnement sur la conception d'une ressource pour les enseignants (parties suivantes).
Nous continuons d'utiliser ici la théorie anthropologique du didactique pour étudier l'OM à enseigner de la numération. En particulier l'OM de référence est un point d'appui essentiel pour l'étude des praxéologies existantes. Nous ferons une étude des programmes officiels de 2002, 2007 et 2008, des évaluations nationales (correspondant à ces programmes) ainsi que de quatre manuels récents. Les praxéologies sont étudiées en combinant plusieurs documents car elles ne sont pas toujours entièrement visibles dans chacun d'eux. Dans les programmes, il n'est pas toujours possible d'identifier les types de tâches en jeu et encore moins les techniques et éléments technologiques.
Nous commençons par une étude du programme de 2002. Celui-ci est accompagné d'un « document d'application » donnant des commentaires et précisions sur les compétences citées dans le texte du programme. Nous regardons également les évaluations nationales de 2005 pour compléter cette analyse : c'est une année où les programmes de 2002 sont appliqués à tous les niveaux[56] du cycle 3. Nous utilisons les évaluations de début de CE2 (qui concernent donc les compétences de cycle 2, mais dont le contenu nous semble pouvoir donner une indication sur les attentes institutionnelles pour la classe de CE2) ainsi que celles de début de 6ème (qui concernent donc les compétences attendues à la fin du cycle 3).
Nous complétons ensuite notre étude en observant l'évolution de cette organisation dans les textes officiels suivants (2007 et 2008) pour lesquels il n'existe pas de commentaires officiels. En particulier nous étudions l'évolution (en termes de rupture ou de continuité) des formulations utilisées dans la description des compétences attendues chez les élèves pour mettre en évidence l'évolution de l'organisation mathématique des programmes.
Enfin nous étudions le traitement de la numération dans les évaluations nationales de 2009 : ces évaluations de CM2 ont eu lieu au mois de janvier et portent sur les compétences

[56] Les programmes sont découpés par « cycles » à l'école primaire. A l'école élémentaire, le cycle 2 concerne la dernière année de maternelle (GS), la première et deuxième primaire (CP et CE1) et le cycle 3 la troisième, quatrième et cinquième primaire (CE2, CM1, CM2).

attendues au cycle 3 relativement au programme officiel de 2008 (ces programmes ont été appliqués au CM2 dès la rentrée 2008).

Concernant les manuels, nous avons choisi les quatre ouvrages suivants : « *Cap Maths* » CE2, éditions Hatier (2007 et 2011), « *J'apprends les maths* » CE2, éditions Retz (2003 et 2010), « *La tribu des maths* » CE2, édition Magnard (2008).
Ce sont des manuels dont l'auteur principal est chercheur ou fortement influencé par les travaux de didactique des mathématiques et formateur d'enseignants du premier degré. Ils sont tous accompagnés de guides pour l'enseignant qui peuvent apporter des informations supplémentaires concernant les techniques et éléments technologiques attendus des élèves et/ou visés.
Nous complèterons l'analyse des manuels par l'étude de l'ouvrage « Apprentissages numériques CE2 », aux éditions Hatier (1995, 2005), collection *ERMEL* (équipe de recherche pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, de l'institut national de recherche pédagogique, INRP). Nous nommerons cet ouvrage *ERMEL* pour simplifier. Il ne s'agit pas d'un manuel mais d'un guide destiné aux enseignants qui propose principalement des problèmes visant à construire de nouvelles connaissances ou à en réinvestir dans de nouveaux problèmes. Il est accompagné d'un cahier pour l'élève qui ne propose que des exercices d'entraînement aux situations décrites dans le guide et vient donc en complément du guide.
La date de parution initiale d'*ERMEL*[57] aurait pu nous amener à exclure cette ressource de notre étude. Cependant, elle a eu et semble encore avoir une place privilégiée dans le milieu de la formation initiale et continue des enseignants et à ce titre c'est un élément essentiel de l'étude la transposition didactique des savoirs numériques à l'école primaire. Ainsi beaucoup d'enseignants débutants ou passant par la formation continue connaissent la collection *ERMEL* et certaines des situations qui y sont proposées, même s'ils n'utilisent pas cette ressource au quotidien pour faire la classe.
Le manuel Cap Math est assez proche d'*ERMEL* dans certains choix effectués (R.Charnay le directeur de collection de Cap Math a beaucoup expérimenté dans l'équipe *ERMEL*), mais ce manuel a une progression par séances (alors qu'*ERMEL* propose un découpage par thèmes) et pour chaque séance (ou presque) une page associée dans le manuel avec des exercices d'entraînement.

II. Étude des instructions officielles récentes

On trouvera en annexe les documents officiels utilisés pour cette étude.

II.1 OM des Instructions Officielles de 2002

Le secteur « Connaissance des nombres entiers naturels » est découpé en trois thèmes : « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels », « Ordre sur les nombres entiers naturels » et « structuration arithmétique des nombres entiers naturels ». Seuls les deux premiers nous intéressent. Les commentaires ne mettent pas en évidence de lien entre ces deux thèmes.

[57] Edition de 1995. La réédition de 2005 n'offre aucun changement hormis la conversion des prix en euros, pour les problèmes mettant en jeu la monnaie.

Voici la première compétence citée :
« Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position ».
Dans les commentaires, il est précisé que « la valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent » sans que les tâches mettant en jeu ces techniques de groupements et d'échanges ne soient clairement explicitées. De plus les conversions apparaissent ici de manière contextualisée à des actions sur du matériel. Le savoir décontextualisé (relations entre unités) sur lequel ces activités s'appuient n'est pas donné.
Les commentaires se centrent ensuite sur des précisions concernant des attentes pour les formulations utilisées. On peut y lire que « les mots dizaines, centaines, milliers… sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de « paquets » de 10, de 100, de 1000... ». Il apparaît donc une certaine défiance vis-à-vis de l'ostensif EUN. D'ailleurs, on peut lire cette fois dans les commentaires des programmes de cycle 2 (IO 2002) : « L'utilisation du vocabulaire (dizaine, centaine) ne constitue pas un objectif prioritaire : les expressions « paquet de dix, paquet de cent » sont en effet plus explicites. »
Un exemple de formulation est donné concernant l'utilisation des unités de numération, laissant apparaître le type de tâches *nombre de* relativement à cette première compétence :

> Les formulations du type « Combien y a-t-il de paquets de 10 dans 8 926 ? » accompagnent celles comme « Quel est le nombre de dizaines dans 8926 ? ». (IO 2002)

Il y a donc un certain flou autour de cette première compétence des programmes.

$T_{Tec/epd}$ et $T_{Tepd/ec}$: traductions d'EC en EPD et réciproquement (décomposer/recomposer)

On trouve ensuite ces types de tâches sous cette formulation :
« – Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.
– Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000, etc. »
Il est important de souligner le mot « diverses » dans la formulation utilisée puisque cela indique qu'il ne s'agit pas de se limiter aux traductions canoniques. Des exemples de décompositions et recompositions sont donnés dans les commentaires pour préciser cela. Certains nécessitent une simple association unité/rang (décomposition canonique), comme c'est le cas pour les exemples suivants :

- $T_{Tec/epdc}$: « 5324 = (5 × 1000) + (3 × 100) + (2 × 10) + 4 »
- $T_{Tepdc/ec}$: « (3 × 100) + (5 × 1 000) + (6 × 10) = 5 360 ».

Les autres exemples peuvent amener à l'utilisation des conversions entre les unités (donc le principe décimal) :

- $T_{Tec/epd}$: « (53 × 100) + 24 »
- $T_{Tepd/ec}$: « (3 × 100) + (12 × 10) + 8 + (5 × 1000) = 5 428 ».

La première ((53 × 100) + 24) pourrait être justifiée par les relations entre les unités d'ordre 2 et les unités d'ordre 3 (ou encore « paquets de 100 » et « paquets de 1000 »), ce qui n'est pas explicite dans les commentaires :

> « De telles égalités sont produites en référence à la valeur des chiffres en fonction de leur position plutôt qu'à l'utilisation du tableau de numération. Elles peuvent également être contrôlées par un calcul ».

L'utilisation de la « valeur des chiffres en fonction de leur position » s'applique bien au cas de la décomposition canonique (dans 5324, le 5 étant au quatrième rang, il vaut 5×1000, etc.), mais le texte du programme ne fait pas de différence avec les cas mettant en jeu des

conversions. Dans ce cas, implicitement, le calcul, et en particulier la « règle des zéros », pourrait prendre en charge les relations entre unités, comme l'a montré Chambris dans l'étude de la transposition didactique de la numération depuis les années 1980.
Ainsi même si le type de tâches est susceptible d'amener un travail sur les conversions entre unités (pour déterminer *diverses* décompositions/recompositions), l'utilisation des EPD et la défiance déjà indiquée vis-à-vis des EUN rendent transparentes les relations entre unités, au risque de les remplacer par des techniques de calcul.
Du coup, le principe décimal de la numération n'apparaît pas clairement comme un savoir essentiel de la numération. Pourtant il nous semble voir dans les programmes ou commentaires quelques références à ce savoir, notamment dans les autres notions du programme. Tout d'abord dans les commentaires du document d'application de cycle 2, concernant l'addition posée, on peut lire : « la technique utilisée doit être justifiée (notamment le principe de la retenue) en référence aux connaissances sur la numération ». Dans les commentaires pour le cycle 3, cela est moins explicite : « pour chacune des autres opérations (soustraction, multiplication et division euclidienne), une technique doit être mise en place au cycle 3 en s'attachant en priorité à assurer la compréhension de son fonctionnement » : on ne précise plus le lien avec les connaissances de numération. Il nous semble cependant qu'il y ait bien une volonté de justifier ces techniques opératoires en s'appuyant sur le principe décimal (notamment pour le principe des retenues). Les relations entre unités apparaissent aussi, cette fois plus explicitement, dans les commentaires du document d'application de cycle 3 sur les nombres décimaux. En effet, pour la compétence « déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule en fonction de sa position », on peut lire : « la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre qui est écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale) ». Tout cela nous laisse penser que, pour les auteurs du programme 2002, le principe décimal de la numération est contenu dans l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position », mais reste implicite.

$T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$: associer le nom du nombre à l'EC et réciproquement (écrire/nommer)

Ce type de tâches se retrouve sous cette formulation :
« Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres), pour des nombres jusqu'à la classe des millions ».
Puisqu'il s'agit de lecture de grands nombres les éléments technologiques cités dans les commentaires portent sur le découpage en classes. Les auteurs précisent : « l'intérêt du découpage en tranches de trois chiffres pour la lecture usuelle des nombres (fondée sur les classes : mille, millions, milliards…) est souligné ».

T_{Dc} : dénombrer une collection

On peut noter que ce type de tâches est évoqué dans l'introduction de la partie « connaissance des nombres entiers naturels » du document d'application :

> *« Ces connaissances ne doivent pas fonctionner uniquement pour elles-mêmes. Elles doivent, le plus souvent, être envisagées en relation avec des activités de résolution de problèmes : dénombrement, mesurage, graduation ».*

Cependant il n'apparait pas dans les compétences du programme de cycle 3. Il apparaît pourtant dans les programmes de cycle 2 sous cette forme : « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines ».

T_{AR} : avancer/reculer

On trouve également le type de tâches « avancer/reculer » (dans la suite écrite ou orale) sous ces formulations :
« – Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre » (dans la partie « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels ») ;
On peut lire dans les commentaires qu'« il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) ». L'élément technologique en jeu est le principe algorithmique de la suite écrite des nombres.

Divers types de tâche liés à l'aspect ordinal du nombre

Dans la partie « Ordre sur les nombres entiers naturels » ou trouve ces types de tâches :
– « Comparer deux entiers naturels, utiliser les signes < et > (lus «plus petit » et « plus grand »).
– Ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant.
– Situer un nombre dans une série ordonnée de nombres.
– Écrire des encadrements d'entiers entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs… »
– Situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100… ».
La technique de comparaison n'est pas explicitée dans les commentaires mais il est précisé qu' « au cours de l'apprentissage, les procédures de comparaison font l'objet d'une explicitation par les élèves ». Cela se différencie de ce que l'on a pu voir pour les autres types de tâches, pour lesquelles il n'y a pas ce genre de considération.

Conclusion sur les IO 2002

Nous avons pu voir que derrière l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » les auteurs des programmes incluent les deux principes de la numération. Les conversions sont évoquées dans les commentaires mais de manière contextualisée à un matériel puisqu'il est fait mention d'« activités de groupements et d'échanges ». Le type de tâches de conversion entre EUN (décontextualisé) est absent du programme, ce qui ne permet pas d'identifier le principe décimal comme un savoir essentiel pour l'apprentissage de la numération.
On peut toutefois trouver les types de tâches *nombre de* et déterminer *diverses* décompositions/recompositions qui mettent en jeu ce savoir, mais la défiance que nous avons relevée vis-à-vis des EUN et l'utilisation privilégiée des EPD dans les commentaires pourrait amener à faire un travail s'appuyant davantage sur des techniques de calcul.
Les savoirs de la numération semblent travaillés principalement à travers les questions de traduction : les passages d'une représentation à une autre (écrit/EPD et écrit/oral) à travers décomposer/recomposer ou écrire/nommer. Même s'il est indiqué que la numération est un outil de « *dénombrement, mesurage, graduation »,* les problèmes mettant en jeu l'aspect cardinal du nombre ne sont pas évoqués dans les compétences du programme. La principale

fonction de la numération apparaît liée à l'ordre, avec des problèmes de comparaison, rangement, encadrements de nombres, ... ainsi qu'à la traduction du nom du nombre à l'EC et réciproquement. Le principe décimal n'y est pas un enjeu en soi.

Les évaluations nationales liées aux programmes 2002

Evaluation nationale de CE2, 2005

Rappelons tout d'abord que ces évaluations portent sur le programme de cycle 2 car elles ont lieu en début d'année de CE2. On retrouve toutefois dans le programme de cycle 2 quasiment les mêmes compétences que dans celui de cycle 3. Comme nous l'avons déjà relevé, il y a une compétence qui n'apparaît pas en cycle 3 : « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines. »

Pour le cycle 2, les différences principales avec le programme de cycle 3 relèvent de la taille des nombres utilisés (nombres inférieurs à mille au cycle 2) et de l'absence de décompositions/recompositions au cycle 2.

Pourtant dans ces évaluations CE2, on ne retrouve que les types de tâches :

- « désigner par écrit des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000)
- comparer des nombres entiers naturels ».

Les compétences suivantes des programmes de cycle 2 ne sont pas l'objet d'un exercice d'évaluation :

- « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines.
- Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.
- Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100 (en avant ou en arrière), à partir de n'importe quel nombre, en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné ».

Ce sont des types de tâches qui, notamment au CE1 avec les nombres à trois chiffres, pourraient permettre de mettre en jeu le principe décimal de la numération. Au contraire ici les compétences évaluées au CE2 font uniquement intervenir le principe de position de la numération à travers l'écriture en chiffres et la comparaison.

Evaluation nationale 6ème, 2005

Dans cette évaluation, qui porte cette fois sur les compétences de cycle 3, parmi les compétences des programmes 2002, une seule est évaluée : « désigner par écrit des nombres entiers naturels ». On trouve un seul grand domaine « connaissance des nombres » qui regroupe la connaissance des nombres entiers naturels et des nombres décimaux, contrairement aux programmes où ils sont séparés. Tous les autres items de ce domaine concernent les nombres décimaux (non entiers). Le fait qu'il s'agisse d'une évaluation 6ème permet certainement d'expliquer en grande partie cela : on évalue plutôt des compétences travaillées en fin de cycle. Or les types de tâches concernant les nombres entiers sont principalement travaillés en début de cycle 3, comme le montre le tableau de programmation extrait des documents d'application des programmes de cycle 3 (annexe). Au début du cycle 3 il s'agit d'un travail de « construction, structuration », alors qu'à la fin du cycle c'est principalement un travail de « consolidation, utilisation ».

La compétence « valeur des chiffres en fonction de leur position » est évaluée seulement pour les nombres décimaux dans les exercices suivants de traduction d'une fraction décimale en écriture décimale :

Exercice 15

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celle qui est égale à 96 + $\frac{2}{100}$.

96,200 962,100 296 96,02 98,100

Exercice 26

Entoure le nombre égal à la fraction $\frac{724}{100}$.

0,724 7,24 72,4 724,100 72 400

Figure : deux exercices de l'évaluation $6^{ème}$ de 2005

Alors que le premier met en jeu principalement la position des centièmes dans l'EC, le deuxième met en jeu des conversions (cent centièmes = une unité, dix centièmes = un dixième). On trouve également deux exercices mettant en jeu ces connaissances, mais relevant d'autres thèmes (ordre, calcul) :

- encadrer un décimal entre deux entiers consécutifs,
- et multiplier ou diviser par 10 ou 100 un nombre entier ou décimal (23×10 35,2×100, 630:10 et 9367:100)

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 2, on peut noter que dans les évaluations $6^{ème}$ de septembre 2002 (qui portaient donc sur le programme de 1995) on pouvait trouver deux items pour les nombres entiers avec présence des unités de numération et portant sur la compréhension de la valeur des chiffres en fonction de leur position (écrire en chiffres « cent vingt-trois plus deux dizaines » et compléter : « 25 dizaines = … unités »). Nous n'avons pas trouvé de trace des unités de numération dans l'évaluation $6^{ème}$ de 2005.

<u>Conclusions sur les évaluations CE2 et $6^{ème}$ de 2005</u>

En CE2 il y a encore un besoin de construire et de structurer le travail sur la numération dans le champ des entiers (comme on peut le lire dans les documents d'application des programmes de cycle 3), mais tout ce travail de construction n'apparaît pas dans l'évaluation de $6^{ème}$ qui porte plutôt sur des compétences de fin de cycle sur les nombres décimaux et se limite pour les entiers à la désignation par écrit. Cependant on peut remarquer, que même dans les évaluations CE2 (qui portent sur la fin du cycle 2 où le travail de construction de la numération est déjà bien commencé), les types de tâches qui pourraient mettre en jeu des conversions entre unités (dénombrer, *nombre de*, donner diverses décompositions …) ne sont pas évalués.

Une grande importance est accordée par l'institution scolaire aux types de tâches $T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$ (écrire/nommer) et T_C (comparer) qui s'appuient principalement sur la position des chiffres dans l'EC.

II.2 OM des Instructions Officielles 2007 et 2008

II.2.1 Le programme 2007

Ces programmes ont servi à faire des ajustements pour mettre en cohérence et adapter le programme 2002 au socle commun. Il ne s'agit donc pas vraiment de « nouveaux programmes ». Nous allons étudier les principales adaptations réalisées.
On y retrouve le même découpage qu'en 2002 : « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels » et « Ordre sur les nombres entiers naturels » à l'intérieur de la même grande catégorie du programme (domaine) : « connaissance des nombres entiers naturels ».
Dans la phrase d'introduction du domaine, on retrouve mot pour mot une phrase du texte de 2002 :

> « Ils doivent comprendre les principes de la numération décimale, en particulier que la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture des nombres, en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent ». (p.91)

Les conversions entre unités apparaissent donc contextualisées dans les « activités de groupements et d'échanges ». On retrouve dans ce programme les mêmes compétences que celles de 2002.
Le type de tâches *nombre de* disparaît du fait de la non publication des commentaires du programme de 2002. Or, il s'agissait du principal type de tâches mettant en jeu des conversions. La mise en œuvre de conversions ne semble alors plus tenir qu'aux décompositions/recompositions et en particulier au fait d'en déterminer « diverses ».
Au contraire, le lien entre numération et calcul posé est nettement réaffirmé en 2008 :

> « Le travail de construction et d'appropriation de ces techniques fait appel à de nombreuses propriétés du système d'écriture des nombres (numération décimale de position). L'apprentissage doit être conduit avec le souci qu'en soit assurée la compréhension. » (p.94)

Enfin concernant les ostensifs, on peut trouver une trace des EPD qui sont toujours privilégiées avec les décompositions/recompositions : « donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000…, et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition ». Avec la disparition du document d'application, l'ostensif EUN n'est plus mentionné dans le texte du programme.
Le texte du Socle Commun de 2007 n'apporte rien de nouveau par rapport au texte du programme, nous ne l'avons donc pas utilisé.

II.2.2 Le programme 2008

C'est un texte qui, dans son ensemble, est nettement raccourci par rapport aux textes précédents. Voilà ce qui est indiqué dans le préambule :

> « L'ambition retrouvée de l'école primaire passe par des programmes plus courts, plus clairs et plus ambitieux : tel est l'objectif des programmes présentés ci-après.» (p.10)

L'étude du système de numération se fait toujours dans le secteur intitulé « Les nombres entiers naturels » (qui remplace « connaissance des nombres entiers naturels »).
On n'a plus le découpage en thèmes comme dans les textes précédents, ni la dissociation connaissances/capacités du programme 2007.
Les compétences attendues en fin de cycle sont :

- « principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ;
- désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ;
- comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes > et < ; »

Ce sont des compétences qui étaient déjà présentes dans les programmes précédents, avec les mêmes formulations. Cependant on ne retrouve plus de trace des décompositions et recompositions (diverses) qui ont peut-être été intégrées à l'élément technologique « principe de la numération décimale de position … ». Cela entraîne la disparition des EPD dans les textes des programmes, mais en contrepartie cela laisse une certaine liberté pour le choix des ostensifs.
On peut se demander à quel type de tâches correspond désormais l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position ». Si on se réfère aux IO de 2002 cela pourrait faire référence au type de tâches *nombre de*.
On ne trouve plus de référence au type de tâches « Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre ».
Il ne reste donc plus que les compétences sur la « valeur des chiffres en fonction de leur position » qui pourraient permettre de mettre en jeu des conversions entre unités. Mais le manque de visibilité des types de tâches associés à cette formulation (notamment si on ne prend pas en compte les documents d'application[58] des programmes 2002) peut nous faire penser que le principe décimal est minoré dans ces derniers programmes.
On peut par exemple lire dans le tableau de progression qui est proposé à la fin du programme, et qui résume les compétences attendues pour la classe de CE2 :
« *Les nombres entiers jusqu'au million*
- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres ».
Le « principe de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres » se transforme donc ici en « connaître […] les nombres entiers jusqu'au million ». On peut même se demander si « connaître » ce n'est pas finalement « savoir écrire et nommer ». D'ailleurs cela est le cas au CP ou au CE1 où on peut lire : « connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers ». « Connaître » c'est donc bien ici savoir écrire et nommer les nombres.
Concernant le calcul posé, même s'il est précisé de manière générale que « L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification. » (p.23), dans le domaine du calcul il est seulement fait mention du fait que : « la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable » (p.24). Le lien entre calcul posé et numération n'est plus évoqué.
Afin d'affiner ce constat, nous poursuivons avec l'étude des évaluations nationales associées à ce programme.

[58] Ces documents ne sont plus cités comme ressource pour les enseignants dans les textes du programme 2007. Il est mis en place, pour ces programmes, d'autres ressources, appelées "Ressources pour faire la classe" qui sont éditées par le CNDP. Il ne s'agit pas de commentaires approfondissant les compétences citées dans le programme, c'est pourquoi nous ne les avons pas utilisées, même si elles traitent des nombres (« Le nombre au cycle 2 » et « le nombre au cycle 3 »).

II.2.3 Les évaluations nationales CM2 de 2009

Concernant les nombres entiers, on trouve les types de tâches suivants : écrire un nombre entier en chiffres, comparer deux nombres entiers, placer un nombre entier sur une droite graduée. Pour ce dernier l'intérêt nous semble plutôt du côté du placement des nombres décimaux (car pour les nombres entiers la taille des nombres est petite et, après avoir repéré le type de graduation, il suffit de compter, voir en annexes). Comme pour les évaluations 6ème de 2005, les connaissances de la numération sont évaluées principalement pour les nombres décimaux dans un exercice de traduction écriture fractionnaire (fraction décimale), écriture en lettres et écriture décimale ainsi qu'un exercice d'encadrement entre deux entiers consécutifs.
Pour les exercices mettant en jeu des nombres entiers, ce sont des types de tâches pour lesquels seul le principe de position de la numération est en jeu. On ne voit pas d'autres ostensifs en jeu ici que l'EC et le nom du nombre, alors que pour les décimaux les mots « dixième » et « centième » sont utilisés.
Nous pouvons faire le même constat pour les évaluations CM2 de 2010 à 2012.

Conclusion sur les IO 2007 et 2008 et les évaluations nationales associées

Après les programmes de 2002, nous assistons à une diminution progressive du texte du programme qui a pour conséquence de laisser un flou sur les types de tâche se rattachant à l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position ». Certains types de tâches prennent une place importante dans les évaluations (écrire/nommer et comparer), d'autres au contraire en sont complètement absents. Cela est dans la continuité des évaluations liées aux programmes de 2002.
Nous avons noté la disparition des décompositions/recompositions dans le texte du programme et donc de l'ostensif EPD qui y était associé dans les programmes précédents. Tout cela concourt à une centration sur les types de tâches comparer et écrire/nommer.
Nous allons maintenant poursuivre avec l'étude de quatre manuels de CE2, qui permettra d'affiner cette étude.

III. Etude de quatre manuels de CE2 : « *Cap Maths* », « *J'apprends les maths* », « *La tribu des maths* » et « *ERMEL* »

L'étude des instructions officielles récentes a montré que le principe décimal n'est pas explicitement désigné comme un enjeu essentiel pour l'enseignement de la numération et nous amène à nous poser certaines questions pour l''étude des manuels :

- le principe décimal est-il davantage un enjeu dans ce que proposent les manuels ?
- des types de tâches permettant de mettre en jeu des conversions entre unités sont-ils proposés ? Conformément aux programmes de 2002 et 2007 les décompositions/recompositions prennent-elles en compte l'adjectif « diverses » de ces programmes ? Le *nombre de* est-il proposé malgré sa disparition dans les programmes de 2007 et 2008 ? Quelles sont les techniques et éléments technologiques qui sont alors proposés ?

- observe-t-on, comme dans les programmes, une centration sur les types de tâches écrire/nommer et comparer ?
- quels ostensifs sont utilisés ? L'utilisation des EPD est-elle privilégiée comme dans les programmes 2002 et 2007 pour les décompositions/recompositions ? Comment apparaissent les EUN ?

Nous commençons par présenter quelques éléments spécifiques de méthodologie liés à l'étude des manuels.

III.1 Des éléments spécifiques de méthodologie

Dans l'étude des manuels nous faisons le choix suivant des exercices :

- ils appartiennent au thème « nombres et numération » du manuel,
- ils utilisent des nombres supérieurs à mille.

Nous présenterons les types de tâches selon l'ordre décroissant de leur nombre d'apparitions dans les exercices du manuel. Cela nous permettra déjà de mettre en évidence les types de tâches les plus travaillés.

Nous n'avons pas pris en compte les activités courtes effectuées en début de séance qui se font à l'oral et/ou sur ardoise (activités d'« échauffement »). Ces activités participent souvent à un travail de la technique. Nous essaierons de reconstituer les techniques et technologies en jeu en nous appuyant notamment sur les livres du maître de ces manuels. Nous avons choisi, pour les types de tâches susceptibles de mettre en jeu le principe décimal de la numération[59], de faire une analyse plus approfondie. Cette analyse doit mettre en évidence les différentes techniques possibles (en appui sur l'OM de référence) en lien avec l'exercice (ou problème), c'est-à-dire en tenant compte des choix de variables didactiques, des représentations utilisées, des questions posées et des connaissances supposées des élèves. En particulier, nous nous demanderons quelle technique peut alors apparaître comme plus efficace ou plus économique pour répondre à la question posée. Met-elle en jeu le principe décimal de la numération ? Si c'est le cas, alors nous complétons l'analyse en revenant sur la façon dont est décrit cet enjeu de savoir pour l'enseignant. Ainsi cette analyse doit permettre d'identifier :

- le potentiel de la situation à mettre en jeu effectivement le principe décimal ;
- pour l'enseignant le potentiel de la ressource pour lui permettre de préparer et mettre en œuvre la situation en préservant cet enjeu.

III.2 L'organisation mathématique de la numération dans « *Cap Maths* CE2 »

Les séances de ce manuel ayant pour objectif un travail sur la numération sont les suivantes : U7S1 (unité 7 séance 1), U7S2, U7S3, U7S4, U9S2, U9S7, U10S5, U11S3, U11S4, U12S4, U12S7 (sur un total de 15 unités de 7 séances chacune).

Nous pouvons d'ores et déjà signaler que dans ce manuel il est annoncé un travail important mettant en jeu le principe décimal pour les nombres à 3 chiffres dans les unités 1 à 4, à travers différents problèmes de *décompositions*, *conversions*, *nombre de*, etc. Voici ce qu'expliquent les auteurs dans la partie introductive du guide de l'enseignant :

> « Cette étude se fait dans le prolongement de ce qui a été établi pour les nombres jusqu'à 1000. La difficulté supplémentaire tient au fait qu'une représentation par des groupements effectifs n'est plus possible et que ceux-ci doivent donc être évoqués de même que les

[59] Comme les conversions entre unités (T_{Ceun}), les traductions d'EUN en EC et réciproquement ($T_{Teun/ec}$ et $T_{Tec/eun}$), le nombre de (T_{Cnd}) et le dénombrement d'une collection (T_{Dc}).

équivalences entre par exemple 1 millier et 10 centaines ou 100 dizaines. Le recours aux décompositions utilisant 10, 100, 1000 … devient plus fréquent, en relation avec la justification des procédures de multiplication d'un nombre par ces puissances de 10. »

Pour le travail sur les nombres à 4 chiffres, du fait de la taille des nombres, les activités de groupement et d'échanges sont donc supprimées.
Voici un schéma récapitulatif de la chronologie des types de tâche pour l'OM de la numération dans ce manuel (en italique figurent les tâches principalement travaillées dans chaque « unité »).

Unité 7	Unité 9	Unité 10	Unité 11	Unité 12
- Écrire/nommer *- Avancer/reculer* *- Décomposer/ recomposer* *- Comparer* - Nombre de	- Écrire/nommer *- « Situer des nombres sur une droite graduée »*	*- Écrire/nommer* - Décomposer/ recomposer	*- Comparer* - Écrire/nommer	*- Nombre de*

Figure 26 : Schéma de la chronologie des types de tâches dans Cap Maths CE2 sur la numération (nombres à quatre chiffres)

Globalement on a donc une OM qui est proche de l'OM étudiée dans le programme de 2002, avec une prépondérance des types de tâches que l'on rencontre dans les évaluations nationales : écrire/nommer et comparer. Nous ne détaillons pas le travail fait sur ces deux types de tâches.
Nous indiquons pour chaque séance entre parenthèses le nombre d'exercices où le type de tâches est travaillé.

T_{CR} *: comparer, ranger des nombres*

U7S2 (2), U7S3(1), U7S4(4), U9S4(7), U10S5(2), U11S3(1), U11S4(8)
En U7S2, les auteurs précisent la technique de comparaison attendue : « en référence à la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres (selon leur position) ». La technique est ensuite formulée dans le bilan : « il faut regarder le nombre de chiffres et, s'il est identique, s'intéresser aux chiffres de plus grande valeur, en partant de la gauche ». Cette technique est mieux précisée dans l'aide-mémoire du manuel, appelé « dico-math », (p.5) dans le cas de nombres à 4 chiffes. Le principe de position y apparait bien comme élément technologique.

$T_{Tec/n}$ *et* $T_{Tn/ec}$ *: écrire/nommer*

U7S1(3), U7S3(3), U9S2(1), U9S7(1), U10S4(3), U10S5(4), U12S7(1)
La description de la séance U7S3 proposée dans le guide pour l'enseignant indique un appui sur la décomposition des nombres (éventuellement avec le tableau de numération) pour justifier la technique pour écrire/nommer, en faisant référence à la trace écrite proposée dans le « dico-maths ». Pourtant dans cette trace (extrait ci-dessous), pour la lecture de 7 214 par exemple, ce qui est mis en évidence n'est la position du mot mille au rang des milliers (ce qui aurait pu se faire avec une flèche orientée vers le chiffre 7) mais entre le rang des milliers et celui des centaines, sans montrer le lien avec la valeur du 7 :

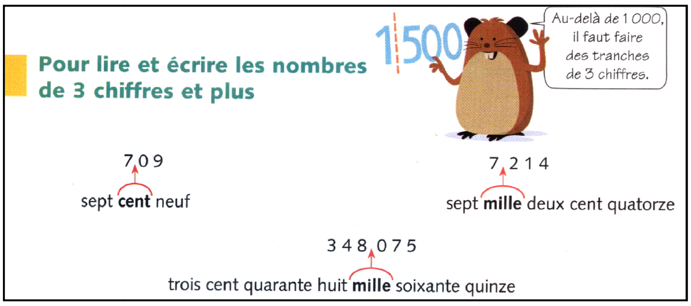


Figure 27 : extrait du « dico-math » (p.2) du manuel Cap Maths CE2

Ce qui est alors mis en avant est plutôt le découpage en tranches de 3 chiffres pour la lecture des grands nombres.

T_{AR} : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres

U7S1(2), U7S3(2)
Plusieurs techniques apparaissent. Elles s'appuient sur divers éléments technologiques : la suite numérique écrite comme objet social de référence, un compteur, la suite numérique orale des nombres, la calculatrice et enfin le principe décimal (ajouter/retrancher 1 en faisant les groupements et échanges éventuellement avec étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$ …). Dans ce cas, il faut noter que les relations entre les unités n'interviennent que pour les nombres à trois chiffres.
On peut lire dans le guide du maître (U7S3) : « 2 099 c'est 2 cartons « 1 000 », 9 cartons « 10 » et 9 cartons « 1 » ; avancer de 1 c'est ajouter un carton 1 ; on a alors 10 cartons « 1 » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 10 » ; on a alors 10 cartons « 10 » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 100 ». » Cela met donc en jeu les relations entre unités à travers ce remplacement de carton. Notons au passage que ce mot « carton » n'aide pas à la décontextualisation, contrairement aux EUN qui peuvent être utilisées dans différents contextes.
Il est important de noter que même si les deux exercices en question utilisent les nombres à 4 chiffres, il n'y a pas de changement du chiffre des milliers dans les nombres choisis (pas d'ajout, par exemple, d'un carton de 100 à 9 cartons de 100), donc la relation entre 10 paquets de 100 et 1000 ne pourra pas apparaître (ni 100 paquets de 10 …).

T_{Cnd} : nombre de

U7S1(5), U12S4(1)
La première séance sur les nombres à quatre chiffres est consacrée au nombre 1000. Il y a un travail sur les relations entre 10 et 100 et entre 100 et 1000. Voici un des exercices proposés (exercice 4, U7, S1) :

Figure 28 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 7, séance 1 (exercice 4)

Voici ce qu'on peut lire dans le guide du maître, concernant cet exercice : « après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :

- 1000 = 10×100 (il faut dessiner 100 rangées de 10 unités) avec éventuellement utilisation de la règle des zéros,
- comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100 … »

Le « éventuellement » que nous avons souligné rend difficile l'interprétation de la technologie en jeu : est-ce que 1000 = 10×100 par définition du nombre 1000 ou bien est-ce que c'est « la règle des zéros » qui a le rôle de technologie ou encore l'addition itérée de dix fois 100 ?
On retrouve également ce type de tâches dans la dernière séance du manuel consacrée à la numération. Il s'agit alors de rechercher le *nombre de* paquets de 10 ou de 100 dans 2416.

Chercher Problèmes

Pour préparer la fête de l'école, la classe a reçu de longues bandes de tissu.
Plume découpe des rubans de 2 cm de long, Maïa des rubans de 10 cm de long et Tim des rubans de 100 cm de long.

1. Anaïs donne :
– une bande de 26 cm de long à Plume ;
– une bande de 70 cm de long à Maïa ;
– une bande de 200 cm de long à Tim.
Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?

2. Anaïs donne ensuite à chacun une bande de 640 cm.
Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?

3. Si Anaïs donnait à chacun une très longue bande de 2 416 cm, combien chacun pourrait-il découper de rubans ?

Figure 29 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 12, séance 4

Ce problème semble permettre de mettre en jeu le principe décimal à travers des conversions de dizaines en centaines ainsi que dizaines et centaines en milliers. Il peut alors être intéressant d'analyser plus finement les techniques que les élèves peuvent utiliser et mettre en évidence celle(s) qui est (sont) visée(s) par les auteurs ainsi que les éléments technologiques associés.

Analyse des techniques possibles et de l'enjeu de la question 3, U12S4.

Le problème qui nous intéresse plus particulièrement est celui de la question 3 puisqu'il met en jeu les relations dizaines/milliers et centaines/milliers. Il s'agit de chercher respectivement le nombre de rubans de 2 cm, 10 cm et 100 cm que l'on peut faire avec une bande de 2 416 cm.
Si on suit les préconisations du guide pour l'enseignant, les élèves auront alors déjà cherché les questions 1 et 2 (qui servent à la dévolution du problème). Le milieu matériel ne contient qu'une bande de 26 cm, pour permettre aux élèves de s'approprier la question 1. La question 1 porte sur des nombres à 2 et 3 chiffres, elle permet aux élèves d'utiliser des techniques variées (avec des connaissances anciennes) comme cela est précisé dans le guide : dessin, addition ou soustraction itérée, multiplication ou utilisation de la numération. D'ailleurs les auteurs précisent également que

> « la présence de rubans de 10 cm et 100 cm est destinée à souligner la spécificité des nombres 10 et 100 dans ce problème. Avec eux, une « lecture directe » du résultat sur le nombre donné est possible » (p.263).

L'enjeu est donc bien d'utiliser les connaissances de numération dans un problème (sans indication donnée à ce sujet), en particulier la troncature à l'unité de numération voulue

(dans 2416 il y a 24 centaines). L'objectif annoncé dans le guide est de « trouver combien il y a de fois 10, 100 … dans un nombre donné ».
C'est dans la mise en commun de la deuxième question que certaines techniques seront mises en avant :

> « plusieurs procédures sont examinées, mais en mettant particulièrement en évidence celles qui sont plus efficaces […] utiliser la multiplication par 10 ou par 100 […] ou utiliser le fait que dans 640 il y a 64 dizaines ou 6 centaines, reconnues comme plus rapides et efficaces que d'autres procédures par ajouts ou retrait successifs » (p.263).

On peut noter que la multiplication par 10 ou par 100 sert à la fois :

- à trouver le résultat : s'il faut chercher un nombre qui multiplié par 10 donne 640, on applique la règle des zéros « à l'envers »,
- à vérifier comme cela est proposé dans le guide (« validation par un calcul multiplicatif »).

Quand les élèves sont confrontés au cas du nombre 2416, qui demande de déterminer le *nombre de* centaines et dizaines dans un nombre à 4 chiffres, les techniques visées ont déjà été mises en évidence (elles sont dans le milieu). Les élèves doivent alors étendre cette technique au cas d'un nombre à 4 chiffres, c'est l'enjeu de la question 3.
On peut tout de suite noter que le travail sur les nombres à 4 chiffres se fait par extension de ce qui est vu sur les nombres à 3 chiffres, l'hypothèse étant que si les élèves ont réussi pour un nombre à 3 chiffres ils vont étendre leur technique avec un nombre à 4 chiffres.
En effet il est tout d'abord possible de chercher à adapter la règle des zéros : nous obtenons 2400 = 24×100 ou 2410 = 241×10. La difficulté peut provenir du fait qu'il y a 6 unités alors pour le nombre précédent le chiffre des unités était 0, ce qui facilitait cette technique (cela est d'ailleurs indiqué dans le guide pour l'enseignant). Il est aussi possible de décomposer 2416 en 2×1000 + 4×100 + 10 + 6 mais cela nécessite alors de s'appuyer sur la relation 1000 = 10×100 pour en déduire que 2416 = 24×100 + 16 (puis idem avec 100 = 10×10 donc 2416 = 240×10 + 1×10 + 6 = 241×10 + 6).
Il est également possible d'utiliser la technique de lecture directe à partir de l'écriture chiffrée (troncature) : cependant cela demande de l'adapter là encore au cas d'un nombre à 4 chiffres. Si les élèves ont interprété par exemple la recherche du *nombre de* centaines comme se faisant à partir du premier chiffre situé à gauche, cela ne fonctionne plus ici : il faut prendre en compte le rang des milliers. Les élèves pourraient également prendre en compte uniquement le chiffre au rang des centaines (respectivement dizaines) et conclure qu'il y a 4 bandes de 100 cm (respectivement 1 bande de 10 cm).
Un contrôle peut se faire par un calcul d'addition itérée par 100 (mais pas par 10 car ce serait trop long sauf par calcul oral accéléré 10, 20, 30,…100, 200) ou d'une multiplication par 100 (ou par 10 ce serait possible cette fois). Le fait d'avoir présenté la multiplication comme moyen de vérification dans la mise en commun précédente peut amener les élèves à l'utiliser. Cela peut alors leur permettre d'affiner leur technique. Par exemple un élève qui effectue la multiplication 4×100=400 (règle des zéros) peut comparer ce résultat à 2416 et chercher comment utiliser cette règle pour obtenir 2400.
D'autres techniques sont encore possibles : faire des additions itérées ou des dessins mais cela pourrait être fastidieux pour les bandes de 10 cm (qui sont demandées avant celle de 100). Les techniques de conversion entre unités demandent de connaître la relation entre dizaines et milliers puis entre centaines et dizaines pour déterminer le nombre de bandes de 10 cm (1 millier = 100 dizaines … puis 1 centaine = 10 dizaines), ce qui pourrait être difficile pour les élèves.

Pour la phase collective les auteurs proposent dans le guide d'exprimer les résultats sous la forme :

> « 2416 = (24×100) + 16 ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2416 (ce qui correspond également une technique qui a pu être utilisée) » (p.264)

L'écriture 2416 = (24×100) + 16 fournit une écriture de la réponse mais ne donne pas d'indication sur les techniques utilisées pour y aboutir (décomposition, multiplication ou troncature). C'est une technologie permettant de justifier mais pas de formuler une technique. En particulier, la technique de lecture directe n'est pas explicitée dans ce guide, ni dans le dico-maths (où d'autres techniques comme la technique de comparaison, par exemple, apparaissent). Les élèves devront alors induire la règle générale à partir de cet exemple, ce qui peut donner lieu à des interprétations erronées ou qui ne fonctionnent que pour certains nombres (comme par exemple « pour trouver le nombre de centaines je regarde les deux premiers chiffres de gauche », ce qui ne fonctionne plus pour un nombre à trois chiffres).
Notons pour finir qu'il n'y a pas de synthèse de fin de séance proposée dans le guide, cette activité ayant pour fonction, selon les auteurs, de préparer « le travail sur la division qui sera repris de façon plus intensive en fin d'année ».

$T_{Tec/epdc}$ et $T_{Tepdc/ec}$: Décomposer, recomposer un nombre

U7S2(3), U10S5(2)
Les décompositions/recompositions proposées ne mettent en jeu que le principe de position (traductions canoniques). Pour les recompositions proposées en U7S2 (que l'on aurait pu considérer également comme de la comparaison) par exemple les coefficients sont inférieurs ou égaux à 6 (nombre indiqué sur un dé).

2 Voici les feuilles de jeu de Tim et Maïa.
Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	dé	carte
1er tour	2	1 000
2e tour	4	10
3e tour	1	10 000
4e tour	6	1

Maïa	dé	carte
1er tour	3	100
2e tour	6	1 000
3e tour	5	1
4e tour	6	10

3 Anaïs a marqué 54 023 points.
Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?

4 Léo a déjà 40 047 points.
Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

Figure 30 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 7, séance 2 (situation « le plus grand total »)

Les deux variables « ordre des unités » et « absence d'unités à certains rangs » sont sans doute utilisées de façon à dépasser la simple juxtaposition des nombres. En effet dans la situation proposée l'élève doit faire « le plus grand total », en choisissant 4 fois parmi 5 unités différentes et dans l'ordre qu'il souhaite. Par exemple, s'il obtient successivement avec ses lancés de dés les nombres 1, 3, 6 et 4, il peut choisir 1 carte de 10, 3 cartes de 10 000 points, 6 cartes de 1000 points et 4 cartes de 100 points.
Le choix a été fait de travailler tout de suite avec des nombres à 4 et 5 chiffres, ce qui peut être lié à la volonté d'extension des techniques connues à partir de techniques de calcul comme nous l'avons déjà relevé. Voici ce que l'on peut lire dans les commentaires du guide du maître (U7S2) :

« Au début les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + … (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4×10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000. On laissera se développer ces différentes pratiques, et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre ».

Lors de la même séance dans la description de la synthèse (figure ci-dessous), les auteurs donnent le tableau de numération. Celui-ci fait apparaître dans la marge du haut à la fois les EPD et les unités de la numération, ce qui permet de prendre en charge l'association entre 1000 et 1 millier par exemple (donc entre puissances de dix et unités de la numération) qui est nécessaire pour la troisième technique citée. Il y a une volonté de faire un lien entre les différents ostensifs. L'ostensif EUN est utilisé pour nommer les rangs : on ne l'utilise pas dans l'activité de recherche mais seulement dans la synthèse.

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	**0**	**5**	**2**	**6**

Ce nombre s'écrit **40 526** (l'espace est destiné à repérer plus facilement le rang de chaque chiffre).
Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités.
Il se décompose en 4 × 10 000 + 5 × 100 + 2 × 10 + 6
ou sous forme d'addition du type :
10 000 + 10 000 + 10 000 + 10 000 + 100 + 100 + …,
ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

Figure 31 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 7, séance 2 (synthèse)

Ce tableau n'aide pas à la lecture du nombre car il ne fait pas apparaître les classes des unités simples et des milliers (seulement la décomposition unité par unité).
On retrouve la volonté de mettre en relation différentes façons de décomposer un nombre (EUN, EAPD et EPD) comme on peut le voir dans l'extrait du « dico-maths » (cahier de leçons de ce manuel) page suivante.

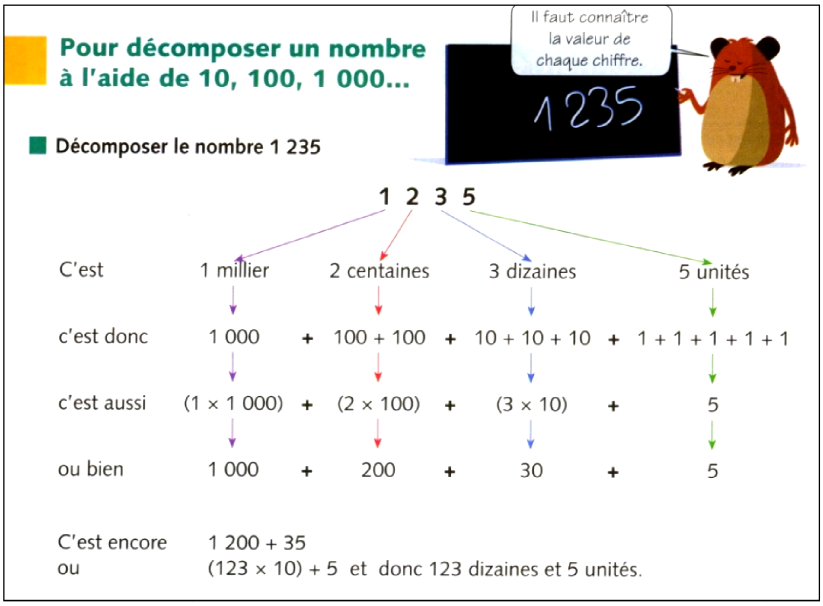


Figure 32 : extrait du « Dico maths » du manuel Cap Maths CE2

Nous pouvons également y voir une expression des relations entre les unités exprimées avec les unités de la numération qui sont donc utilisées dans la description des deux principes de la numération :

Dizaine : groupement de 10 unités	**1 dizaine = 10 unités**
Centaine : groupement de 100 unités Une centaine, c'est aussi un groupement de 10 dizaines.	**1 centaine = 100 unités** 1 centaine = 10 dizaines
Millier : groupement de 1 000 unités Un millier, c'est aussi un groupement de 100 dizaines. Un millier, c'est aussi un groupement de 10 centaines.	**1 millier = 1 000 unités** 1 millier = 100 dizaines 1 millier = 10 centaines

Figure 33 : extrait du « Dico maths » du manuel Cap Maths CE2

Ces équivalences sont données en dessous de différentes décompositions d'un nombre (23056 c'est 2 dizaines de mille, 3 milliers, 5 dizaines et 6 unités / 23 milliers et 56 unités / 230 centaines, 5 dizaines et 6 unités / 2 dizaines de mille, 30 centaines et 56 unités / etc.), ce qui suggère un lien entre les deux. Pourtant, nous n'avons pas trouvé de référence à ces équivalences dans le manuel ou le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire.
<u>Pour les décompositions</u> (par exemple 3400 à traduire en EPD) les techniques attendues ne sont pas explicitées dans le guide du maître où on peut seulement lire : « il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser ».

L'édition Cap Maths CE2 de 2011

L'édition de 2011 reprend à l'identique l'ensemble des activités précédentes avec une seule exception : nous avons trouvé (U11, S1 p.106) des activités de « groupements par 10 et 100 ». Il s'agit d'un problème (suivi d'exercices) dans lequel à partir d'un nombre de lettres indiqué, les élèves doivent déterminer le nombre de paquets de 10 ou de 100 enveloppes il faut commander pour pouvoir envoyer ces lettres. Ce problème apparaît comme un cas

particulier des problèmes de « groupements » dans le cas des groupements par 10 et 100, ce qui peut permettre d'utiliser des connaissances de numération, comme cela est indiqué dans le guide pour l'enseignant, dans les procédures attendues. La technique de troncature est appelée « reconnaissance directe ». Des exemples sont donnés comme : « on cherche combien il y a de centaines dans 12746, ce qui peut se trouver immédiatement : 127 et il en faut une de plus ». Le mode d'emploi de cette technique n'est pas formulé. Tout se passe comme si cette troncature allait de soi.
La séance suivante concerne les groupements par 40, 400, … La numération n'y est plus un enjeu.

Conclusion sur l'organisation mathématique de « Cap Maths CE2 »

L'OM de la numération dans *Cap Maths CE2* concerne principalement les OM_{trad} et OM_{ord}, avec une place centrale donnée aux types de tâches écrire/nommer et comparer. L'aspect cardinal du nombre apparaît uniquement dans l'activité d'introduction, qui mêle plusieurs introductions différentes du millier.
Pour les traductions d'écriture, cela concerne principalement écrire/nommer, mais quelques exercices de décompositions/recompositions sont proposés. Ce sont uniquement des traductions canoniques d'écritures que nous avons pu voir.
Le type de tâches *nombre de* est travaillé au début uniquement pour le nombre 1000 (combien de paquets de 10, de 100 dans mille ?) ce qui permet d'amener des éléments technologiques pour le nombre 1000 (principe décimal) mais ceux-ci ne sont plus utilisés par la suite puisque le travail est ensuite davantage centré sur écrire/nommer et sur la comparaison, qui ne mettent pas en jeu des conversions. On ne retrouve le type de tâches *nombre de* qu'en toute fin de séquence (cette fois pour des nombres quelconques) dans le contexte des mesures de longueurs et nous avons constaté qu'aucune technique n'est mise en avant pour ce type de tâches.
La plupart du temps les techniques visées sont justifiées par des décompositions/recompositions en EPD ce qui permet d'étendre aux nombres à quatre chiffres (et 5 chiffres également) les techniques de calcul connues pour les nombres à trois chiffres.
Le principe décimal apparait dans le « dico-maths » (mémento accompagnant le manuel) comme un savoir de référence. Toutes les relations entre unités jusqu'au millier y sont données. Cependant cela ne semble pas suffire pour en faire un outil permettant à l'enseignant de s'approprier l'enjeu de ce savoir du fait du peu d'activités qui y sont consacrées et du choix d'utilisation de la multiplication par des puissances de 10 pour étendre les connaissances acquises sur les nombres à 3 chiffres. Il faudrait une étude précise de ce qui est proposé sur les nombres à 3 chiffres pour affiner ce constat et en particulier voir si le principe décimal est un véritable enjeu dans les activités proposées.

III.3 L'organisation mathématique de la numération dans « *La tribu des maths* CE2 »

Trois doubles pages sont consacrées à l'étude des nombres à quatre chiffres (intitulées « les nombres jusqu'à 9999) :

- Double page n°9 : « Je fais la différence entre un ''chiffre'' et un ''nombre'' » (p.34-35 du manuel et p.57-60 du guide pour l'enseignant)
- Double page n°13 : « Je trouve la valeur d'un chiffre grâce à sa position dans le nombre » (p.42-43 du manuel et p.71-74 du guide pour l'enseignant)

- Double page n°23 : « Je situe les nombres les uns par rapport aux autres » (p.66-67 du manuel et p.111-114 du guide pour l'enseignant)

Voici un schéma récapitulatif de la chronologie des types de tâches proposés dans ce manuel :

Double page 9	Double page 13	Double page 23
- Comparer - Écrire/nommer - Avancer/reculer - Nombre de/chiffre des - Décomposer/ recomposer	- Comparer, placer des nombres sur une droite graduée - Écrire/nommer - Décomposer/ recomposer	- Comparer, placer des nombres sur une droite graduée, encadrer

Figure 34 : Schéma de la chronologie des types de tâches de l'OM de La tribu des maths CE2 sur la numération (nombres à quatre chiffres)

Un mémento est proposé en fin de manuel, dont deux pages sont consacrées à la numération (p.126-127) avec des synthèses concernant : « dire et écrire les nombres », « décomposer un nombre », « comparer et ranger des nombres ».

Des exercices de numération apparaissent également dans les exercices de bilan de fin de période (p.50 et p.72).

Ces exercices sont représentatifs des types de tâches les plus travaillés dans ce manuel : il s'agit de décomposer/recomposer, écrire/nommer et comparer/ranger.

T_C : Comparer (ou ranger)

Double page n°9 (1), double page n°13 (4), double page n°23 (6), p.72(1)

Ce type de tâches est l'objet d'un travail spécifique dans la double page n°23 mais il est déjà travaillé dans les leçons précédentes. La technique usuelle de comparaison de nombres est formulée dans le mémento. Elle ne s'appuie pas explicitement sur une décomposition des nombres mais utilise une formulation en termes de « rang » qui n'apparaît pas dans les autres synthèses (pour écrire/nommer et décomposer). La technique décrite présente l'intérêt d'être extensible aux nombres décimaux.

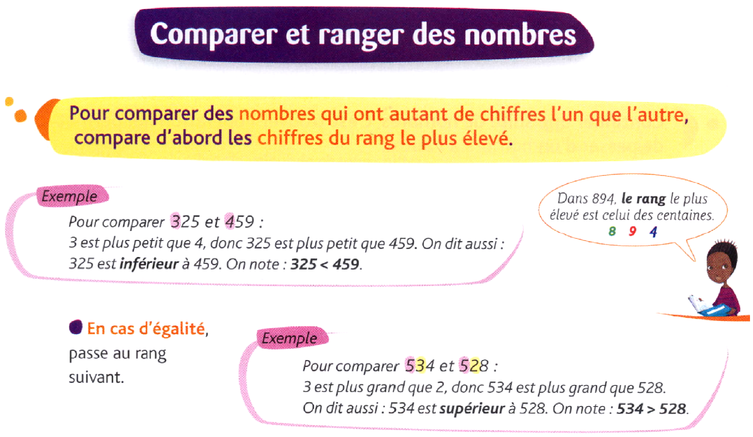


Figure 35: extrait du mémento de « La tribu des maths », p.127

Le lien entre la technique de comparaison et le principe de position n’est pas mis en évidence. La seule référence à ce savoir est dans la bulle en haut à droite où le rang des centaines est évoqué. La technique est expliquée (mode d’emploi) mais pas justifiée. Elle n’est traitée que pour le cas d’écritures ayant le même nombre de chiffres.
Il est à noter qu’un exercice de la double page 13 se démarque des autres exercices de comparaison proposés dans le manuel.

4 Recopie les écritures des nombres supérieurs à 7 000.

3 200 + 50 + 3

(9 × 1 000) + (6 × 100) + (6 × 20)

(8 × 1 000) + 10

6 900 + (2 × 100) + 1

5 700 + (8 × 100) + (9 × 10) + 9

(10 × 100) + 150 + 8

(6 × 1 000) + 700 + (6 × 10) + 8

Figure 36: exercice 4, double page 13, « La tribu des maths », p.43

Les élèves doivent recopier les nombres supérieurs à 7000 partir d’une écriture donnée en somme de nombres écrits en chiffres et en EPD. Il faut donc ici s’intéresser au rang des milliers et éventuellement prendre en compte des calculs qui dépasseraient mille avec les centaines qui restent. L’usage des EPD permet un passage par des techniques de calcul positionnelles, mais l’utilisation des conversions entre unités est également possible (dans 6900 il y a 69 centaines, ajoutées à 2 centaines cela fait 71 centaines, soit 7 milliers 1 centaine). Cet exercice peut alors permettre d’utiliser des connaissances relevant des deux principes de la numération.
Nous avons associé à ce type de tâches une activité d’encadrement à l’unité, la dizaine ou la centaine. Dans le manuel où aucune technique attendue n’est précisée. Cela peut se faire, par exemple pour 5885, en encadrant 5885 entre 5800 et 5900 donc entre 58 centaines et 59 centaines. Mais il serait aussi possible de réinvestir la technique du *nombre de* (troncature). Par exemple encadrer 5885 entre deux centaines consécutives peut être effectué en passant par le fait qu’il y a 58 centaines, donc il est compris entre 5800 et 5900.

$T_{Tec/eunc}$, $T_{Teunc/ec}$, $T_{Tec/epdc}$, $T_{Tepdc/ec}$: *décomposer/recomposer*

Double page n°9 (3), double page n°13 (2), p.50(2)
Contrairement à ce que l’on a pu voir dans les programmes de 2002 et 2007 il n’y a pas la volonté ici de proposer des décompositions variées : seule la décomposition canonique est attendue hormis dans un exercice (« labo maths » p.35). Différents ostensifs sont utilisés dans les exercices : EUNC, EAC, EPDC. C’est peut-être dans ce sens qu’a été interprétée par les auteurs la variété des décompositions demandées par les programmes. En voici un exemple en page suivante.

5 Décompose comme dans l'exemple.

2 364 = 2 milliers + 3 centaines + 6 dizaines + 4 unités

3 521 9 578 8 060

6 Décompose comme dans l'exemple.

3 541 = 3 000 + 500 + 40 + 1 = (3 × 1000) + (5 × 100) + (4 × 10) + 1

2 387 9 063 4 530

Figure 37: exercices 5 et 6, double page 9, « La tribu des maths », p.35

Cependant dans le bilan de période seules les décompositions/recompositions avec EUN sont utilisées même si les décompositions les plus utilisées dans le manuel sont celles utilisant les EPD :

1 Décompose les nombres.

245 = 2 centaines, 4 dizaines, 5 unités

a) 687 = ...
b) 1 099 = ...
c) 808 = ...
d) 1 104 = ...
e) 1 237 = ...

2 Recompose les nombres.

2 centaines, 4 dizaines, 5 unités = 245

a) 9 centaines, 9 dizaines, 9 unités = ...
b) 1 millier, 5 centaines, 3 unités = ...
c) 1 millier, 2 centaines, 7 unités = ...
d) 1 millier, 7 dizaines, 5 unités = ...
e) 7 centaines, 8 dizaines = ...

Figure 38: exercices 1et 2, bilan de période 2, « La tribu des maths », p.50

De nombreux cas sont proposés avec absence d'unité à certains rangs, ce qui permet de mettre en jeu le rôle du zéro. Par contre dans les exercices de recomposition les unités sont toujours données dans l'ordre conventionnel et il y a toujours au plus 9 unités à chaque ordre, ce qui ne permet pas de mettre en jeu les conversions.

Dans le mémento, une définition est donnée de la décomposition « décomposer c'est dire combien il y a d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers, … » ainsi qu'un exemple avec trois décompositions différentes suivi du tableau de numération.

Décomposer un nombre

Décomposer un nombre, c'est dire combien il y a d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers...

Exemple

Dans 5 341, il y a :

5 341 = 5 000 + 300 + 40 + 1
5 341 = (5 × 1 000) + (3 × 100) + (4 × 10) + 1
5 341 = 5 m + 3 c + 4 d + 1 u

Tu peux aussi utiliser ce tableau :

Famille des millions			Famille des milliers			Famille des unités		
c	d	u	c	d	u	c	d	u
					5	3	4	1

Figure 39: extrait du mémento de « La tribu des maths », p.126

Il n'y a pas de technique explicitée (mais les exemples suggèrent l'utilisation d'un calcul ou du tableau de numération) pour l'obtention de la décomposition, ce qui rend le principe de position implicite : le rang de chaque unité n'est pas précisé, il est illustré par les différents

exemples ainsi que par le tableau de numération. Les rangs y apparaissent groupés en classes, ce qui en fait un tableau utilisable pour la lecture des grands nombres.
Il y a également un problème proposé dans le « Labo Maths » (p.35), où il s'agit de déterminer différentes façons de faire 9504 points dans un jeu avec des bâtons de 1, 10, 100 ou 1000 points. Les élèves doivent chercher au moins 5 possibilités différentes, ce qui permet de mettre en jeu des conversions. L'exemple qui est donné donne à voir une règle de calcul : « Par exemple : 95 bâtons bleus (95×100) pour faire 9500 ». Les auteurs ramènent cette question à la distinction chiffre/nombre : « l'occasion est ainsi donnée de retravailler sur la distinction chiffre/nombre ». Il s'agit de réinvestir le travail fait dans un exercice précédent, dont nous ferons l'analyse plus loin (pour le type de tâche *nombre de*).

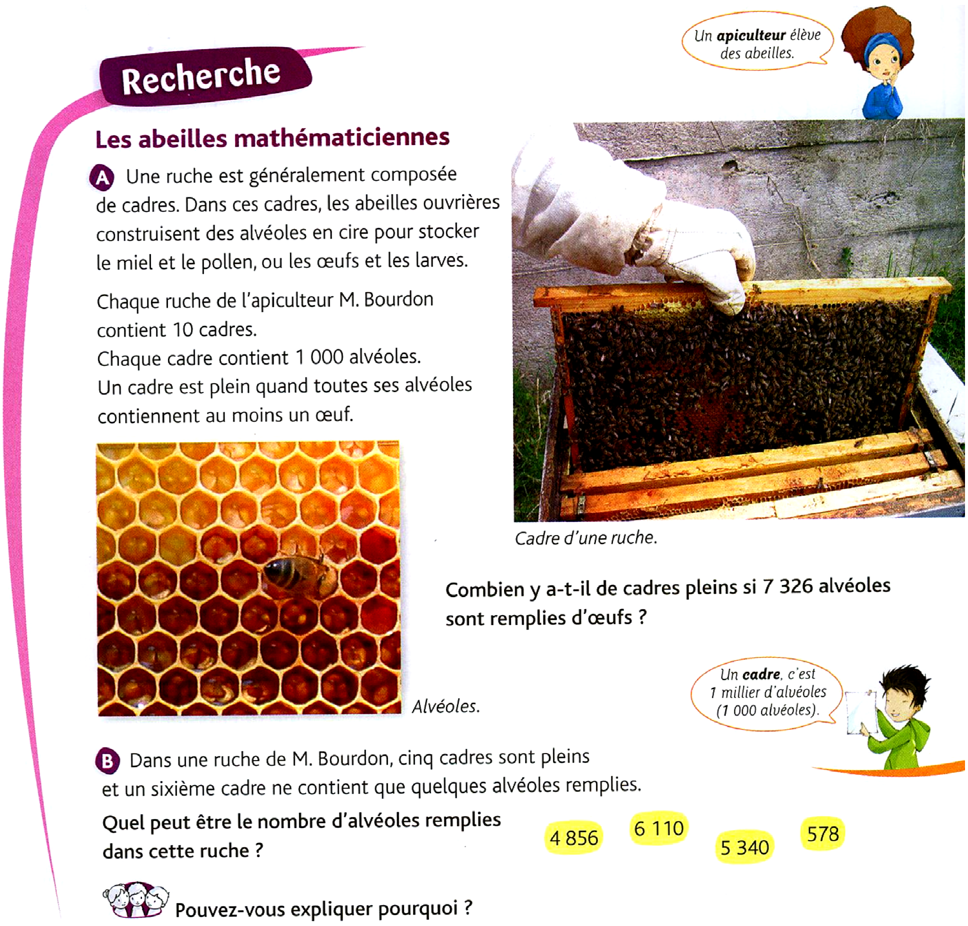
$T_{Tn/ec}$ *et* $T_{Tec/n}$ *: écrire/nommer*

Double page n°9 (1), double page n°13 (2), p.72(2)
Dans le mémento, la liste des mots-nombres du système de numération parlée est indiquée (jusqu'au million y compris), mais aucune technique pour écrire/nommer des nombres n'est explicitée. Ni dans le guide pour l'enseignant. Voici l'extrait du mémento correspondant à ce type de tâches :

Figure 40 : extrait du « mémento » (p.126) du manuel La tribu des maths, CE2, Magnard

T_{Cnd} *:* nombre de *(et* chiffre des*)*

Double page n°9 (2), double page n°23 (1)
Il s'agit de l'objectif annoncé de la double page n°9. Il est en jeu dans le problème introductif ainsi que dans un exercice.
Dans la situation d'introduction les élèves doivent, après avoir déterminer, dans une première question, le nombre de cadres de 1000 alvéoles pleins « si 7 326 alvéoles sont remplies d'œufs », puis, dans une deuxième question, trouver le nombre d'alvéoles avec cinq cadres pleins et quelques alvéoles dans le sixième (des nombres sont proposés) et expliquer pourquoi :


Un **apiculteur** élève des abeilles.

Recherche

Les abeilles mathématiciennes

A Une ruche est généralement composée de cadres. Dans ces cadres, les abeilles ouvrières construisent des alvéoles en cire pour stocker le miel et le pollen, ou les œufs et les larves.

Chaque ruche de l'apiculteur M. Bourdon contient 10 cadres.
Chaque cadre contient 1 000 alvéoles.
Un cadre est plein quand toutes ses alvéoles contiennent au moins un œuf.

Cadre d'une ruche.

Alvéoles.

Combien y a-t-il de cadres pleins si 7 326 alvéoles sont remplies d'œufs ?

Un **cadre**, c'est 1 millier d'alvéoles (1 000 alvéoles).

B Dans une ruche de M. Bourdon, cinq cadres sont pleins et un sixième cadre ne contient que quelques alvéoles remplies.
Quel peut être le nombre d'alvéoles remplies dans cette ruche ?

4 856 6 110 5 340 578

Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Figure 41 : activité de recherche, double page 9, La tribu des maths, CE2, p.34

C'est le lien entre mille et le rang correspondant qui est principalement en jeu ici. On peut noter que le contexte choisi et la représentation du millier qui en découle (millier comme cadre de 1000 alvéoles) ne favorise pas une vision du millier comme unité constituée de 10 centaines mais uniquement comme une nouvelle unité constituée de 1000 unités simples.
Le *nombre de* est ensuite travaillé dans l'exercice 4 où cette fois il ne s'agit plus seulement de déterminer le nombre de milliers dans un nombre à quatre chiffres, mais aussi le nombre de centaines et de dizaines :

4 Recopie et complète ce tableau.

Nombre	Chiffre des milliers	Nombre de milliers	Chiffre des centaines	Nombre de centaines	Chiffre des dizaines	Nombre de dizaines
5 423	*5*	*5*	*4*	*54*	*2*	*542*
8 764	....	....	....	....	....	....
9 070	....	....	....	....	....	....
7 301	....	....	....	....	....	....
6 845	....	....	....	....	....	....

Figure 42 : extrait de La tribu des maths, CE2, Magnard

Cet exercice, tel qu'il est présenté, nous paraît être un exercice très formel où il s'agit de faire des observations à partir de l'exemple donné dans la première ligne, sans que cela ne permette de mettre en évidence les relations entre les unités sous-jacentes. D'ailleurs il est

indiqué comme exercice d'entraînement des connaissances construites dans l'activité de recherche (« les abeilles mathématiciennes », voir plus loin).
Les indications proposées dans le guide pour l'enseignant sont trop sommaires pour permettre d'identifier l'enjeu de la situation, tel qu'il est pensé par les auteurs. De plus aucune indication de mise en œuvre n'est donnée. Nous allons faire une rapide analyse *a priori* de cet exercice pour tenter d'identifier *a priori* ce que les élèves peuvent apprendre en le faisant.

Analyse des techniques possibles et de l'enjeu de l'exercice 4 p.35

Les élèves ont appris dans les exercices précédents que le millier s'écrivait au 4ème rang, ce qui peut leur permettre de traiter les deux premières colonnes. Ils peuvent toutefois déjà s'interroger sur la définition de « chiffre » et « nombre » qui est nécessaire pour traiter l'exercice, dès le cas des milliers. Les élèves ne peuvent réussir la tâche que s'ils ont déjà compris cette distinction entre chiffre et nombre, c'est-à-dire ce que les auteurs veulent leur faire apprendre ici. Or ce qui peut leur permettre de comprendre cela est l'appui sur l'exemple qui est donné pour le nombre 5423, qui donne à voir cette distinction chiffre/nombre (et aussi peut-être le fait d'avoir déjà travaillé cela sur les nombres à 3 chiffres). Cet exemple donne également un « format » pour les autres réponses sur les nombres à quatre chiffres : un nombre à 1 chiffre pour les colonnes « chiffre des », un nombre à 1 chiffre pour la colonne *nombre de* milliers, à 2 chiffres pour *nombre de* centaines et à 3 chiffres pour *nombre de* dizaines.
Les élèves peuvent essayer de travailler par analogie : chiffre/nombre des milliers on écrit le premier chiffre (en partant de la gauche), chiffre des centaines on écrit le deuxième chiffre, *nombre de* centaines on écrit le premier et le deuxième chiffre, etc. Dans ce cas aucune connaissance de numération n'est utilisée. S'il y avait un nombre à 3 chiffres dans la liste et si les élèves prenaient les trois premiers chiffres en partant de la gauche, cela ne fonctionnerait plus.
Il semble donc attendu que l'élève remarque que pour le *nombre de* centaines on juxtapose les chiffres des milliers et des centaines et pour le *nombre de* dizaines, on juxtapose les chiffres des milliers, centaines et dizaines.
En cas d'erreur, là encore, les rétroactions peuvent venir de l'exemple proposé (l'enseignant peut par exemple proposer à l'élève de comparer ce qu'il a fait avec l'exemple de départ) ou bien de l'utilisation d'un matériel comme suggéré dans le guide pour l'enseignant (ci-dessous) :

4 ** : La seule difficulté repose sur la confusion chiffre / nombre.
Vous pouvez alors utiliser du petit matériel de manipulation (type cubes) ou faire un dessin équivalent : 23 est représenté par deux barres de dix cubes et trois cubes seuls. Il y a, en tout, 23 cubes (nombre de cubes), mais trois cubes sont « seuls » (non échangés contre une dizaine) : c'est le **chiffre**.
Procédez de même avec les centaines et les milliers et concluez en valorisant ce moyen mnémotechnique :
Pour lire le « nombre de... », on lit le nombre constitué par tous les chiffres à gauche du rang demandé, ce rang étant inclus :
5 423 → 542 dizaines.

Figure 43 : extrait du guide de l'enseignant du manuel La tribu des maths, CE2, Magnard

Les auteurs proposent une aide pour les élèves faisant des confusions entre chiffre et nombre (mais avec une erreur faite en nommant « chiffre » la quantité de cubes isolés). Ils proposent d'utiliser du matériel pour effectuer les groupements par dix. L'exemple donné concerne un nombre à deux chiffres. Pour un nombre à 4 chiffres comme 5423 il faudrait

donc utiliser 5 gros cubes de 1000, 4 plaques de 100, 2 barres de 10 et 3 cubes seuls. Pour comprendre qu'il y a 54 centaines par exemple il faut utiliser le fait qu'un gros cube de 1000 contient 10 plaques de 100, c'est-à-dire la relation entre milliers et centaines (ce n'est pas avec ce type de matériel de numération qu'a été introduit le millier comme nous le verrons par la suite). Il y a donc un savoir nouveau et essentiel ici mais il semble être réduit à une question de vocabulaire par les auteurs (« la seule difficulté repose sur la confusion chiffre / nombre »), qui signalent d'ailleurs pour finir qu'il y a une méthode « mnémotechnique » pour trouver la réponse. Cette méthode amène à contourner l'utilisation de ce savoir.
Finalement pour les auteurs de ce manuel tout se passe comme si le travail sur le principe décimal, pour les nombres supérieurs à 1000, s'incarnait uniquement dans cette distinction chiffre/nombre, alors que telle qu'elle est proposée ici elle ne peut permettre de faire émerger ce savoir.

T_{AR} : avancer/reculer

Double page n°9 (1)
Les élèves doivent compléter des suites de nombres en avançant ou reculant, avec des modifications éventuelles des unités d'ordres supérieurs, comme par exemple : 837-937-1037 ou bien 3031-3021-3011-3001-2991.

Conclusion sur l'organisation mathématique de « La tribu des maths CE2 »

L'aspect cardinal du nombre est présent dans ce manuel dans les activités d'introduction des doubles pages 9 (le nombre de cadres de mille alvéoles) et 23 (comparer des quantités de signes utilisés dans un article). Le travail concerne ensuite l'OM_{trad} (doubles pages 9 et 13) et l'OM_{ord} (double-page 23).
Les types de tâches comparer, décomposer/recomposer (de manière canonique) et écrire/nommer y ont une place prépondérante. Le mémento propose une synthèse uniquement pour ces trois types de tâches et ce sont uniquement celles qui sont proposées dans les bilans de fin de période. Cela témoigne d'une centration sur le principe de position de la numération. Ce savoir apparait dans le mémento sous la forme du tableau de numération ainsi qu'avec des exemples de décompositions, mais reste finalement assez implicite.
Cette étude nous a permis de faire le constat que le principe décimal n'est pas un enjeu d'enseignement. Ce savoir n'est pas décrit dans le mémento. Les commentaires dans le guide de l'enseignant nous permettent de penser que tout le travail relatif au principe décimal est vu à travers la distinction chiffre/nombre par les auteurs. Mais le principal exercice concernant ce travail ne peut permettre d'amener les élèves à utiliser les relations entre unités. Finalement la technique de troncature est reléguée à une règle « mnémotechnique ».

III.4 L'organisation mathématique de la numération dans « *J'apprends les maths* CE2 »

Ce fichier est découpé en « séquences » de deux pages traitant d'un même sujet. Pour la numération il s'agit des séquences : S74, S77 et S78.
Voici un schéma récapitulatif de la chronologie des types de tâches proposés dans ce manuel.

S74	S77	S78
- Dénombrer - Nombre de - Avancer/reculer	- Dénombrer - Nombre de	- Dénombrer - Nombre de - Comparer

Figure 44 : Schéma de la chronologie des types de tâches de l'OM de J'apprends les maths CE2 sur la numération (nombres à quatre chiffres)

Nous avons choisi d'associer les deux types de tâches de *nombre de* et de dénombrement (T_{Cnd} et T_{Dc}) car ils sont la plupart du temps proposés ensemble dans le manuel.

T_{Cnd} *:* nombre de *et* T_{Dc} *: dénombrer*

S74(3), S77(2), S78(2) pour *nombre de* et S74(1), S77(2), S78(2) pour dénombrer.
Les élèves ont en général à dénombrer une collection (donner son écriture chiffrée) puis à indiquer le *nombre de* groupe de 100 et de groupes de 10. Les collections sont principalement constituées du matériel de numération du manuel (représenté). Ce matériel est constitué par des jetons pour les unités, des boites (de 10 jetons) pour les dizaines, des valises (de 10 boites) pour les centaines et des malles (de 10 valises) pour les milliers[60]. En voici les représentations dans le manuel (page suivante) :

[60] Avec des couleurs différentes pour chaque contenant (boite, valise, malle).

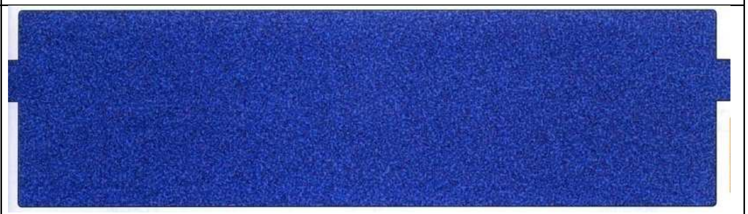
Unité	Dizaine	Centaine	Millier
			

Figure 45 : Matériel de numération du manuel J'apprends les maths CE2

L'importance du type de tâches *nombre de* est affirmée par les auteurs pour la « compréhension des nombres à quatre chiffres » :

> « De la même façon que l'oralisation de 130 ne dit pas c'est 13 groupes de 10, l'oralisation de 1350 par ex. ne précise pas que c'est 13 groupes de 100 (sauf à dire « treize cent cinquante »), ni qu'il contient 135 groupes de 10. Or, sans cela, il n'y a pas de bonne compréhension des nombres à quatre chiffres. C'est pourquoi, dès la découverte des nombres au-delà de 999, qui fait évènement pour les élèves, nous en faisons l'objectif principal de l'étude de ces nombres ».

On retrouve une limite de la numération parlée que l'EUN permet de combler. Ici le choix est fait d'utiliser principalement les termes « groupes de 100 » mais on voit également l'utilisation des unités de numération (« centaines »).
Ces activités mettent bien en jeu le principe décimal. Nous allons en faire une analyse *a priori*.

Analyse des techniques possibles et de l'enjeu de l'activité d'introduction des nombres à 4 chiffres (S74).

Nous allons nous intéresser aux exercices 1 et 2 de la séquence 74. L'exercice 1 propose différents cas de dénombrement et *nombre de* toujours sur le même modèle.

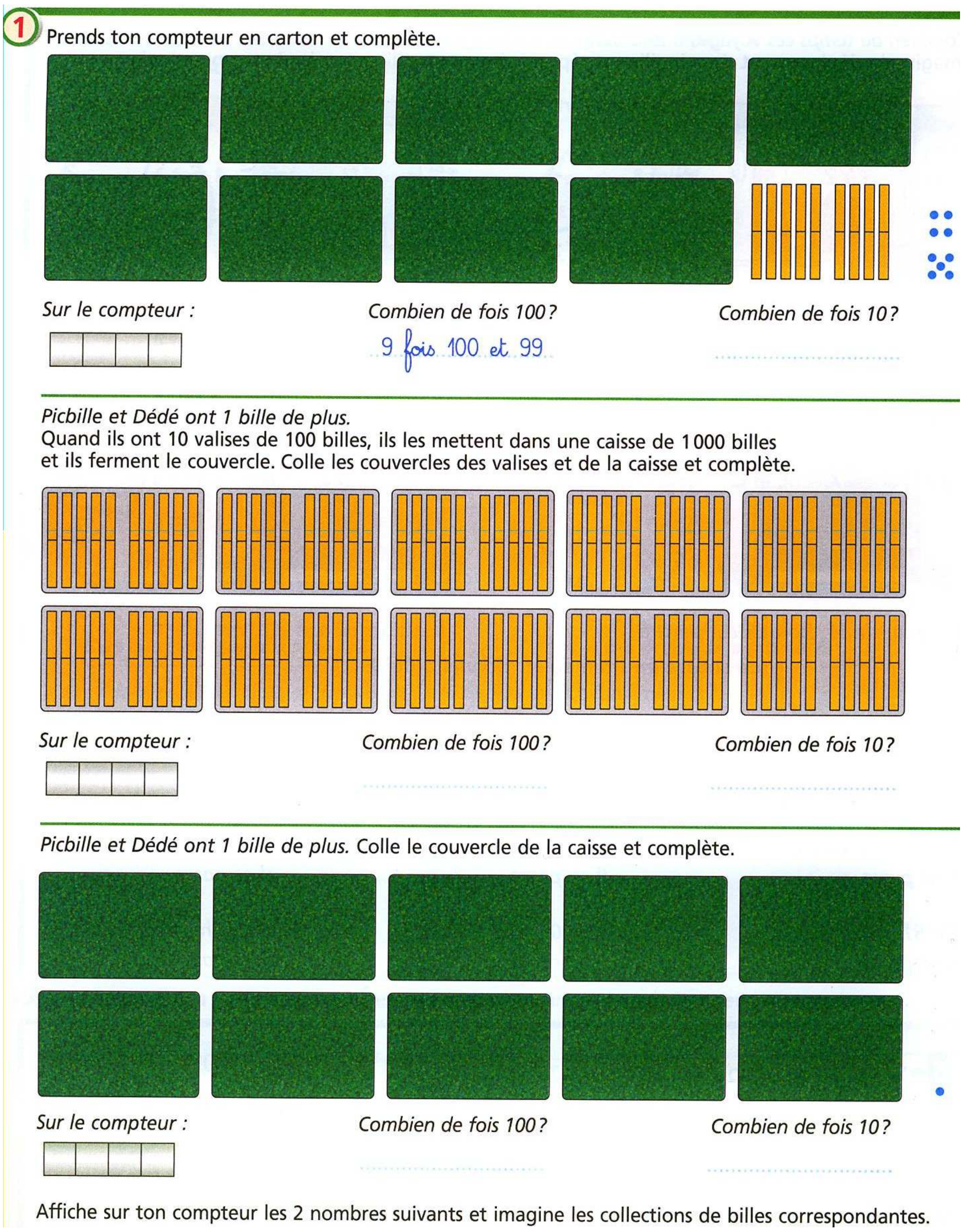


Figure 46 : exercice 1, séquence 74 du manuel J'apprends les maths CE2

De plus, chaque cas correspond à une unité simple de plus que le cas précédent. Le premier cas concerne un nombre à 3 chiffres, ce qui permet de réactiver les connaissances anciennes des élèves. Pour le deuxième cas les auteurs précisent que « quand ils ont 10 valises de 100 billes, ils les mettent dans une caisse de 1000 ». Les élèves doivent alors coller les couvercles des valises et de la caisse complète. Pour cela ils ont à disposition des autocollants dans le fichier. Il s'agit ici de simuler le groupement d'objets réels. Mais la taille des autocollants induit fortement le positionnement à effectuer. Il n'y a pas de dénombrement à effectuer ici par l'élève puisque le nombre est donné dans le texte. Il en est de même pour la recherche du *nombre de* groupes de 100. Pour le *nombre de* groupes de 10, les élèves peuvent compter les boites de 10 de 1 en 1 sur le dessin ou bien compter de 10 en 10 chaque valise, sauf s'ils ont déjà collé les valises et la caisse. Sinon ils peuvent également utiliser le *nombre de* groupes de 10 dans 999 et ajouter une boite de 10.

Le fait d'avoir à répondre directement sur le fichier ne laisse pas la place pour un dessin (sauf si l'enseignant propose d'utiliser un cahier de brouillon) qui pourrait aussi servir de support à une technique : les élèves dessinent 10 valises puis dessinent des boites à

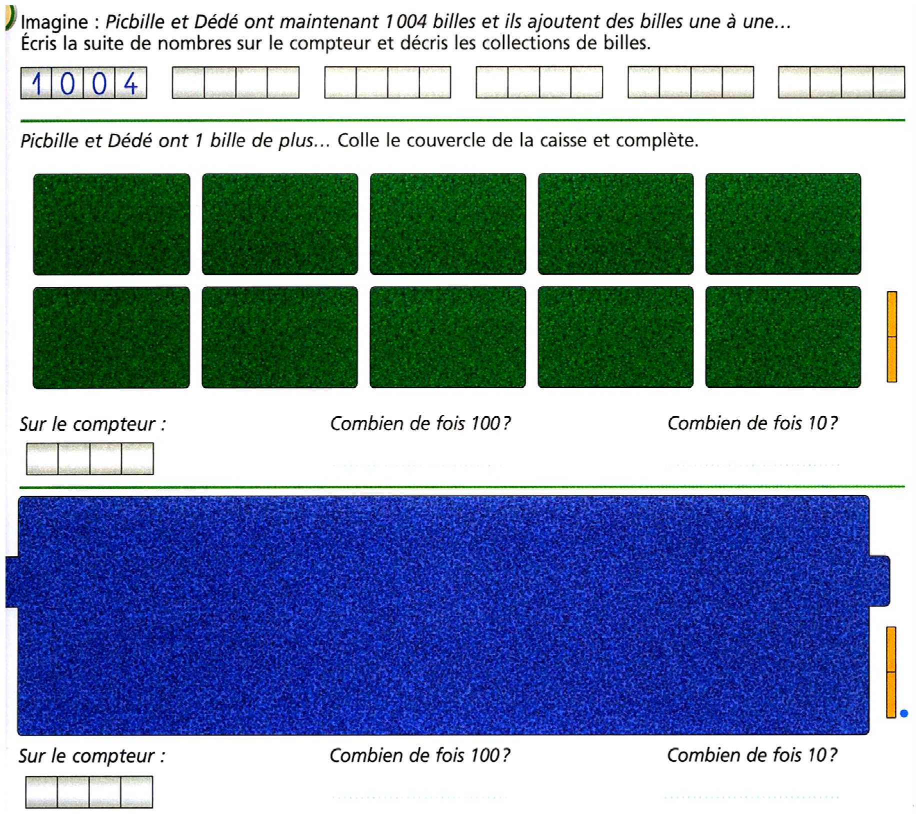
l’intérieur ou comptent de dix en dix pour chaque valise. Cette technique n’est pas évoquée dans le guide de l’enseignant.
Les commentaires du guide de l’enseignant nous montrent que cette activité doit être finalement assez guidée par l’enseignant :

> « On voyait tous les groupes de 10, il y en avait 10 fois 10, 100 ; on a groupé ces 10 groupes de 100 dans une caisse de 1000 […] Au tableau on dessine un grand rectangle autour des 10 valises, et on efface celles-ci. On résume finalement : 1000, c’est 1 groupe de 1000 unités, mais c’est aussi … Sur l’écriture chiffrée on voit les 10 groupes de 100. » (p.165)

La technique de lecture directe (troncature) est donc amenée par ostension (le manque de variété dans le choix des nombres ne peut permettre aux élèves d’induire cette règle à partir des exemples) : l’enseignant va devoir montrer que l’on peut voir directement le *nombre de* groupes de 100 sur l’écriture chiffrée, certainement en entourant ou en mettant des couleurs sur le 1 et le 0 de 1000. C’est cette technique qui apparait dans le « j’ai appris » en fin de séquence 74 :

Figure 47 : extrait du « j’ai appris » du manuel J’apprends les maths CE2

Dans le troisième cas proposé les boites de 10 ne sont plus visibles. L’élève doit encore coller une caisse avant de dénombrer puis trouver le *nombre de* groupes de 100 et de 10. Pour le dénombrement, l’élève peut ajouter une unité au nombre précédent ou bien utiliser l’oral : « mille un » et le traduire en chiffres (il faut savoir que « mille » s’écrit 1000 en chiffres, ce qui est fait par l’enseignant d’après le guide de l’enseignant). Le fait de proposer une collection représentée et des petits nombres d’unités à chaque ordre ne favorise pas le recours à une association directe à l’écriture chiffrée (technique de juxtaposition) mais plutôt à une utilisation de l’oral. Pour le *nombre de*, là encore les élèves peuvent s’appuyer sur le cas précédent, puisque l’ajout d’une unité ici ne change pas le nombre de groupes de 100 ou de 10. Le comptage en unités simples est rendu difficile par le fait que les élèves ont collé l’autocollant de la caisse avant de répondre : les valises ne sont plus visibles.
L’institutionnalisation précédente peut permettre aux élèves d’utiliser la troncature, d’autant plus que le nombre est ici presque identique (seul le chiffre des unités change). Il en est de même pour l’exercice 2, où seul le nombre de fois 10 change car il y a une boite supplémentaire.


Imagine : *Picbille et Dédé ont maintenant 1 004 billes et ils ajoutent des billes une à une…*
Écris la suite de nombres sur le compteur et décris les collections de billes.

1 0 0 4

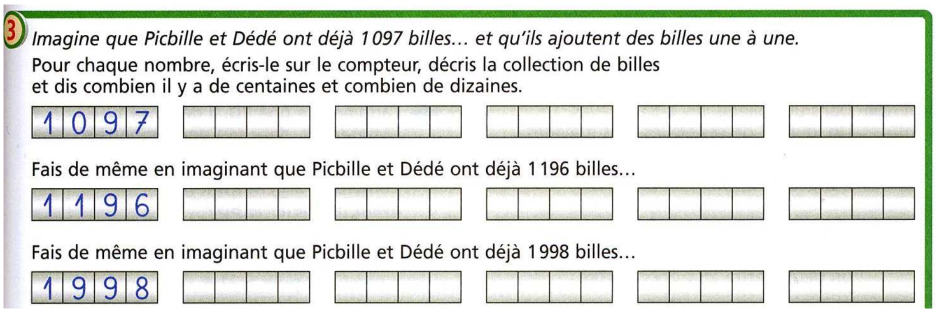
Picbille et Dédé ont 1 bille de plus… Colle le couvercle de la caisse et complète.

Sur le compteur : *Combien de fois 100 ?* *Combien de fois 10 ?*

Sur le compteur : *Combien de fois 100 ?* *Combien de fois 10 ?*

Figure 48 : exercice 2, séquence 74 du manuel J'apprends les maths CE2

Pour l'exercice 3 par contre seuls des nombres en chiffres sont donnés : il s'agit d'écrire en chiffres les 5 nombres qui suivent et de dire combien il y a de centaines et de dizaines.


3 *Imagine que Picbille et Dédé ont déjà 1 097 billes… et qu'ils ajoutent des billes une à une.*
Pour chaque nombre, écris-le sur le compteur, décris la collection de billes
et dis combien il y a de centaines et combien de dizaines.

1 0 9 7

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1 196 billes…

1 1 9 6

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1 998 billes…

1 9 9 8

Figure 49 : exercice 3, séquence 74 du manuel J'apprends les maths CE2

Cependant il s'agit de « dire » et il n'y a pas la place en effet d'écrire la réponse ce qui laisse peu de possibilités de recherche aux élèves (qui pourraient encore avoir besoin de représenter les centaines et milliers pour faire un comptage ou un groupement). Il est clairement attendu ici d'utiliser la technique de troncature mise en avant précédemment pour 1000.

Dans ces activités il y a donc bien une volonté d'associer la tâche *nombre de* à un travail sur le principe décimal, en particulier sur le fait que 1 groupe de 1000 c'est 10 groupes de 100. Le principe décimal est introduit à travers une activité de groupements (simulés par le collage d'autocollants) de dix boites en une valise et de dix valises en une caisse. Cependant, la compréhension du lien entre la technique de troncature et le principe décimal nous pose question, notamment en cas d'absence d'un travail sur le principe de position de la numération. En effet pour justifier la lecture directe il faut s'appuyer sur ce savoir (le 1 de 1385 représente 1 millier) et le mettre en relation avec le principe décimal : 1 millier c'est 10

centaines. L'utilisation des EUN pourrait être d'un précieux secours. Mais dans ce manuel c'est l'ostensif EMN (écriture en matériel de numération) avec les mots « boites », « valises », « caisses » qui est privilégié. L'usage de ce vocabulaire spécifique pose la question de la décontextualisation des connaissances des élèves.
Dans ce manuel la technique de multiplication par 10 (d'un nombre à 3 chiffres) et par 100 (d'un nombre à 2 chiffres) est proposée après la séquence sur les nombres à 4 chiffres (séquence 83) : elle est alors justifiée par les conversions entre unités (à partir du matériel de numération). Cela témoigne encore d'une volonté d'utiliser les savoirs de la numération comme éléments technologiques pour cette technique.
Afin de préciser le traitement du dénombrement et *nombre de* dans ce manuel, nous allons maintenant regarder les exercices proposés dans la séquence 77.

Quelques compléments à propos des exercices 1 et 2 de la séquence 77.

Voici l'exercice 1 (page suivante) :

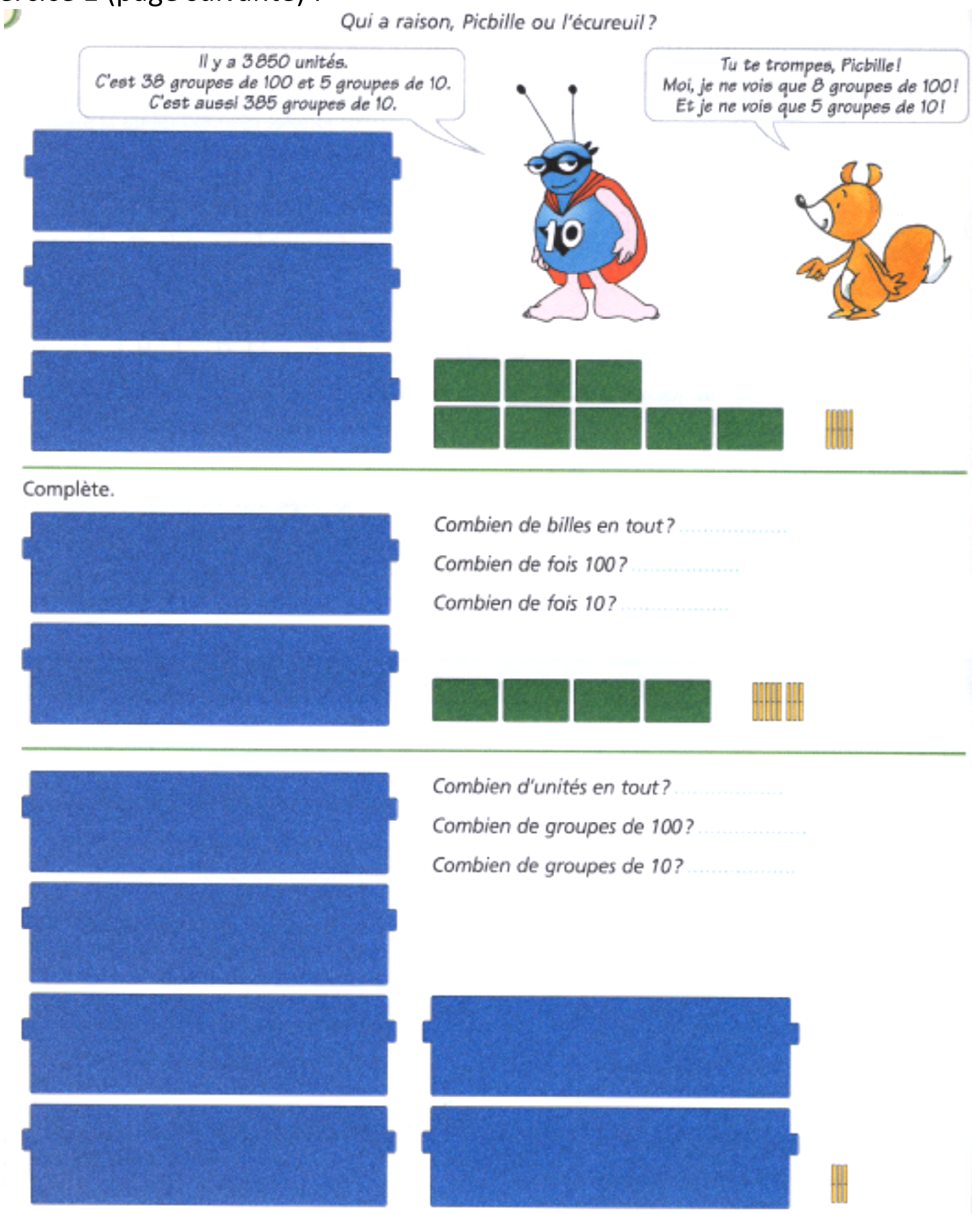


Figure 50 : exercice 1, séquence 77 du manuel J'apprends les maths CE2

Le premier cas permet un rappel du fait qu'il y a des « groupements cachés » comme l'expliquent les auteurs dans le guide :

> « Ici encore on cherche à éviter que les élèves ne répondent en utilisant des règles superficielles liées aux écritures. L'exclamation étonnée de l'enseignant vise à provoquer l'évocation des groupements cachés ». *(p.168)*

Cette citation pourrait expliquer ce que nous avions relevé précédemment vis-à-vis du principe de position : par la volonté de mise en évidence d'un savoir essentiel (principe décimal) les auteurs semblent avoir une certaine défiance vis-à-vis du principe de position, considéré comme relevant d'une « règle superficielle ».
Le deuxième cas ne permet pas de s'appuyer directement sur le cas précédent. Les élèves doivent donc trouver un autre moyen de dénombrer cette collection que l'ajout d'une unité (comme dans S74). Le dénombrement est véritablement un enjeu ici.
Pour la première question (« combien de billes en tout ? »), l'élève peut

- utiliser un comptage en unités simples (de mille en mille, cent en cent, …) pour obtenir « deux-mille-quatre-cent-quatre-vingts » et associer l'écriture chiffrée correspondante ;
- associer directement le nombre d'unités de chaque ordre aux mots nombres « mille », « cent », … (« deux-mille », « quatre-cent », « quatre-vingts ») et l'écrire en chiffres.
- utiliser la technique de juxtaposition en associant chaque type de matériel (après comptage en unités de numération) à un rang dans l'écriture chiffrée (deux malles donc j'écris un 2 au rang des milliers, etc.).

Concernant la technique de troncature (pour T_{Cnd}), il s'agit ici de l'utiliser dans le cas de nombres très différents, ce qui permet là encore une généralisation de cette technique (il ne s'agit plus comme en séquence 74 de réécrire le même nombre de groupes de 100 que le nombre précédent). Le fait d'avoir écrit le nombre en chiffres juste avant peut favoriser la lecture directe (ainsi que le modèle qui est donné en haut de la page par « Picbille »). Cependant le comptage est encore possible (pour les groupes de 100 en comptant de dix en dix pour les caisses, … et pour les groupes de 10 en comptant de cent en cent pour les caisses, …). Ce qui peut aussi être un moyen de vérification. Cet exercice semble donc plus adapté à l'objectif visé que celui de la séquence 74.
L'exercice 2 permet de travailler ces deux types de tâches avec des collections contenant plus de 10 unités à certains ordres et dans des contextes différents : trombones groupés en boites de 100, en boites de 50 (une seule boite), à l'unité puis billets de 100 euros, 50 euros (un seul) et pièces de 1 euro.

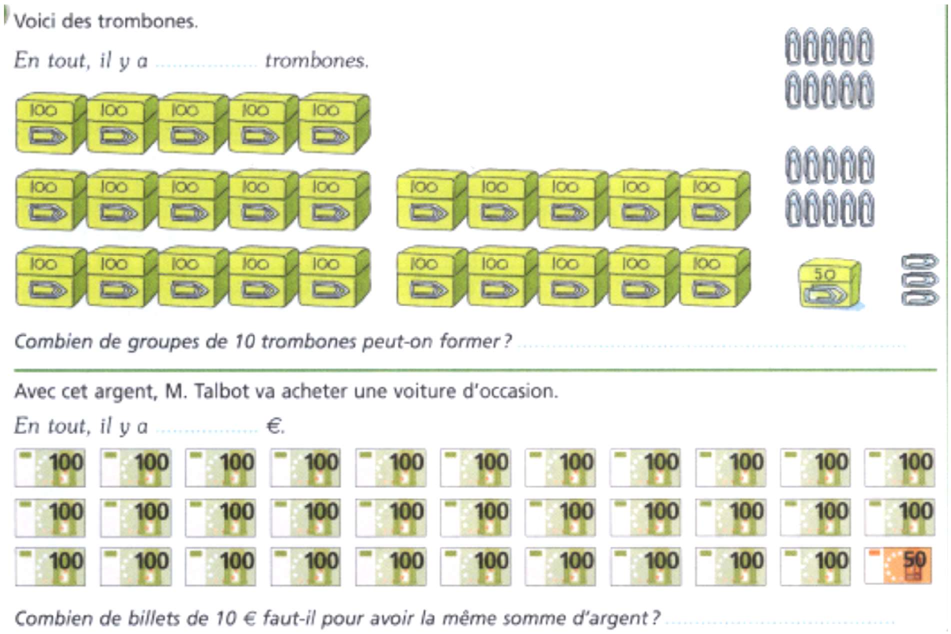


Figure 51 : exercice 2, séquence 77 du manuel J'apprends les maths CE2

On peut penser que l'objectif des auteurs est de travailler les techniques apprises dans des contextes différents (ce qui participe à leur institutionnalisation). Mais les choix qui sont faits dans ces exercices nous amènent à nous demander s'ils vont effectivement jouer ce rôle.
Le fait d'avoir plus de 10 unités à certains ordres pour ces deux collections nous amène à penser que les auteurs souhaitent mettre en jeu les groupements pour le dénombrement de la collection. Il est en effet possible d'effectuer les groupements (en entourant les groupes de 10 groupes de 100 et de 10 unités) puis de dénombrer (passage par l'oral ou bien technique de juxtaposition). Cependant les collections sont à nouveau représentées, ce qui permet une utilisation d'un comptage oral en unités simples (technique indiquée d'ailleurs par les auteurs dans le guide pour l'enseignant).
Pour le *nombre de* (« combien de groupes de 100 ?[61] »), les élèves peuvent utiliser la lecture directe puisque le dénombrement a déjà été effectué ou bien faire un comptage (compter de un en un chaque groupe de 100). On peut d'ailleurs penser que les élèves ne vont pas faire tout de suite le lien avec le contexte du matériel de numération et donc que cette dernière technique peut être plus facilement utilisée, même si elle est plus coûteuse. C'est d'ailleurs celle-ci qui est indiquée par les auteurs : « compter les groupes de 100 (1, 2, 3, …, 25) ». La lecture des commentaires du guide nous montre que l'objectif de cet exercice est en fait de travailler le fait que 25 groupes de 100 c'est 2500 en appui sur le fait que « 10 fois 100, c'est 1000 ». La technique de troncature n'est plus évoquée. Ils proposent d'ailleurs de finir avec des exercices de calcul mental du type « n fois 100 ».
Enfin, on peut remarquer qu'un des exercices de dénombrement et *nombre de* (S78) se traite dans le contexte des conversions entre unités de longueur. Cet exercice est pourtant traité dans une séquence intitulée « numération ». On peut faire l'hypothèse que les auteurs souhaitent faire un lien avec les techniques construites dans les séquences précédentes, dans ce nouveau contexte. D'ailleurs le mètre est définit comme le « millier de mm ».

[61] Dans le manuel de 2003 la question posée est « combien de groupes de 10 trombones peut-on former ? » et « combien de 10€ faut-il pour avoir la même somme d'argent ? » mais un erratum est signalé dans le guide de l'enseignant de 2004, indiquant de remplacer dans les deux questions 10 par 100.

T_{AR} : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres

S74(2)
Il s'agit en fait, dans les exercices proposés, d'ajouter 1 à un nombre donné. On avance de 1 en 1 mais jamais de 10 en 10 ou 100 en 100.
Une technique mise en évidence dans le guide de l'enseignant consiste à ajouter 1 au rang des unités. Si on a 9 on passe à 0 et on ajoute 1 au rang suivant … Cela est mis en relation à la fois avec l'utilisation d'un compteur (qui semble prendre en charge le principe de position) mais aussi avec les activités de groupements (en collant des étiquettes de valises ou de malles), donc s'appuie sur les relations entre les unités (contextualisées toujours au matériel de référence).

T_C : comparer

S78(1)
Ce type de tâches est traité dans un contexte d'unités de longueurs uniquement (mais toujours dans la séquence intitulée « numération au-delà de 1000 »). Les nombres sont donnés dans différentes unités, donc il faut les convertir dans la même unité (recomposition) pour pouvoir appliquer l'algorithme de comparaison.
Le guide du maître n'évoque pas les techniques de comparaison, contrairement à ce que l'on a pu voir dans les autres manuels. Ainsi la technique de décomposition n'apparait pas comme un élément technologique permettant de justifier les règles de comparaison.
Finalement, dans ce manuel, même pour ce type de tâches on peut voir une utilisation des relations entre les unités métriques et une volonté de faire un lien entre le système métrique et la numération. Il est par exemple précisé dans cette séquence (S78) : « ce sera aussi l'occasion de relier les décompositions obtenues au langage plus général de la numération décimale : 2386 mm = 23 dm et 86 mm, parce que 2386 mm c'est 23 centaines de mm et 86 mm ; 2386 mm = 238 cm et 6 mm, parce que 2386 mm c'est 238 dizaines de mm et 6 mm. »
On notera au passage que c'est l'EUN qui est utilisée pour faire ce lien et non plus l'EPD.

$T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$: écrire/nommer

Même si ce type de tâches ne fait pas l'objet d'exercices dans ce manuel, il n'est pas totalement absent car il est l'objet de quelques activités d'échauffement. Il n'est d'ailleurs pas possible d'imaginer son absence dans la classe, ne serait-ce que pour des raisons de communication à propos des nombres rencontrés dans les activités. Mais cette quasi absence rend invisible la technique attendue et les éléments technologique associés.
L'origine est à chercher dans les commentaires des auteurs dont nous avons déjà donné un extrait, qui montre une volonté de dépasser l'« oralisation » de 1350, pour reprendre cet exemple, qui « ne précise pas que c'est 13 groupes de 100 », d'après les auteurs.

Conclusion sur l'organisation mathématique de la numération de « J'apprends les maths CE2 »

Le principe décimal de la numération est un enjeu essentiel pour les auteurs de ce manuel. En particulier, ils s'attachent à faire comprendre aux élèves qu'il y a des centaines dans les milliers, de manière contextualisée, à travers le fait de prendre en compte les groupements « cachés » quand on pose la question « combien y'a-t-il de groupes de 100 ? ». C'est ce qui semble orienter les auteurs dans leurs choix de type de tâches. On a alors une OM de la

numération centrée sur l'OM_{card}, avec une importance accordée aux types de tâches *nombre de* et dénombrer. Les traductions d'écritures se limitent à écrire/nommer. Il n'y a pas de décompositions/recompositions (même canoniques). La comparaison n'est pas presque pas travaillée (et uniquement dans un contexte de mesure). L'aspect ordinal ne semble donc pas être un enjeu dans le travail sur la numération.
Concernant les ostensifs, on trouve ici une utilisation privilégiée des EAPD et des expressions « groupes de » (10, 100, 1000), comme le montre le fait par exemple que la formulation du principe décimal se fasse avec cet ostensif (« 1000 c'est 10 groupes de 1000 … »). L'EUN remplace parfois les « groupes de » (dans les synthèses quand le lien est fait avec l'écriture chiffrée) mais on note une absence totale des EPD.
Le compteur qui est un matériel évoqué dans les textes du programme 2002 est utilisé dans ce manuel (où il est représenté). Il permet de travailler ce qu'on peut appeler le principe *algorithmique* de la suite écrite des nombres (« pour mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres » comme il est précisé dans le programme 2002) et par conséquent le principe de position. Cela est associé au type de tâches avancer/reculer (dans la suite écrite).
Dans ce manuel, les savoirs de la numération ne sont pas pris en charge par des techniques de calcul. Quand il est dit par exemple que « 1000 c'est 10 groupes de 100 » cela fait référence aux échanges et groupements avec le matériel de numération du manuel et non à une multiplication par 10 ou à un ajout de groupes de 100 par addition posée par exemple. Mais le principe de position n'est pas non plus un enjeu explicite de savoir pour les auteurs. Nous avons remarqué que cela rend par exemple difficile l'explication et la justification de la technique de troncature en lien avec les groupements de 10. Pour cela il est en effet nécessaire d'identifier le rang du millier.

III. 5. L'organisation mathématique de la numération dans *ERMEL* CE2

Comme nous l'avons déjà souligné, cet ouvrage se distingue des autres par le fait qu'il consiste essentiellement en un guide pour l'enseignant. Cependant des compléments permettant d'en avoir une utilisation plus proche de celle des manuels usuels existent :

- le « guide des activités » qui propose une programmation des activités proposées dans le guide par « quinzaines », pour chaque période de l'année
- et le « cahier de l'élève » composé essentiellement d'exercices d'entraînement (reprenant les situations du guide principal) lui aussi organisé selon le découpage proposé dans le guide des activités.

Le thème « connaître les nombres » est découpé en 4 modules :

- Désignation écrite et orale des nombres,
- Situer les nombres les uns par rapport aux autres,
- Structurer les nombres d'un point de vue arithmétique,
- Mesures et autres nombres.

Ce sont les deux premiers modules qui correspondent à ce que nous avons jusqu'à présent regardé comme relevant du domaine de la numération, même si le travail sur les conversions de mesures du système métrique ou sur la monnaie (quatrième module) est susceptible de mettre en jeu le principe décimal de la numération. Le travail proposé sur la structuration arithmétique des nombres concerne davantage le calcul, même si là encore il ne serait pas impossible d'y trouver des tâches mettant en jeu des conversions entre unités.

Les activités proposées dans le deuxième module sont des activités relatives à l'ordre sur les nombres qui ne mettent pas en jeu de conversions entre unités. Il s'agit principalement de repérage de nombres sur droite graduée, de comparaison, rangement et ordre de grandeur.
Nous allons donc centrer notre étude sur le premier module. Les activités sont numérotées de 1 à 11, nous reprenons cette numérotation.
Dans ce manuel les nombres à 4 chiffres sont introduits dès la première période et dès la première activité. Le choix est donc fait de ne pas faire un travail spécifique de « révision » sur les nombres à trois chiffres mais de mêler l'ancien (supposé être là) et le nouveau. Cependant certaines activités ne proposent qu'un travail sur les nombres à 3 chiffres (3, 4.2, 4.3 et 5). Nous ne les avons pas prises en compte.

T_{Dc} et T_{Cnd} : Dénombrer (1, 2, 7) et nombre de (1,10)

Dans cet ouvrage ces deux types de tâches sont souvent associés : à partir d'un problème posé il y a plusieurs variantes proposées dans une progression en différentes phases. Ces variantes consistent par exemple à demander la tâche inverse ou à utiliser d'autres valeurs de certaines variables didactiques pour mettre en jeu des conversions entre unités. Une même situation amène donc à traiter différents types de tâches et différents savoirs (parfois le principe de position seul, parfois associé au principe décimal). Le dénombrement est le type de tâches le plus travaillé dans cette OM.
Dans la première phase de la situation 1 (« les craies », cf. annexes) par exemple il s'agit de déterminer le nombre de boites de 10 et 100 craies qu'il faut commander pour obtenir 800 craies, 430 craies, 254 craies, etc. (p.290). Comme cela est expliqué dans les commentaires destinés à l'enseignant, il s'agit ici de « comprendre » et « approfondir la signification de chaque chiffre dans un nombre » (p.291). Le lien entre les valeurs choisies pour les variables didactiques et cet objectif est précisé juste au-dessus, insistant en particulier sur le cas « 254 » qui « incite à réfléchir sur le sens du problème. Le 4 au rang des unités oblige à préparer un étui supplémentaire ».
Dans une deuxième phase, il est indiqué que « pour les élèves ayant réussi rapidement, le maître proposera :
- d'une part la même activité avec des nombres plus grands (exercice 1),
- d'autre part, une contrainte nouvelle qui oblige à acheter les craies par étuis de 10 uniquement (exercice 2) ».
Dans l'exercice 1, il s'agit de nombres à 4 chiffres (2500, 1990, 3050, etc.) mais des commandes de boites de 10 et 100 craies. Dans l'exercice 2 il s'agit de nombres à 2 ou 3 chiffres (580, 444, 50, etc.) mais des commandes de boites de 10 uniquement.
Il s'agit donc d'un changement de variable essentiel qui est réalisé ici puisque cela peut permettre de mettre en jeu les conversions entre unités. On peut alors s'étonner qu'il ne soit proposé qu'aux élèves les plus rapides. L'objectif des auteurs semble être à la fois de faire des révisions pour les élèves qui rencontrent des difficultés et de faire avancer les autres sur de nouveaux savoirs.
Les auteurs expliquent leur choix de nombres à 4 chiffres dans cet exercice en référence à la distinction chiffre/nombre : « on veut amener les élèves à prendre conscience, non seulement des chiffres au rang des centaines, mais du nombre de centaines ».
Nous avons choisi de faire une analyse *a priori* de cet exercice 1, en particulier de la deuxième phase de la situation 1 (que l'on trouvera en annexe).

Analyse des techniques possibles et de l'enjeu de l'exercice 1 (deuxième phase de la situation 1).

Comme dans la première phase, l'enjeu est de déduire des informations à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre, mais le fait d'avoir des nombres à 4 chiffres amène à dépasser les décompositions canoniques institutionnalisées précédemment. Le milieu matériel est constitué du tableau qui est à remplir (nombre de boites de 100 craies et d'étuis de 10 craies) et des nombres de craies commandées. Les élèves peuvent également utiliser leur calculatrice. Une variable didactique est le nombre et la place des zéros dans l'écriture chiffrée. Exemples :

- Pour 2500 : il n'y a que des boites de 100 à commander,
- Pour 1990 : des boites de 100 et étuis de 10,
- Pour 2992 : des boites de 100 et étuis de 10. Il faut commander un étui supplémentaire pour les 2 craies restantes.

Une erreur prévisible est de chercher à utiliser une décomposition canonique comme dans la première phase, sans tenir compte du chiffre des milliers. L'élève peut par exemple commander seulement 5 boites de 100 pour 2500 craies. Une autre erreur peut concerner la question de l'arrondi à la dizaine supérieure : l'élève peut ne pas penser à commander un étui supplémentaire. Enfin, cela ne constitue pas une erreur mais plutôt une réponse non optimale, si on fait l'hypothèse qu'il faut commander le moins d'objets possibles, pour 2992 l'élève peut trouver 29 boites de 100 et 10 étuis de 10 sans faire la conversion des 10 étuis en 1 boite.

Considérons l'exemple du premier cas (2500 craies). Plusieurs techniques sont possibles. Tout d'abord il est possible de partir de l'écriture chiffrée pour en déduire le nombre de milliers et faire la conversion en centaines (ce qui peut se faire avec les EPD : utiliser la décomposition 2500 = 1000 + 1000 + 100 + … et utiliser l'égalité 1000 = 10×100 pour en déduire que 2500 = 10×100 + 10×100 + 100 + … soit 25×100). Il est aussi possible, à l'inverse, de chercher combien de centaines il faut pour obtenir 2 milliers. Plusieurs variantes sont possibles : étendre la règle de calcul utilisée pour la décomposition canonique en EPDC au cas où le nombre de centaines est supérieur à 9 (chercher un nombre qui multiplié par 100 et éventuellement 10 donne 2500), écrire des sommes de 100 (EAPD) et contrôler le nombre de « 100 » par comptage en unités simples (de cent en cent), faire un dessin de boites et effectuer des groupements de 10 boites en 1 millier de craies ou bien contrôler le nombre de boites par comptage en unités simples (de cent en cent).

La possibilité d'utiliser la calculatrice permet aussi aux élèves de faire des additions ou multiplications d'EPD ou de contrôler leur calcul. En effet, les connaissances nécessaires pour certaines de ces techniques pourraient ne pas être disponibles ici car le millier n'est peut-être pas encore connu comme égal à dix centaines et le travail sur la comptine orale de cent en cent au-delà de mille non plus. Les élèves peuvent par contre étendre la règle des zéros au cas de la multiplication par un nombre à 2 chiffres avec appui éventuel sur la calculatrice.

La mise en commun qui est proposée est découpée en deux parties. Tout d'abord il s'agit de :

- « faire une mise au point sur le nombre de dizaines, le nombre de centaines, d'une part, le chiffre au rang des centaines, des dizaines, d'autre part » sans que davantage d'indication ne soit donnée à ce sujet pour l'enseignant ;

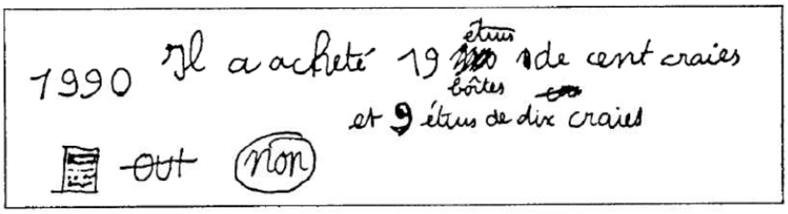
- mettre en évidence la décomposition utilisée par les élèves (avec les EAPD ou EPD pour les exemples donnés) et faire le lien avec les EUN. Il est alors proposé une écriture intermédiaire utilisant les expressions « boites de 100 », « étuis de 10 » pour amener la décomposition en EUN :

Il est important de faire le lien entre le vocabulaire dizaines et centaines et la prise d'informations dans l'écriture chiffrée du nombre.
– « 720 craies ça fait 7 boîtes de 100 craies et 2 étuis de 10 craies »;
– « 720 c'est 7 centaines et 2 dizaines »;
– « 720 craies ça fait 72 étuis de 10 craies »;
– « 720 c'est 72 dizaines ».

Figure 52 : extrait de la situation 1, « ERMEL CE2 », p.298

C'est donc la décomposition utilisant les EUN qui est visée *in fine*. Ensuite la mise en commun porte sur l'exercice que nous avons étudié ci-dessus :

Dans un second temps, on examine les méthodes utilisées dans le cas d'un nombre de quatre chiffres, par exemple 1990 :



Cette écriture permet de lire la solution pour 1990 craies :
– 19 boîtes de 100 craies et 9 étuis de 10 craies;
– 1 990 c'est 19 centaines et 9 dizaines.

Figure 53 : extrait de la situation 1, « ERMEL CE2 », p.298

Ce qui est alors mis en évidence n'est plus la décomposition en EPD mais la technique de troncature permettant d'obtenir le nombre de boites de 100 directement à partir de l'écriture chiffrée, même si cette technique n'est pas formulée. Et là encore on peut noter l'utilisation des EUN, qui semblent servir à l'institutionnalisation.

Cela est confirmé par le travail demandé dans la troisième phase (p.298) où les élèves doivent pour chaque commande l'écrire en boites et étuis puis centaines et dizaines, ainsi que dans la situation suivante (« les stocks ») où l'élève doit dénombrer des collections de craies dont les groupements sont exprimés d'abord en boites et étuis puis centaines et dizaines, ce qui témoigne d'une volonté de décontextualisation.

Pour conclure cette analyse, nous pouvons dire que finalement les élèves vont apprendre à trouver le nombre de centaines (donc ici de boites de 100) d'un nombre à quatre chiffres directement à partir de l'écriture chiffrée. Cette technique n'est pas construite en appui sur les conversions entre unités. L'utilisation de techniques de calcul (et éventuellement de la calculatrice) permet de contourner leur utilisation. La référence au principe décimal est conceptualisée par le matériel : elle n'est pas décontextualisée (par un travail de conversion entre EUN). Tout cela peut alors expliquer pourquoi dans les commentaires destinés à l'enseignant, il n'est pas fait référence aux relations entre unités dans cette deuxième phase alors que l'activité proposée aurait pu s'y prêter.

Dans les activités de dénombrement suivantes nous pouvons noter que le nombre d'unités de chaque ordre peut être supérieur à 9 (que ce soit pour le dénombrement ou la situation inverse). On retrouve ce choix dans la situation 2 par exemple, inverse de la première, avec :

- « combien de craies dans un stock de 21 boites ?
- combien d'unités dans 32 centaines ? »

Nous venons de voir dans l'étude de la situation 1 que se pose la question des connaissances sur les nombres à 4 chiffres : elles sont utilisées mais il n'est pas fait référence à la valeur du chiffre situé au 4ème rang. La question de l'oral n'est pas non plus traitée : comment se disent ces nombres ? Est-ce qu'on ne les dit pas pour le moment ? Les auteurs ne font pas de commentaires relatifs à cette question.

T_{AR} : avancer/reculer (4.1, 11.1)

Cela est tout d'abord travaillé dans une activité utilisant la calculette dont l'enjeu est « d'installer l'une des principales caractéristiques de notre système de numération : la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture d'un nombre ». La technique de troncature découverte dans la situation 1 est réinvestie : par exemple pour passer de 6778 à 7378 sans effacer et sans taper le nombre à obtenir. Une technique rapide (signalée par les auteurs) consiste à chercher comment passer de 67 centaines à 73 centaines.
Le « jeu du furet » est également proposé en activité rituelle (11.1) : il s'agit d'un travail cette fois sur la suite orale des nombres. Il est signalé que l'on peut utiliser une version écrite. Cette activité devrait être travaillée dans les périodes 1 à 5 d'après les indications du guide mais :

- dans le planning proposé p.286-287 elle apparait seulement en période 5
- dans le guide d'utilisation, aucune mention n'en est faite dans le thème « connaître les nombres ».

On peut alors penser que la technique de comptage oral (pour un dénombrement ou la recherche d'un *nombre de*) risque de ne pas être mobilisée par les élèves comme nous l'avions relevé dans l'analyse de la situation 1. Cette technique peut pourtant s'avérer utile comme moyen de contrôle notamment lorsque l'on utilise un support matériel.

$T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$: écrire/nommer (6, 11.2)

Ce type de tâches est proposé dans une activité qui est proposée en période 3 donc bien après l'introduction par la situation 1 des nombres à 4 chiffres. Il sera donc nécessaire pour l'enseignant de travailler l'activité 11.2 dès la première période de l'année, ce qui n'est pas précisément indiqué.
Cette activité a pour objectif de « faire fonctionner et institutionnaliser les règles de la numération orale ». En effet, l'utilisation d'étiquettes recto verso avec d'un côté les mots-nombres et d'un autre l'écriture en chiffre(s) permet de mettre en évidence le lien entre la décomposition en EPD et le nom du nombre. Cependant les éléments d'institutionnalisation (technologies) ne sont pas proposés et sont donc laissés à la responsabilité de l'enseignant.

$T_{Tec/epd}$, $T_{Tepd/ec}$, $T_{Tec/eun}$, $T_{Teun/ec}$, : décomposer/recomposer (7,8, 9)

Les situations 7 et 8 sont très proches du point de vue de la tâche proposée. Il s'agit de déterminer le nombre de points dans un jeu de lancer : jeu du bowling pour la situation 7 et jeu de palets pour la 8 (cf. Annexes I.2). Pourtant dans la situation 7 le nombre de quilles de chaque unité est limité à 9 alors que dans la situation 8 ce nombre peut « dépasser 10 ou même 20 » comme cela est précisé par les auteurs. Un exemple est donné : « on a 8 et 4 sur 100, 7 sur 10 et 5 au-dehors ». Il s'agit de trouver le nombre de points marqués. La tâche inverse est également proposée en jouant toujours sur le nombre d'unités de chaque ordre : « il s'agit de trouver différentes façons de placer les palets […] pour obtenir 15 612 points avec les palets 6, 3, 6, 9, 9 ». Il s'agit bien sûr d'une différence importante pour la possibilité de travailler les conversions, mais cela n'apparaît pas dans les commentaires du guide. Il est

seulement précisé la différence de difficulté entre les deux : « la situation Bowling est une aide pour les enfants qui ont encore des difficultés en numération. Pour les élèves les plus à l'aise, on peut passer directement à la situation ''Jeu des palets'' ».
La situation 9 (« les étiquettes ») est un jeu de décompositions/recompositions non canoniques utilisant les EUN : des nombres d'unités à certains ordres sont supérieurs à 9 pour les recompositions et pour les décompositions il manque une des unités. Par exemple, dans la première phase il faut recomposer 6 dizaines 15 centaines 7 milliers et dans la troisième phase les élèves doivent décomposer 9254 en unités, dizaines et milliers. Nous avons donc à faire ici à des tâches pouvant mettre en jeu les conversions entre unités. Pour recomposer par exemple 24 dizaines, 5 centaines et 8 unités, les élèves peuvent en effet convertir 20 dizaines en 2 centaines, puis les ajouter aux 5 centaines de départ ou convertir 5 centaines en 50 dizaines et ajouter les 24 dizaines, ce qui donne 74d8u soit 748.
Dans les « traces attendues », les auteurs ne décrivent pas cela. Ce sont des techniques de calcul qui apparaissent : en ligne ou en colonnes (pour 24d 5c et 8u).

- ***Traces attendues*** (pour l'exemple 3)

a) (24 x 10) + (5 x 100) + 8 = 240 + 500 + 8 = 748
b) 240 + 500 + 8 = 748
c) 748 (calcul mental uniquement)

C	D	U
2 5	4	 8
7	4	8

$$\begin{array}{r} 240 \\ +\ 500 \\ +\ \ \ 8 \\ \hline 748 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 4\ . \\ +\ \ 5\ .\ . \\ 8 \\ \hline 7\ 4\ 8 \end{array}$$

Figure 54 : extrait de ERMEL, situation 9 (« les étiquettes »), p.320

Les unités de numération n'apparaissent pas ici : leur valence instrumentale pour les conversions n'est donc pas visible. On notera aussi une technique utilisant le tableau de numération avec 1 seul chiffre dans chaque colonne.

T_C : Comparer

Ce type de tâches apparait dans le sous-domaine « situer les nombres les uns par rapport aux autres » dont une activité, « Qui a le plus grand nombre ? »[62], a pour objectif d'« institutionnaliser la règle de comparaison des nombres ». Pourtant le fait d'utiliser des nombres d'au moins 6 chiffres rend impossible une justification s'appuyant sur le nom des unités, donc en appui sur une décomposition des nombres car les élèves ne connaissent pas par exemple l'expression centaine de mille ou million. La difficulté est la même si on utilise une EPD car il faudrait dire le nom des unités. Il est à noter que pour cette technique le manuel propose un exemple de formulation, ce qui n'était pas le cas pour les autres techniques :

> « La première question doit être « quel est le nombre de chiffres de votre nombre ? ». Si le nombre annoncé est supérieur ou inférieur au nombre de chiffres de l'équipe qui questionne, celle-ci peut conclure. Sinon, les deux nombres ont la même « longueur » ; il faut donc s'intéresser à la valeur de position des chiffres. La seconde question serait alors « Quel

[62] Voici la règle du jeu indiquée dans le guide : « Il s'agit d'un jeu entre deux équipes adverses : chaque équipe reçoit un nombre entier écrit sur une feuille et ne connaît pas le nombre donné à l'adversaire. En procédant par un échange de questions et de réponses écrites formulées sur une feuille, chacune des équipes doit trouver qui a le plus grand nombre. L'équipe qui trouve la première la réponse à cette question a gagné. Toutes les questions sont permises sauf ''Quel est ton nombre ?'' »

est le premier chiffre de votre nombre ?, puis éventuellement « quel est le second chiffre de votre nombre ? » (p.344).

Les auteurs contournent le problème du nom des unités en parlant du « premier » puis du « second » chiffre. Le principe de position est donc bien en jeu mais la position de chaque unité n'est pas décrite et la technique donnée n'est pas justifiée.

Conclusion sur l'organisation mathématique de la numération dans ERMEL CE2

La progression se distingue de celle proposée par les autres manuels étudiés : les nombres à quatre chiffres y sont en jeu dès la première situation proposée (période 1).
On trouve le même découpage que celui des programmes de 2002 selon deux thèmes : « désignation orale et écrite des nombres » et « situer les nombres les uns par rapport aux autres ». Le premier thème correspond à un regroupement d'OM_{card} et OM_{trad}, puisque ce sont les problèmes de commande de collection (« les craies ») et de dénombrement de collection (« les stocks ») qui permettent d'amener le travail sur les traductions d'écritures : traductions EC/nom du nombre, EC/EUN ou EC/EAC/EPDC. Le deuxième thème correspond à l'OM_{ord}, mais nous ne l'avons pas étudié.
Les valeurs des variables utilisées dans les situations de dénombrement, de commande ou de traductions d'écritures permettent de mettre en jeu le principe décimal de la numération. Cependant comme nous l'avons vu dans l'analyse de la première situation, le choix est fait par les auteurs de privilégier les décompositions utilisant les EAPD ou EPD ce qui amène à utiliser des règles de calcul pour construire des techniques utilisant les nombres à 4 chiffres. Le principe décimal est alors transparent. Même si une place importante est donnée aux EUN (ce qui là encore n'est pas le cas dans tous les manuels étudiés), elles ne sont pas utilisées pour faire des conversions. Nous interprétons tous ces phénomènes comme liés au fait que le travail technologique soit exclusivement proposé avec les EAPD ou EPD.
Finalement, même si cet ouvrage est une source potentielle de situations permettant de mettre en jeu des conversions entre unités (ce qui peut être un point d'appui pour la formation des enseignants par exemple), il nous semble que les choix faits par les auteurs que nous venons d'expliciter peuvent faire obstacle à l'utilisation effective des conversions.
De plus la conception des contenus des institutionnalisations est presque toujours à la charge de l'enseignant. Ce dernier doit décrypter à travers les différents commentaires proposés (notamment les descriptions des techniques attendues des élèves) ce qui sera à institutionnaliser. Cela n'aide pas à identifier clairement les techniques visées ainsi que les éléments technologiques en jeu, ce qui est particulièrement vrai pour le principe de position, que nous n'avons pas vu explicité dans le manuel. Il apparait implicitement à travers les exemples de décompositions proposées.

Conclusion de l'étude des programmes et manuels

Les instructions officielles de 2002 à 2008

Les programmes sont de moins en moins précis et développés, notamment concernant les types de tâches de la numération. Dans les programmes de 2002 il est fait mention « d'activités de groupements et d'échanges » alors que les types de tâches indiqués ne semblent pas les mettre en jeu et qu'il n'est pas fait mention de conversions entre unités (hors contexte). Dans ces programmes (et dans leur actualisation en 2007), l'utilisation de l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position », qui réfère aux savoirs de la numération, ne laisse pas apparaître les savoirs qui s'y rattachent. Nous avons mis en évidence une évolution qui consiste à donner de plus en plus d'importance à certains types de tâches (écrire/nommer et comparer), que l'on retrouve dans les évaluations nationales, tout en faisant disparaître du texte des programmes le type de tâches *nombre de* ou les décompositions/recompositions diverses. Cela a pour conséquence une centration sur le principe de position de la numération.

Nous avons également remarqué de moins en moins de précision sur les types d'écritures attendues, même s'il semble que l'on accorde toujours une grande importance aux écritures utilisant les puissances de 10 et une tendance à utiliser les unités de numération plutôt pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres.

Les manuels

Soulignons tout d'abord, alors que cela n'apparait pas dans les programmes, que l'étude des nombres à quatre chiffres se fait dans les manuels, excepté dans le guide *ERMEL*, après un travail important de révision sur les nombres inférieurs à 1000 exclusivement, nombres dont l'étude est faite en CE1 (2$^{\text{ème}}$ primaire) selon les programmes officiels.

Alors que l'étude des programmes et évaluations nationales montre une forte tendance à un travail centré sur des types de tâches écrire/nommer et comparer, qui mettent en jeu le principe de position de la numération, notre étude de manuels a permis d'identifier des marges de manœuvre possibles pour les enseignants du fait de la diversité des approches proposées par ces manuels. Cela permet alors de souligner l'influence importante du (ou des) manuel(s) utilisé(s) par les enseignants pour ce thème. Même s'ils s'appuient fortement sur les programmes, on peut penser que deux enseignants de CE2 utilisant respectivement les manuels *La tribu des maths* et *J'apprends les maths* ne vont pas amener leurs élèves à construire le même rapport personnel à la numération.

Nous allons commencer par revenir sur les différents aspects du travail sur la numération identifiées dans l'OM de référence.

La prise en compte des OM_{card}, OM_{ord} et OM_{trad} dans les manuels.

Dans *Cap Maths*, *La tribu des maths* et *ERMEL*, les types de tâches relevant de l'OM_{card} servent d'introduction du travail sur la numération, avant de proposer un travail centré sur l'OM_{trad} (et l'OM_{ord}), même s'il y a des différences importantes entre ces manuels dans le travail qui est fait dans cette introduction. Ainsi le travail sur l'OM_{card} apparaît comme une raison d'être de l'étude de la numération. On trouve à la fois le dénombrement d'une collection, le *nombre de* contextualisé à des collections ou la comparaison de collections. Dans *J'apprends les maths*, le travail sur la numération reste cantonné à l'OM_{card}, sans aller vers des traductions d'écritures. L'aspect ordinal des nombres n'y est pas un enjeu et les traductions d'écritures hors contexte non plus.

Concernant l'OM_{trad}, nous avons repéré une centration sur le pôle des traductions canoniques d'écritures dans *La tribu des maths* et *Cap Maths*. Dans *ERMEL*, au contraire, les problèmes de décompositions/recompositions mettent en jeu des conversions entre unités par un choix de valeurs des variables didactiques approprié (nous y reviendrons). Cependant, dans aucun manuel nous n'avons vu de conversions entre unités de numération, ce qui confirme le constat de Chambris (2008). Il semble aussi que les unités de numération ne sont pas utilisées pour leur valence instrumentale de conversion, même dans ERMEL où elles sont beaucoup utilisées. Il n'y a donc pas de travail spécifique de conversions entre unités à l'intérieur de l'OM_{trad}.

Dans les manuels (et guides du maître) nous n'avons pas trouvé de référence à des activités de groupements et d'échanges d'objets d'une collection physique de plus de mille éléments[63], comme cela était évoqué dans les commentaires des programmes de 2002 (« La valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent »). Nous allons préciser cette question.

<u>Un choix partagé par les manuels étudiés : pas d'activités effectives de groupements et d'échanges</u>

Concernant les « activités de groupements et d'échanges », un choix partagé par les auteurs semble être de ne pas en proposer mais de faire raisonner les élèves directement sur les écritures chiffrées ou les EPD, EUN, etc. L'utilisation de matériel de numération est cependant préconisée dans les manuels. Dans *Cap Maths*, *J'apprends les maths* et *ERMEL*, un matériel évoqué, constitué de groupements récursifs par dix, pourrait permettre de faire référence à des activités de groupements et d'échanges voire des activités décontextualisées de conversions entre unités.

Dans *Cap Maths* il s'agit de cartes avec les EPD ($\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, $\boxed{1000}$), donc d'un matériel où les unités sont marquées symboliquement. Il est utilisé ponctuellement (lors d'une séance). C'est un matériel manipulable : on peut par exemple grouper 10 cartes $\boxed{100}$ et les échanger contre 1 carte $\boxed{1000}$. Dans *J'apprends les maths* il s'agit d'un matériel où les unités sont également marquées symboliquement mais peuvent toutefois être visibles, par exemple on voit une « valise » ouverte avec 10 « boites » (de 10 billes qui, elles, ne sont pas visibles) à l'intérieur ou encore une « malle » avec 10 « valises ». Dans ce dernier cas il s'agit d'un matériel représenté (les groupements sont donc déjà réalisés et les échanges se font éventuellement par collage d'une « valise » ou d'une « malle ». L'évocation du matériel (représenté par des dessins) est systématique dans les séances de numération. Dans *ERMEL,* plusieurs types de matériels sont évoqués comme les craies (groupées par 10 et 100) par exemple.

Dans le manuel *La tribu des maths* ce n'est pas le cas puisque les seules collections évoquées sont un cadre de ruche contenant 1000 alvéoles (non groupées en 10 paquets de 100) ou les signes d'articles de presse.

<u>Le travail mettant en jeu les conversions et le principe décimal dans *Cap Maths* et *La tribu des maths*</u>

Ces deux manuels sont dans la lignée des programmes et évaluations que nous avons étudiés du point de vue des types de tâches qui y sont travaillés sur les nombres à quatre chiffres : écrire/nommer, comparer et décomposer/recomposer ont une place centrale. Cependant le principe de position n'y a pas la même place : dans *Cap Maths* cela permet de justifier les techniques pour nommer/écrire et comparer alors que dans *La tribu des maths* ce n'est pas explicitement un élément technologique pour ces techniques. Dans ces manuels le travail sur le principe décimal est cantonné au type de tâches *nombre de*. Ce type de tâches n'est pas associé à des conversions entre unités mais à celle de troncature :

- par extension de la technique de multiplication (règle des zéros) au cas des nombres à 4 chiffres dans *Cap Maths*. C'est alors la multiplication par les puissances de 10 (10, 100 …) qui joue le rôle d'élément technologique.

[63] Cela est toutefois proposé dans l'activité « les fourmillions » d'ERMEL CE1.

- par la monstration d'un exemple, on amène les élèves à découvrir la technique de troncature sans réellement en proposer de justification (l'explication proposée porte sur des nombres à 2 chiffres) dans *La tribu des maths*.

Le principe décimal est donc incarné par les règles de multiplications par les puissances de dix dans le premier manuel ou bien n'est pas un élément technologique pour la technique de troncature dans le deuxième manuel.

<u>Le travail mettant en jeu les conversions et le principe décimal dans *ERMEL* et *J'apprends les maths*</u>

Dans *J'apprends les maths* et dans le guide *ERMEL* nous avons mis en évidence la place centrale accordée aux types de tâches *dénombrer* et *nombre de*, justifiée par des affirmations comme : « on veut amener les élèves à prendre conscience, non seulement des chiffres au rang des centaines, mais du nombre de centaines » (*ERMEL* p.295). Cela montre un travail sur les deux principes de la numération, même si là encore on peut remarquer que le principe décimal est encore associé principalement au *nombre de*.

Dans *ERMEL* (tout comme dans *Cap Maths*), les EPD sont utilisées pour permettre le passage des nombres à 3 chiffres aux nombres à 4 chiffres. Les règles de multiplication par 10, 100 … jouent alors le rôle d'élément technologique. Cela permet aux élèves de réussir les tâches proposées sans avoir de connaissances relatives à la relation centaines/milliers donc à ne pas considérer le travail sur les relations entre unités comme un enjeu pour l'étude des nombres à 4 chiffres.

Pourtant *ERMEL* fournit un terrain propice à un travail sur les conversions entre unités du fait des situations proposées et du choix des variables didactiques. Par exemple, la recherche de diverses décompositions/recompositions est un enjeu (comme préconisé dans les programmes 2002 et 2007) dans *ERMEL*, avec plus de 9 unités à certains ordres, ce qui n'est pas le cas dans les trois manuels (hormis *J'apprends les maths* dans un dénombrement dans un autre contexte, mais c'est alors un comptage oral qui est attendu des élèves, selon les auteurs).

L'approche est différente dans *J'apprends les maths* où la technique de multiplication par les puissances de 10 est travaillée après la séquence sur la numération. Elle est alors justifiée par les relations entre unités (en appui sur des conversions avec le matériel de numération du fichier). Dans ce manuel, le travail sur le *nombre de* se fait à partir de collections représentées avec une volonté de lier les groupements d'unités par dix (qui joue le rôle d'élément technologique) avec la lecture directe sur l'écriture chiffrée. Mais l'articulation entre les deux est rendue difficile par l'invisibilité du principe de position dans ce manuel.

Nous allons maintenant revenir sur la formulation des savoirs de la numération dans les manuels.

<u>La formulation des savoirs de la numération</u>

Dans tous les manuels (excepté J'apprends les maths) des types de tâche relevant principalement du <u>principe de position</u> sont travaillés. Pourtant ce savoir n'apparaît souvent qu'à travers des exemples de décompositions ou bien dans le tableau de numération. De plus, il est rarement explicité pour formuler ou justifier d'autres techniques, comme écrire/nommer ou avancer/reculer … La technique de juxtaposition (pour recomposer une EUN ou EPD en EC) n'est jamais formulée en texte : elle n'apparaît qu'à travers le tableau de numération qui résume donc la technique et la technologie. Dans *ERMEL* le principe de position apparait à travers la définition des objectifs, à travers l'utilisation de l'expression « valeur des chiffres en fonction de sa position » (qui contient aussi implicitement le principe décimal, comme dans les programmes 2002) mais il n'y a pas de formulation proposée à

destination des élèves. Dans *La tribu de maths* et dans *Cap Maths* le principe de position apparait sous la forme du tableau de numération qui semble à la fois jouer le rôle de support pour la technique de décomposition/recomposition et d'élément technologique. Dans *Cap Math* il y a une autre représentation de ce savoir utilisée avec des flèches partant de chaque chiffre et donnant la valeur avec les unités de numération que l'on peut rapprocher de la formulation en texte comme celle que l'on peut trouver dans des manuels à l'époque classique : « Les milliers s'écrivent au quatrième rang à partir de la droite ». Nous n'avons pas vu une telle formulation dans les manuels étudiés.
Cette absence d'élément technologique rassembleur pourrait scinder l'OM de la numération en OM ponctuelles non articulées entre elles. Par exemple, il nous semble que dans *La tribu des maths*, une très grande variété de types de tâches mettant en jeu le principe de position est proposée dans une même double page (comparer, écrire/nommer, avancer/reculer, chiffre des/nombre de, décomposer/recomposer) sans qu'un discours technologique pouvant les unifier ne soit perçu à travers ce qui est écrit dans le mémento ou dans le guide pour l'enseignant.
Dans *J'apprends les maths* le choix est fait d'éviter l'utilisation des décompositions canoniques mais du coup on ne voit pas d'élément technologique pour écrire/nommer et comparer. Rien n'est dit dans ce manuel sur le principe de position, pour lequel nous avons même noté une certaine défiance des auteurs qui le considèrent comme « des règles superficielles liées aux écritures ».
Concernant la formulation du <u>principe décimal</u> nous avons vu qu'elle est absente du manuel *La tribu des maths*. Ce n'est pas le cas dans *Cap Maths* où ce savoir fait l'objet d'un encadré dans le « dico-maths », même si nous n'avons pas relevé d'activité y faisant référence dans le manuel. Il est également explicité dans le « j'ai appris » de *J'apprends les maths* avec la technique de troncature. Dans *ERMEL* les relations entre unités ne sont pas explicitées même si plusieurs situations les mettent en jeu. Nous avons fait l'hypothèse que cela pouvait être lié à l'appui sur les règles de calcul ou alors que pour les auteurs le principe décimal est incarné par le matériel (organisé en groupements successifs par dix) sans être décontextualisé (avec les EUN par exemple). Cela pose donc des questions pour son institutionnalisation par les enseignants.
De plus, le fait que le principe décimal ne soit quasiment associé qu'au type de tâches *nombre de* (sauf dans *J'apprends les maths*) ne favorise pas de liens au niveau technologique entre les techniques de divers types de tâche mettant en jeu les conversions et renforce l'impression d'éclatement de l'OM de la numération en OM ponctuelles non articulées.

Lien avec les évaluations des élèves (chapitre 2)

Suite à cette étude, on peut penser que l'on pourrait avoir les mêmes constats de difficultés d'élèves que dans les évaluations du chapitre 2, pour les tâches mettant en jeu des conversions, pour les nombres à quatre chiffres. Les conversions entre unités ainsi que les décompositions/recompositions mettant en jeu ces conversions ne sont pas un enjeu explicite des programmes et de la plupart des manuels.
Par contre, nous avons observé la présence du type de tâches *nombre de* dans tous les manuels. Il est traité de manière très formelle dans *La tribu des maths*, mais nous avons pu voir dans *ERMEL*, *Cap Maths* et *J'apprends les maths* des problèmes de *nombre de* dans un contexte de la vie courante (craies, monnaie, trombones, …). Les difficultés que ce type de tâches pose aux élèves pourraient alors avoir pour origine l'absence de travail sur les

conversions entre unités permettant de justifier cette technique et de l'adapter à différentes unités.

Vers des questions sur l'enseignement de la numération dans les classes

Malgré les contraintes portées par les programmes qui tendent à minorer le travail sur le principe décimal, grâce à l'existence de manuels, il existe des marges de manœuvre pour les enseignants pour travailler ce savoir, notamment par la proposition de tâches pouvant mettre en jeu des conversions. Cela nous amène alors à nous poser des questions sur l'OM effectivement mise en œuvre dans les classes de CE2, lors du travail sur les nombres à quatre chiffres. Quelle est l'influence des contraintes institutionnelles sur les pratiques des enseignants, c'est-à-dire sur leur travail de préparation et sur la mise en œuvre de leur séance en classe ? Comment investissent-ils les éventuelles activités proposées dans les manuels pour travailler les conversions et donc le principe décimal de la numération ? Quelles conséquences possibles pour l'apprentissage des élèves ? Ces questions seront l'objet du chapitre suivant où nous présenterons une étude de cas de la mise en œuvre, par trois enseignants de classes ordinaires, d'une séquence sur les nombres à quatre chiffres en CE2.

Chapitre 4

L'enseignement de la numération des nombres à quatre chiffres en CE2 : une étude de cas

I. Objectifs, cadres théoriques et méthodologie

I.1 Les objectifs et les cadres théoriques

L'objectif de ce chapitre est d'essayer de comprendre l'influence des conditions et contraintes identifiées dans l'OM à enseigner sur les pratiques des enseignants.
Pour cela nous nous appuyons sur l'étude faite pour notre mémoire de Master (Tempier, 2009). Nous ne reprenons pas toutes les analyses mais seulement certains résultats permettant de mettre en évidence certains phénomènes observés. Nous ajouterons à cela l'analyse de l'observation d'une enseignante faites la même année mais non traitée dans ce mémoire.
Rappelons que nos questions portent sur la prise en compte des conversions entre unités et du principe décimal dans les séquences proposées par les enseignants, que ce soit à travers :

- le type de tâche de conversion entre unités
- ou d'autres types de tâches les mettant en jeu, ce qui peut nécessiter un choix approprié des valeurs des variables didactiques dans les tâches proposées ou encore l'utilisation des unités de numération.

Nous commençons par rappeler les cadres théoriques que nous avons utilisés. Pour prendre en compte l'activité des enseignants à la fois hors classe, lorsqu'ils préparent une séance ou un ensemble des séances, et en classe lorsqu'ils mettent en œuvre cette préparation, nous nous utilisons la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) et en particulier Margolinas (2002) et Perrin-Glorian et Hersant (2003). Les différents niveaux de l'activité sont schématisés par le tableau ci-dessous, extrait de Coulange (2006).

Niveau +3 : idéologique Réfléchir de façon générale à son enseignement des maths
Niveau +2 : de projet global Concevoir les grandes lignes d'enseignement d'un thème mathématique
Niveau +1 : de projet local Déterminer un scénario de leçon ou de situation
Niveau 0 : didactique Action du professeur en classe – interactions publiques avec les élèves
Niveau -1 : d'observation/dévolution Dévolution – observation de l'activité des élèves

Figure 55 : les niveaux d'activité du professeur

Ce schéma a toutefois l'inconvénient de ne pas montrer l'imbrication de ces différents niveaux. Dans une première description approximative du modèle, Margolinas (2002) décrit ainsi les liens entre les différents niveaux :

> « Le professeur acteur en classe (P0) est toujours en tension entre : son projet d'enseignement (+1) et les réactions des élèves (-1). Mais même le professeur qui prépare une leçon (P+1) est en tension entre sa planification du thème mathématique à l'intérieur duquel s'insère la leçon (+2) et ce qu'il sait des conditions de la réalisation en classe (0). » (p.1)

Elle précise cependant que cette

> « présentation de l'activité du professeur peut laisser penser qu'il s'agit d'un modèle temporel, c'est-à-dire que le professeur passe l'un après l'autre dans tous les niveaux considérés. En fait nous allons voir que ce modèle n'est pas temporel mais structurel » (p.2).

Ce modèle permet une prise en compte de contraintes d'ordre institutionnel pesant sur les choix de l'enseignant en lien avec ce qui se passe dans la classe avec les élèves :

> « Le professeur est ainsi pris entre des considérations qui le tirent en quelque sorte vers les élèves et d'autres qui proviennent de sa condition de professeur de mathématiques, et comme tel fortement assujetti à l'institution scolaire et à l'institution mathématique. » (ibid., p.1)

Pour définir le projet de l'enseignant dans les niveaux surdidactiques, nous nous limiterons à une caractérisation de ce projet en termes d'organisations mathématiques.
Concernant le niveau didactique, nous utiliserons une description en termes de situation. L'étude de la situation se fait par la comparaison de l'analyse *a priori* et de l'analyse *a posteriori* qui prend en compte le déroulement de cette situation avec les élèves. Dans le cas de l'observation de classes « ordinaires », se pose le problème de l'utilisation du concept de situation adidactique. Comme le précisent Perrin-Glorian et Hersant (2003) « dans une situation de classe réelle il est parfois difficile de distinguer ce qui relève du milieu adidactique et ce qui relève du contrat didactique ». Il ne s'agit pas alors de chercher des situations adidactiques dans ce qui est proposé par le maître mais plutôt de reconstruire une

situation théorique (au sens de la TSD) qui modélise le déroulement en classe, puis de regarder comment le maître la gère dans le déroulement effectif de la situation. Perrin-Glorian et Hersant (2003) mettent en évidence deux cas disjoints :

> - « ou il existe un milieu [supposé indépendant du maître] avec lequel l'élève peut avoir un rapport direct, effectif ou évoqué, et qui peut lui amener des rétroactions, mêmes insuffisantes ; dans ce cas on peut reconstruire une situation qui a des potentialités adidactiques, même si le maître peut être amené à intervenir sur le milieu et à aménager le milieu au cours de l'action […]
>
> - ou cette possibilité n'existe pas ; l'enseignant est le seul garant des procédés utilisés par les élèves ; c'est lui seul qui réagit aux actions des élèves. »

Il est donc important dans l'analyse *a priori* d'identifier le savoir visé, le milieu, et le savoir ancien avec lequel les élèves vont pouvoir interpréter les rétroactions du milieu. Dans l'analyse *a posteriori*, nous regardons si l'enseignant s'empare ou non cet éventuel potentiel adidactique de la situation, comment il utilise et fait évoluer le milieu ou le contrat didactique.
Cela nous permet maintenant de préciser nos questions.

- Quelle est l'OM de la numération construite par les enseignants en situation de projet (nous ne pourrons en faire qu'une reconstruction *a posteriori*) ? Quelle influence possible des contraintes institutionnelles ? Du manuel utilisé ?
- Concernant la préparation et la mise en œuvre des séances, les enseignants vont-ils proposer des situations mettant en jeu les conversions et donc le principe décimal ?
- Si c'est le cas, comment vont-ils mettre en œuvre ces situations de façon à faire émerger ce savoir ? Si oui, comment sera-t-il institutionnalisé ?

L'étude de l'OM à enseigner a aussi fait émerger des questions concernant la formulation du principe de position dans les manuels. Comment les enseignants institutionnalise-t-il ce savoir ? Comment vont se dire dans la classe les relations entre les unités et leur rang ?
Concernant le niveau -1, il est aussi intéressant de se demander quelle influence peuvent avoir les contraintes institutionnelles sur l'interprétation que font les enseignants des erreurs de leurs élèves. En effet, Margolinas, Coulange, Bessot (2005) ont observé qu'il existait un lien étroit entre l'interprétation des erreurs des élèves par le professeur et leur projet didactique local ou global (préparation d'une séance particulière ou d'une séquence). Avec les contraintes que nous avons relevées dans le chapitre précédent concernant le principe décimal de la numération, on peut alors se demander comment les enseignants peuvent interpréter des erreurs relevant de connaissances en lien avec le principe décimal et les prendre en compte en classe lors de la mise en œuvre de leur projet.

I.2 Méthodologie

Tous les enseignants de CE2 observés (et conformément à ce que nous avons pu voir dans la plupart des manuels) proposent un travail sur les nombres à 3 chiffres en début d'année et introduisent les nombres à 4 chiffres après les vacances de la Toussaint ou de Noël. Nous avons choisi d'observer la séquence concernant l'introduction des nombres à 4 chiffres. Pour chaque enseignant nous avons observé plusieurs séances de la séquence mise en œuvre.

Le choix des trois classes, des enseignants et des séances

Voici quelques similitudes et différences concernant le contexte des classes observées et les enseignants :

- Le contexte social, culturel des classes observées :
  - en milieu rural à une vingtaine de kilomètres du chef lieu de département,
  - des effectifs de classe assez proches,
  - une classe à double niveau : CE1/CE2. Cela peut avoir a une influence forte sur les pratiques des enseignants.
- Les enseignants (Mme A, M. B et Mme C) :
- aucun n'est débutant mais Mme A n'a que 5 années d'expérience (et il s'agit de sa première année dans cette classe) contre 18 années pour M. B dont 11 ans dans cette classe ; Mme C a 8 années d'expérience : elle a toujours enseigné en CE2 (3 ans en CE2/CM1/CM2 puis 5 ans en CE1/CE2).
- utilisation de ressources différentes :
  - Mme A utilise l'ouvrage *ERMEL* pour les situations de recherche (introduction de nouvelles connaissances, réinvestissement, problèmes ouverts, …) et propose des exercices d'application parfois issus du manuel « Spirale CE2 » ;
  - M. B dit ne pas utiliser de manuel. Les fiches distribuées aux élèves sont manuscrites. Il a utilisé des manuels dans les années précédentes (*Cap Maths CE2*, *J'apprends les maths CE2*) et dit utiliser parfois *ERMEL* pour faire ses fiches ;
  - Mme C utilisait auparavant *Cap Maths* en CE2/CM1/CM2 (3 ans) puis, en CE1/CE2 dans cette école seulement la première année. Elle a changé pour *J'apprends les maths* avec les CE1 et CE2. Elle explique ce changement par le fait que les CE1 sont moins autonomes que les élèves de cycle 3. Ce fichier lui a été conseillé par son mari.

Nous avons choisi d'observer l'étude de la numération de position pour les nombres à quatre chiffres dans ces trois classes.

Recueil des données

Nous avons enregistré les séances observées à l'aide d'un dictaphone et nous avons pris des notes sur ce qui se passait dans la classe. Pour reconstruire l'OM enseignée, nous nous appuyons principalement sur nos notes, les enregistrements permettant des descriptions plus précises des techniques et technologies qui apparaissent publiquement dans les classes. Pour l'analyse des séances nous nous sommes appuyé sur des transcriptions de certains moments de la séance observée.
Nous avons observé trois séances pour chaque enseignant, ce qui ne constitue pas l'ensemble du travail sur la numération des nombres à quatre chiffres dans leurs classes respectives. Il y a donc eu des séances intermédiaires et/ou postérieures à celles que nous avons observées.
Pour les séances non observées nous avons photocopié les cahiers des élèves ; nous avons demandé, lors des entretiens, des précisions sur les exercices proposés lors des moments de travail sur ardoise. Pour un des enseignants (M. B) la séquence a duré une majeure partie de l'année. Il n'a pas été possible d'avoir accès à tous ces moments collectifs oraux qui ne laissent pas de trace.
Nous n'avons pas proposé d'évaluation à faire passer aux élèves (ni avant, ni après la séquence) notamment pour ne pas influencer les choix des enseignants dans les tâches à travailler.
Nous avons également voulu, lorsque cela était possible, mener des entretiens de fin de séance avec les enseignants (enregistrés si possible : nous leur demandions ce qu'ils pensaient de la séance par rapport à ce qu'ils avaient prévu. Nous n'avons pas utilisé de

technique d'entretien particulière. L'objectif étant simplement de chercher à compléter nos analyses avec le point de vue de l'enseignant.
Dans la transcription des entretiens, nous utiliserons les lettres E pour désigner l'enseignant et Ch pour le chercheur. Les signes +, ++ ou +++ traduisent des moments plus ou moins longs de pause dans le discours.
Une enseignante (Mme A) nous a semblé manifester une certaine réticence à faire des entretiens enregistrés en fin de séance. Nous avons alors choisi de les faire de façon plus informelle pendant le temps de récréation (sans enregistrer avec le dictaphone), et nous avons essayé d'en décrire le contenu par la suite.
Enfin pour les trois enseignants, nous avons fait un dernier entretien après l'évaluation finale de la séquence qui nous a permis de revenir sur le projet des enseignants et le déroulement de la séquence.

Étude de l'OM et choix d'une séance à analyser plus en détail

A partir des données recueillies, nous avons reconstitué l'OM mise en œuvre dans chaque classe. Nous pouvons alors identifier en particulier le travail qui se fait autour des savoirs de la numération. Cependant, pour recueillir des éléments plus précis concernant le principe décimal, nous avons choisi d'analyser plus en détail une séance dans laquelle des conversions sont en jeu ou sont susceptibles de l'être. Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- l'analyse *a priori* montre qu'il y a une possibilité *a priori* pour que les conversions apparaissent et l'enseignant utilise les potentialités du milieu pour les faire effectivement apparaître,
- l'analyse *a priori* montre qu'il y a une possibilité *a priori* pour que les conversions apparaissent mais l'enseignant n'utilise pas les potentialités du milieu pour les faire effectivement apparaître,
- l'analyse *a priori* montre que le milieu n'est pas favorable à l'émergence de conversions mais le maître peut quand même évoquer les relations entre unités.

Comme notre choix est de faire des « zooms » sur l'utilisation des conversions, si l'analyse *a priori* montre que le milieu n'est pas favorable à leur émergence et que l'enseignant n'y fait pas appel, nous ne ferons pas d'analyse de séance.

Analyse en termes de situations

Notre analyse *a priori* se fait sur une situation reconstruite à partir du déroulement. Nous commençons donc par décrire le déroulement, en particulier, tout ce qui concerne la donnée de la consigne ainsi que le texte fourni aux élèves, ce qui nous permettra de définir la situation.
Nous commençons par définir l'enjeu de la situation en nous appuyant sur le choix des variables et sur ce que dit éventuellement l'enseignant.
Ensuite nous définissons le milieu de la situation. Là encore nous prenons en compte le déroulement car toutes les informations fournies par l'enseignant (oralement ou par écrit au tableau par exemple) avant la mise au travail des élèves, font partie du milieu. Pour la classe de Mme A pendant la phase de recherche, les enfants sont en autonomie totale du fait de sa gestion du double niveau. M. B, qui reste davantage présent avec le groupe des CE2, organise des petites phases de recherche successives. Mme C propose une alternance de

courts moments de recherche sur ardoise et de discussion collective, avant de donner des exercices individuels aux élèves.
Nous indiquons les connaissances supposées disponibles des élèves.
Nous pouvons alors commencer à envisager les actions possibles des élèves et les rétroactions que peut ou ne peut pas apporter le milieu et les interventions qu'on peut penser nécessaires de la part de l'enseignant.
Nous donnons ensuite des éléments du déroulement pour décrire ce qui s'est passé dans la classe. Nous ferons une analyse *a posteriori* de ce déroulement pour voir les choix effectués par l'enseignant parmi les possibles pointés lors de l'analyse *a priori*.
Nous analyserons tout d'abord la phase d'action, à partir du déroulement de la phase de recherche des élèves, des régulations effectuées par l'enseignant. Nous décrirons si nécessaire les techniques utilisées par les élèves en nous appuyant sur nos notes d'observation et sur les interventions des élèves lors de la phase de mise en commun.
Nous analyserons également les phases de mise en commun (formulation et éventuellement validation) pour voir comment y apparaissent les techniques dans la classe : restent-elles invisibles, sont-elles formulées ? Justifiées ? Comment apparaissent alors les technologies ? Y a-t-il des institutionnalisations ? S'appuient-elles sur le milieu de la situation ?
Dans ces analyses nous porterons une attention particulière aux ostensifs utilisés.

II. L'OM enseignée dans la classe de Mme A

Nous avons observé trois séances sur la numération. Les deux premières séances observées sont consécutives. Il y a ensuite une séance, qui a lieu avant la troisième séance observée, pour laquelle nous n'avons que les exercices distribués aux élèves. L'évaluation finale s'est déroulée la semaine suivante. La séquence s'est déroulée sur un temps assez court (environ trois semaines pour les cinq séances).
On peut résumer cette l'OM de la numération construite par Mme A par le schéma ci-dessous.

Décomposer/ recomposer → Écrire/ nommer → Comparer → Avancer/ reculer

Principe de position

Figure 56 : OM de la numération dans la classe de Mme A

On ne trouve pas de trace de l'OM$_{card}$: ce sont des traductions d'écritures (canoniques) qui permettent d'amener le principe de position. C'est uniquement ce savoir qui est en jeu au cours de la séquence. Les types de tâche décomposer/recomposer (principalement de manière canonique : $T_{Tepdc/ec}$ et $T_{Tec/epdc}$), écrire et nommer ($T_{Tec/n}$ et $T_{Tn/ec}$) et comparer (T_C) ont une place privilégiée. Par contre avancer/reculer (T_{AR}) est traité de manière tout à fait anecdotique. C'est à partir des décompositions/recompositions que Mme A met en évidence le principe de position (situation « le bowling », cf. annexe I.2). Mais l'utilisation privilégiée des EAC et EPDC (par exemple 1000+500+20+3 ou 1×1000+5×100+2×10+3) conformément à ce qui est proposé dans son guide *ERMEL*, pourrait amener à s'appuyer sur des techniques de calcul. Les EUN apparaissent un peu dans les recompositions mais sont surtout utilisées pour évoquer le nom des rangs dans le nombre en chiffres. C'est pourquoi on les retrouve par exemple pour formuler la technique de comparaison de nombres.

L'analyse de la première séance (Tempier 2009) où Mme A met en œuvre la situation « le bowling » extraite d'*ERMEL* (cf. annexe I.2) a permis de constater que le principe de position est bien un enjeu d'apprentissage. En effet nous avons remarqué que l'enseignante questionne les élèves pour les amener à justifier (ce qui semble être un contrat courant dans la classe) leur technique de recomposition avec EAC ou EPDC. Cela lui permet d'institutionnaliser le rang des milliers (qu'elle nomme « unités de mille »). Voici comment une élève décrit sa technique de juxtaposition à partir d'une EPDC :

> « Parce que le premier chiffre une fois mille j'ai mis le un, cinq fois cent j'ai mis le cinq, deux fois dix j'ai mis le deux et trois fois un j'ai mis le trois ».

L'enseignante reprend alors pour lui faire préciser le nom de chaque unité et montre le lien entre les unités et les rangs dans l'EC en écrivant « unités de mille » au-dessus du 1 de 1523. Il est possible que cela soit lié à l'absence, que nous avons relevée, d'une formulation en texte (avec des phrases) de ce savoir dans les manuels et programmes récents. Cela peut être en partie liée à l'utilisation fréquente du tableau de numération (pour représenter ce savoir) qui prend en charge la mise en correspondance unités/rangs. Ou encore à l'utilisation des EAC/EPDC qui peuvent amener à l'utilisation de techniques de calcul se substituant au principe de position.
Le rôle du zéro est également un enjeu important dans la première séance. Mme A demande des explications pour les recompositions de nombres qui amènent à utiliser le chiffre 0. Voici ce qu'en dit un élève (pour 8003) : « parce que y'a pas de centaine et pas de dizaine » (que l'on pourrait affiner par : « pas de centaine isolée et pas de dizaine isolée »). L'enseignante appuie cela en écrivant 83 au tableau et en demandant : « et si j'écris ça qu'est-ce que ça fait ? ».
Le fait que les conversions entre unités ne soient pas un enjeu dans la séquence peut se voir en particulier dans le choix des situations d'ERMEL que fait Mme A pour le travail sur les nombres à 4 chiffres (projet). En effet, comme nous venons de le voir Mme A a choisi la situation « le bowling » pour l'introduction des nombres à 4 chiffres. Nous avions vu dans l'étude d'ERMEL que la situation « les palets », qui vient juste après dans le guide, était très proche concernant le problème posé (dénombrer des points gagnés au cours d'une partie) mais que le choix des variables didactiques dans le « jeu des palets » (cf. annexe I.2) amenait à mettre en jeu les relations entre unités (que ce soit pour décomposer ou recomposer). Le choix de Mme A peut être lié au fait que la première est indiquée pour la « période 3 » et la seconde pour la « période 4 ». Nous ne savons pas si Mme A a prévu de la traiter. Mais il semble que sa séquence sur les nombres à 4 chiffres s'arrête aux tâches avancer/reculer (avec toutefois une reprise envisagée avec des activités portant sur la monnaie en fin d'année). Cela pourrait témoigner pour nous d'une conséquence des contraintes institutionnelles pesant sur l'enseignement du principe décimal : si les conversions entre unités ne sont pas un enjeu essentiel dans le projet de l'enseignant, son choix de situation (dans un ouvrage comme ERMEL laissant une certaine responsabilité à l'enseignant dans la construction de sa séquence) n'est pas guidé par la nécessité d'un repérage des situations les mettant en jeu. De plus, les situations mettant en jeu les conversions sont plus difficiles pour les élèves (le cas de « le bowling » et « les palets » illustre bien cela), il faut donc que l'enseignant ait une bonne raison pour les choisir, en lien avec son projet d'enseignement.
Toutefois deux exercices pouvant mettre en jeu des conversions ont été proposés : le premier lors d'une séance non observée, le second dans l'évaluation finale. Nous allons revenir sur ces deux exercices. Voici le premier dans l'extrait suivant de cahier d'élève (il

s’agit de recomposer : 2 dizaines 3 centaines 9 unités, 2 unités 14 dizaines 5 milliers, 24 dizaines 5 centaines 8 unités, 6 dizaines 15 centaines 7 milliers) :

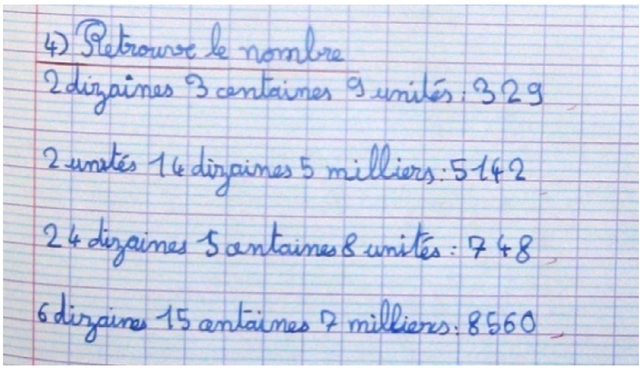


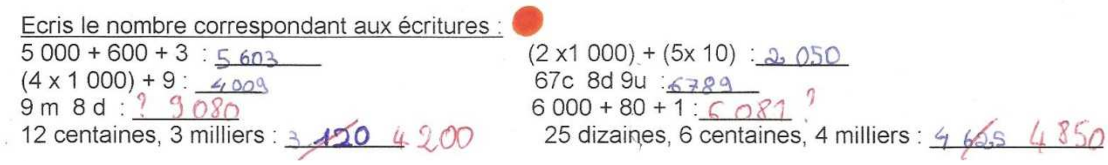
Figure 57 : extrait d’un exercice proposé entre deux séances observées (S2 et S3)

Cet exercice se distingue des autres pour deux raisons :

- il fait travailler les recompositions avec les EUN, ce qui n’est pas ce qui se faisait dans les séances précédentes (EAC, EPDC ou EMN avec l’expression « paquet de ») comme nous l’indique Mme A lors de l’entretien final ;
- il pourrait nécessiter d’utiliser les relations entre les unités de la numération (principe décimal) car le nombre d'unités d’un certain ordre dépasse 9. En effet, pour le dernier cas par exemple la conversion de 15 centaines en 1 millier et 5 centaines est nécessaire pour déterminer le nombre de milliers (7 milliers + 1 milliers).

Lors de l’entretien qui a suivi la troisième séance, nous avons voulu revenir sur cet exercice. Pour Mme A, il s’agit d’un exercice pour aller plus loin. D’ailleurs tous les enfants n’ont pas eu le temps de le faire et pour ceux qui l’ont fait, elle est passée les corriger individuellement. Il n’y a pas eu de phase collective sur cet exercice. Elle ajoute qu’il sera peut-être retravaillé plus tard dans l’année, mais que pour le moment ce n’est pas le plus important. Cela peut être à rapprocher de ce que nous avions vu dans la situation des craies d’ERMEL : les cas de *nombre de* mettant en jeu le principe décimal pour les nombres à 4 chiffres étaient proposés au début pour les élèves les plus rapides.
Le deuxième exercice mettant en jeu les relations entre unités a été donné dans l’évaluation de fin de séquence. Lors du dernier entretien, nous sommes revenus avec Mme A sur cet exercice ; nous donnons ici deux exemples de productions d’élèves comportant des erreurs :

- Océane :



- Frances :

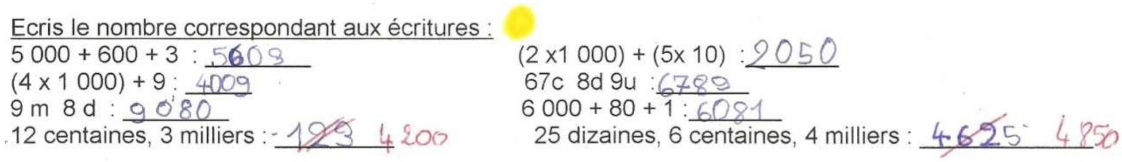


Figure 58 : extrait du premier exercice de l’évaluation finale de deux élèves

Voici un extrait de la transcription (E : enseignante, Ch : chercheur) :

> E : […] Le seul exercice on va dire qui n’a pas été tout à fait bien réussi c’est le premier en fait pour écrire le nombre correspondant aux écritures. Donc là on a les décompositions et après il fallait retrouver le nombre entier.

> Ch : oui
>
> E : c'est là où j'ai eu le plus d'erreurs dans le sens où j'avais fait exprès de mettre des nombres dans lesquels on n'avait pas forcément le ++ euh ++ oh la la je perds mes mots ! + Enfin les unités de mille, les centaines, les dizaines et les unités enfin dans l'ordre. On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors j'avais pas mis de centaines ou voilà + Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait.

On peut donc remarquer que l'attention de l'enseignante se porte uniquement sur l'ordre de présentation des unités. Elle ne parle pas du fait d'avoir un nombre à deux chiffres à certains ordres d'unités ce qui met en jeu relations entre unités et qui est, selon nous, à l'origine des principales difficultés rencontrées par les élèves. Du coup les erreurs des élèves sont ramenées à des fautes d'inattention.

On peut aussi noter à cette occasion une difficulté à parler des unités de la numération (« oh la la je perds mes mots » dans la première citation) : cela pourrait être lié à un manque de vocabulaire générique (unités de numération) institutionnellement reconnu (dans les programmes ou manuels) pour les évoquer et/ou une conséquence de l'utilisation privilégiée des EPD dans l'institution actuelle.

Au cours de l'entretien nous avons cherché ensuite à faire un parallèle avec le travail qu'elle avait effectué sur les nombres à trois chiffres où justement les conversions étaient en jeu à travers le type de tâches « nombre de » qui était travaillé dans la situation « les craies » que nous avons déjà évoquée lors de l'analyse d'ERMEL) :

> Ch : j'ai repris un petit peu tout ce que tu avais fait et dans ce que j'ai vu sur les nombres à quatre chiffres tu as moins fait ce travail finalement qui correspond aux nombres qui sont là, où y'a des échanges à faire entre les dizaines et les centaines ou entre les centaines et les milliers finalement.
>
> E : Oui, oui. Oui, là j'ai moins travaillé les échanges, oui c'est vrai. Non là j'étais plus dans la décomposition pure on va dire et puis dans la comparaison. Donc après là c'est peut-être un point qu'on va davantage approfondir sur la période suivante. Utiliser plus les échanges. On a aussi la monnaie. Donc c'est vrai qu'on va peut-être utiliser la monnaie pour voir des échanges supplémentaires.

Il nous semble que l'on peut voir ici une forte influence du manuel utilisé par la maîtresse (ERMEL CE2) dans ses choix globaux de programmation des apprentissages sur l'année. En effet dans ERMEL, la première situation de l'année sur la numération est le problème des craies (cité ci-dessus). Les auteurs choisissent de travailler sur des problèmes du type « *nombre de* » qui sont donc susceptibles de faire faire des groupements. Ils utilisent alors des nombres à quatre chiffres dès cette première situation et le principe décimal y a sa place, même si on n'en trouve pas de trace dans la description de la situation (ce qui peut jouer un rôle dans la compréhension par l'enseignant de ce qu'est ce savoir). Mais Mme A, même si elle a utilisé cette situation, a choisi de ne pas introduire dès le début d'année de nombre à quatre chiffres. Elle a commencé par faire des révisions sur les nombres à trois chiffres (c'est une pratique courante). Cependant, on peut voir qu'au moment de revenir sur les nombres à quatre chiffres, en deuxième période de l'année, elle utilise la situation proposée par le manuel à ce moment-là, sans prendre en compte le fait que dans la progression du manuel, le type de tâches *nombre de* et donc éventuellement le principe décimal pour les nombres à quatre chiffres avaient déjà été travaillés.

Mme A montre quelques signes d'hésitation quand elle parle du travail de numération qu'elle fera par la suite (fin d'année) : on note l'utilisation à deux reprises de « peut-être ». Ces hésitations peuvent faire penser qu'elle ne maîtrise pas complètement sa propre progression sur la numération. Elle semble en fait faire référence au travail proposé par ERMEL sur la monnaie qui a lieu à la dernière période de l'année. Dans les activités proposées par cet ouvrage, il y a bien un travail proposé sur les équivalences en lien avec la numération. Il s'agit de comprendre les équivalences entre 1 euro et 100 centimes et ensuite entre les différentes pièces de 10 centimes, 20 centimes, etc. Cependant aucun nombre à quatre chiffres n'apparaît dans les activités proposées. Mme A va-t-elle prendre l'initiative d'inclure ces nombres ?
Il semble que le projet global de Mme A soit piloté par *ERMEL* mais que les modifications qu'elle y apporte créent des trous dans l'organisation mathématique prévue par les auteurs. L'enseignante n'est pas à même de les combler, par manque de vigilance épistémologique, phénomène déjà relevé par Margolinas et Wozniak (2010) pour d'autres savoirs. Les contenus des programmes ne sont pas une aide pour l'enseignante sur ce point.

III. L'OM enseignée dans la classe de M. B

III.1 Le projet de M. B, l'OM de la numération

Rappelons que M. B dit ne pas utiliser de manuels, même s'il a utilisé auparavant *J'apprends les maths* et *Cap Maths*. Il construit ses propres fiches de travail pour les élèves. Il indique s'être appuyé sur *ERMEL* pour la construction de certaines de ces fiches. Les entretiens avec l'enseignant nous montrent que l'OM locale est pilotée par la rencontre avec les différents types de tâches extraits des programmes 2002 (c'est cette liste de types de tâches qui constitue sa programmation du travail sur la numération pour l'année). Seul le principe de position de la numération est en jeu dans sa séquence et il est amené par les décompositions/recompositions.

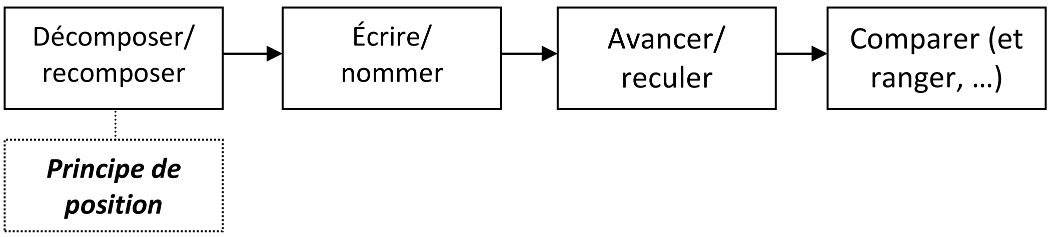


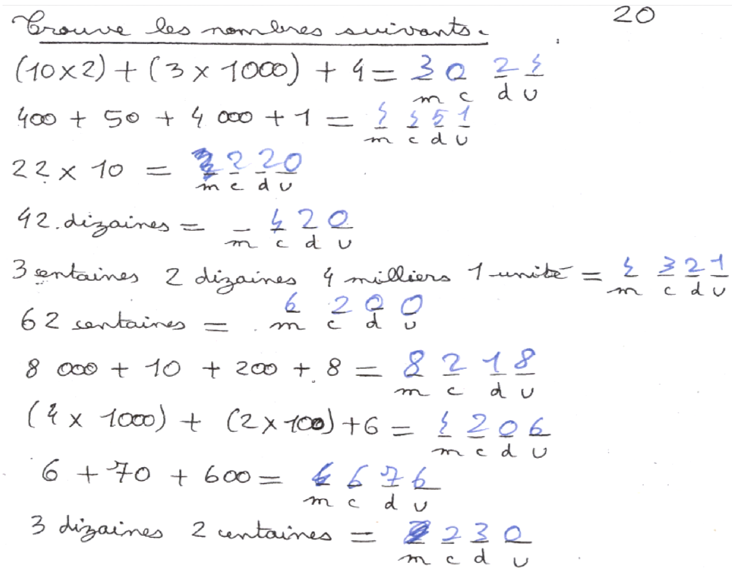
Figure 59 : OM de la numération du projet global de M. B

M.B ne propose pas de types de tâches relevant de l'OM_{card}, même si les ouvrages qu'il a utilisés auparavant proposent des dénombrements de collections par exemple. Ce sont les traductions d'écritures qui permettent d'amener le principe de position. On observe une centration, lors des trois premières séances, sur les deux types de tâches décomposer/ recomposer (pas toujours de manière canonique) et avancer/reculer (T_{AR}). Écrire et nommer ($T_{Tec/n}$ et $T_{Tn/ec}$) est principalement utilisé pour communiquer à l'oral. Le principe décimal de la numération n'est pas un enjeu pour l'enseignant comme nous le verrons dans l'analyse de la séance 1. Il favorise des techniques pour lesquelles le recours à cet élément technologique n'est pas nécessaire : comptage en unités simples et utilisation « mécanique » du compteur (c'est-à-dire que les changements d'unités ne sont pas justifiés par les savoirs de la numération). Lors des séances suivantes, le travail est davantage centré sur l'aspect

algorithmique de la suite des nombres, en s'appuyant sur un compteur, ainsi que l'aspect ordinal. Les types de tâches travaillés sont alors : avancer/reculer et encadrer/ranger.
La formulation des techniques a une place importante dans les phases collectives, mais les techniques restent faibles (non justifiées).
Concernant les ostensifs, les unités de la numération sont utilisées pour les décompositions et recompositions dans des nombres en unités comme par exemple « 12c 11d 2u ». Lors d'un entretien M. B explique que c'est un de ses collègues, maître formateur, qui utilise ce type d'écritures dans sa classe et avec les professeurs des écoles stagiaires. Il précise également l'influence du guide *ERMEL* dans ce choix (qui est également utilisé par le maître formateur cité). Les EAC et EPDC sont aussi utilisés pour les décompositions et recompositions, notamment lors de l'évaluation (ce qui témoigne de l'influence des contraintes institutionnelles).
Les unités de numération servent aussi à désigner le nom des rangs dans le nombre en chiffres. La relation entre les unités et le rang dans l'EC (le principe de position) est donnée par l'écriture de m, c, d, u au-dessous du nombre, ce qui revient à utiliser un tableau de numération. Dans la séance 1 quand les élèves commencent à écrire 12c 8d 1u en chiffres, l'enseignant signale : « en fait dans les nombres qu'on est en train de chercher là, on a mille, centaine, dizaine, unité ». C'est tout ce qui sera dit dans la classe sur le principe de position dans les séances observées. Nous n'avons rien relevé concernant le rôle du zéro : il ne fait pas l'objet d'une institutionnalisation et les exercices proposés mettent en jeu des zéros terminaux, comme dans la règle des zéros. Par exemple, dans l'exercice de recomposition de l'évaluation finale (voir plus loin) on trouve des cas comme 12d ou 62c et le seul cas de zéros intermédiaires est donné avec les EPDC : (4×1000) + (2×100) + 6. Dans cette évaluation on notera que l'ordre dans lequel les unités sont données est varié.
Le compteur est beaucoup utilisé dans la séquence. Son utilisation est associée au type de tâches avancer/reculer. Il permet de traiter les passages de milliers mais laisse invisibles les relations entre unités (le principe décimal), comme on peut le relever dans l'un des entretiens (après la deuxième séance) :

> E : « Peut-être prendre les compteurs. Et puis avancer. Par exemple on se fabrique 999. Trouver le nombre qui vient juste après. Donc ils se rendent compte qu'après le 9 il y a un 0 et il faut changer là (montre le rang des milliers). Même chose on se fabrique 1198, on avance de 1, on avance encore de 1, et tiens ! Qu'est-ce qui se passe ? ».

Voici les types de tâches proposés dans les deux évaluations de la séquence : nommer un nombre écrit en chiffres ($T_{Tec/n}$), écrire en chiffres un nombre dicté à l'oral ($T_{Tn/ec}$), comparer deux nombres (T_C), décomposer/recomposer ($T_{Tepdc/ec}$, $T_{Tec/epdc}$, $T_{Teun/ec}$ et $T_{Tec/eun}$). Voici le dernier exercice proposé (page suivante) :



Trouve les nombres suivants. 20

(10 x 2) + (3 x 1000) + 4 = 3 0 2 4

400 + 50 + 4 000 + 1 = 4 4 5 1

22 x 10 = ~~3~~ 2 2 0

42 dizaines = _ 4 2 0

3 centaines 2 dizaines 4 milliers 1 unité = 4 3 2 1

62 centaines = 6 2 0 0

8 000 + 10 + 200 + 8 = 8 2 1 8

(4 x 1000) + (2 x 100) + 6 = 4 2 0 6

6 + 70 + 600 = ~~6~~ 6 7 6

3 dizaines 2 centaines = ~~2~~ 2 3 0

m c d u

Figure 60 : Exercice de l'évaluation finale de M. B

On note que pour l'enseignant il s'agit d'évaluer la compétence « désigner un nombre par des écritures différentes » (c'est ce qu'il écrit sur sa fiche). Il utilise ainsi différents ostensifs : EAC, EPDC et EUN.

Les entretiens avec M. B permettent de comprendre que sa progression s'appuie sur une liste de types de tâches se référant aux programmes de 2002, qu'il nous montre. Quand nous l'interrogeons à ce sujet il explique alors les différents types de tâches qu'il va proposer.

> Ch : ta progression grosso modo, c'est tu vas faire ça (le travail sur compteur) et après ?
>
> E : Après manipulation. Se déplacer de 1 en 1. Voir qu'il y a des passages. Des changements de dizaines, des changements de centaines, des changements des mille. Et après on fait de 2 en 2. Reculer aussi de 1 en 1. Reculer de 2 en 2, de 10 en 10, de 100 en 100, de 1000 en 1000.
>
> Ch : oui. Après tu abordes la comparaison ?
>
> E : la comparaison ? ++ (réfléchit) Aussi ce qu'on peut faire c'est aussi faire des encadrements. On a un nombre, on essaie de trouver le nombre avant le nombre après. Par exemple 699, le nombre avant, le nombre après, on peut le faire avec les mille, faire des rangements de nombres. Dans les encadrements on peut aussi chercher la dizaine avant, la dizaine après. Donc là le compteur est intéressant au niveau utilisation. Chercher aussi la centaine avant et la centaine après. Faire des encadrements comme ça.
>
> Ch : d'accord.
>
> E : Et puis des rangements avec les signes plus petit ou égal quand tu compares des nombres. Et toujours un nombre peut être représenté sous différentes écritures. Donc là y'a de quoi travailler toute l'année avec ça.

Le niveau du projet didactique global de M. B semble donc piloté par un ensemble de types de tâches à parcourir. Le compteur (et donc l'aspect algorithmique de la suite des nombres) semble avoir une place importante dans ses choix de progression. Les changements de dizaines, centaines, … qui mettent en jeu des relations entre unités semblent vus uniquement selon ce point de vue « compteur ».

M. B évoque aussi le programme en disant qu'avec les nouveaux programmes, il faut aller jusqu'au million, ce qui lui semble être trop précoce car d'habitude il se limitait aux nombres à quatre chiffres (sans s'empêcher d'aller au-delà). Cela semble donc être une contrainte qui a une influence sur son travail. Mais quand je lui demande s'il y a eu des changements dans sa progression, il évoque seulement une place plus importante donnée à la manipulation depuis quelques années (ce qui n'est pas lié au changement de programme) tout en indiquant que sa « trame » (sa programmation liée aux compétences de 2002) reste inchangée.

> Ch : concernant ta progression as-tu effectué des changements, y a-t-il pour toi des passages importants ?
>
> E : non dans ma progression même s'il y a des nombres plus grands je n'ai rien changé, ça fait des années que je pratique comme ça euh ++ Je pense manipuler un peu plus maintenant, depuis deux trois ans, que je ne le faisais au départ tu vois. Donc par les jetons de cent, de dix, de un et de mille. Je manipule beaucoup les nombres et d'ailleurs pour les découvertes des techniques opératoires je fonctionne beaucoup avec ça. Je pense à la soustraction notamment. Donc beaucoup de manipulation. Je pense que ça les aide beaucoup. Quand on dit vingt-cinq dizaines, ils se fabriquent avec les jetons de 10 le nombre et après ils trouvent que ça fait deux cent cinquante. Donc à force de le répéter vingt-cinq dizaines ils ont fini par faire l'acquisition que ça fait deux cent cinquante.

L'exemple proposé par M. B est intéressant puisqu'il pourrait mettre en jeu le principe décimal : cependant la technique qui semble sous-jacente est une technique de comptage en unités simples de dix en dix, à partir de laquelle il semble institutionnaliser une technique d'écriture de zéros à droite, comme pour la multiplication par 10, ou bien d'utilisation de l'oral.
Il ressort donc deux éléments principaux qui semblent guider les choix de M. B : la liste des types de tâches à travailler inspirée des programmes récents. A partir de cette liste il souhaite que tous les élèves réussissent les activités proposées. Il leur propose donc divers outils qui le permettent : le compteur et le matériel à manipuler (jetons …). Mais comme le principe décimal n'est pas un enjeu de son projet, ces outils ne sont pas utilisés dans le but de faire un travail de conversions entre unités (échange de 10 jetons de 10 contre 1 jeton de 100 par exemple).

III.2 Compléments sur l'analyse d'une situation pouvant mettre en jeu des conversions

Pour étudier l'utilisation des conversions dans la mise en œuvre d'une séance en classe, nous avons choisi de nous intéresser à la première séance de la séquence, susceptible de les mettre en jeu. Les élèves vont devoir recomposer des nombres donnés en numération en unités, avec les lettres c, d, u qui symbolisent les centaines, dizaines et unités ($T_{Teun/ec}$). Voici la liste des nombres à recomposer :

8c 4d 3u
32d
13c
12c 8d 1u
14c 2u
12c 11d 2u

Le maître choisit de donner les nombres un à un : pour chaque nombre il laisse chercher individuellement les élèves, puis organise un moment collectif de correction. Les élèves ont à leur disposition des étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, qu'ils peuvent déplacer sur leur table. Ils en ont une quantité suffisante pour traiter tous les cas (ils ont par exemple 32 étiquettes $\boxed{10}$).

L’analyse *a priori* de la situation (Tempier 2009) a montré que le milieu matériel permettait de faire émerger la relation entre les centaines et milliers, en notant toutefois l’absence d’étiquettes 1000, à travers des conversions avec étiquettes (il est aussi possible d’utiliser le comptage en unités simples, le calcul multiplicatif). Ce type de conversion aurait pu apparaître dès le deuxième cas pour le nombre à trois chiffres 32d (rappel). La question de l’extension de cette technique avec 13c se serait alors posée dès le troisième cas. Ce n’est pas le choix de M. B qui décide plutôt de mettre en avant une technique de comptage en unités simples pour ce cas de 32d. Cette technique parait très coûteuse par rapport à celle qui est décrite par l’élève qui vient au tableau (« là j’ai marqué trente-deux et j’ai rajouté un zéro, et y’a pas d’unité »). Dans la suite de la séance :

- les élèves utilisent une simple juxtaposition de nombres avec écriture de 0 en cas d’absence d’unité qui fonctionne pour les deux nombres suivants (12c 8d 1u et 14c 2u) ;
- le maître, pour éviter qu’ils ne se trompent, met en avant la technique de comptage en unités simples : il leur impose d’utiliser les étiquettes pendant leur recherche et il fait dessiner les étiquettes au tableau et faire un comptage en unités simples à partir de ces étiquettes dans les phases collectives. Cette technique apparaît finalement plutôt comme un moyen de contrôle.

Le milieu que constitue l’enseignant à travers le traitement des différents cas, avant le dernier cas, ne va pas permettre de mettre en évidence les relations entre unités. En effet, ce sont deux techniques différentes, qui utilisent des savoirs différents : le comptage en unités simples s’appuie sur la suite orale et le lien oral/écrit alors que la juxtaposition s’appuie sur le principe de position et devrait aussi prendre en compte le principe décimal. Le comptage en unités simples est bien un moyen de contrôle pour la technique de juxtaposition mais n’en permet pas la justification mathématique générale. Ainsi pour le dernier cas (12c 11d 2u) aucun élève ne trouve la bonne réponse :

- le comptage en unités simples est difficile car il y a beaucoup d’étiquettes (et les élèves peinent encore à utiliser le comptage en unités simples pour les nombres au-delà de mille),
- et la simple juxtaposition des nombres ne fonctionne plus directement : il y a une conversion à faire de 11d en 1c1d (alors que dans les cas précédents la simple juxtaposition des nombres pouvait rendre invisible la conversion entre centaines et milliers, ici ce n’est plus le cas).

La mise en commun qui suit reprend le même déroulement que les précédentes : l’enseignant fait venir un élève au tableau pour dessiner les étiquettes et effectuer un comptage en unités simples, ce qui permet d’obtenir le nombre cherché. Il recommence avec un autre élève. Puis, il fait un travail sur l’erreur : « moi ce qui m’intéresse c’est de comprendre comment vous avez trouvé ça sur l’ardoise ». Il dessine alors à nouveau les étiquettes mais en faisant apparaitre les unités de numération et écrit, après comptage en unités simples, le nombre correspondant à chaque colonne : 1200 + 110 + 2. Il se lance alors dans des explications pour essayer de retrouver le résultat en prenant en compte la procédure erronée des élèves. Concernant le 110 il demande aux élèves ce qu’on est « obligé de faire ici » car « on dépasse 100 ». Devant les difficultés des élèves à mobiliser des connaissances relatives aux relations entre unités, le maître est obligé de prendre la responsabilité de l’explication de cette relation tout d’abord par un recours au comptage en unités simples « dix, vingt, … cent » qui lui permet d’obtenir l’équivalence entre 10 étiquettes 10 et 1 étiquette 100 pour justifier le passage dans la colonne des centaines puis il reformule « dix paquets de dix » en « dix fois dix », ce qui pourrait faire référence à la règle

des zéros (10×10 = 100 car on ajoute un zéro) ou à l'addition itérée de dix. Il termine en disant qu'on peut les « transférer dans les centaines, ça fait une centaine de plus ». Il met ainsi en évidence la relation entre les 10 dizaines et la centaine qui était bien le nœud des erreurs faites par les élèves dans leur juxtaposition.
Cependant, la mise en commun est très guidée par l'enseignant, il n'y a pas de reprise de ce travail à la charge des élèves (dans des exercices) ni d'institutionnalisation de la technique de conversion mise en avant ou des relations entre unités. La mise en œuvre de la situation n'a pas permis de laisser une responsabilité aux élèves dans l'élaboration de connaissances liées au principe décimal. On peut alors se demander l'avenir que peuvent avoir les explications qui ont été entrevues en fin de séance pour l'apprentissage des élèves.
Nous pouvons interpréter la gestion de ce dernier épisode en lien avec les contraintes institutionnelles : si le principe décimal n'est pas un enjeu pour sa séquence, M. B ne cherche pas à amener les élèves à utiliser des techniques qui pourraient permettre de mettre en jeu ce savoir. Mais de manière plus générale il nous semble que la préoccupation de M. B est dans la réussite des élèves aux tâches proposées et non la méthode utilisée : peu importe de passer par les compteurs ou le comptage en unités simples. Les conversions ne sont pas une méthode proposée par l'enseignant sans doute du fait de son invisibilité institutionnelle.
Pour illustrer cela, voici ce que dit M. B dans l'entretien qui suit :

> E : […] Bon c'est le dernier qui a posé problème effectivement. Le problème d'une dizaine. Alors qu'en comptant de un en un, de dix en dix tu vois ils sont arrivés à trouver le nombre, donc euh + Alors c'est pas facile il y a encore du travail à faire. [….] Donc après ce que je pense c'est qu'il faudra utiliser les compteurs. [….] Bon parce que là ils ont écrit douze, onze, deux, ils ont cru que c'était comme ça mais bon là y'avait un problème, y'avait une centaine de plus parce qu'on dépassait cent. […] Et le passage aux centaines du genre mille-deux-cent-quatre-vingt-dix, là ils ont du mal. C'est là où les compteurs peuvent aider. […] Quitter un peu ce travail là aussi. Ne pas toujours faire la même chose. [….] J'aurais peut-être dû m'arrêter là (montre l'avant dernier cas), les lâcher mais bon. [….] Je voulais les titiller un peu. C'est ce que j'ai dit, alors bon. Mais n'empêche qu'en passant au tableau ils y sont arrivés. Les deux y sont arrivés alors qu'ils étaient trois ou quatre à avoir écrit douze-mille-cent-douze.

Les difficultés rencontrées par les élèves sont bien une préoccupation centrale. Il interprète ces difficultés comme liées au « passage » d'une centaine à une autre qui provoque un changement de millier (il nous semble que c'est une vision très liée au fonctionnement du compteur). Le cas nécessitant une conversion de dizaines en centaines ne semble pas un enjeu important pour M. B puisqu'il s'agit finalement de « titiller » les élèves.

IV. L'OM enseignée dans la classe de Mme C

IV.1 Le projet de Mme C et l'OM de la numération

Contrairement aux deux autres enseignants Mme C utilise un fichier (*J'apprends les maths CE2*) dans lequel les élèves font les activités directement. Cependant l'enseignante prend une certaine liberté dans l'utilisation du fichier. Par exemple au cours de la première séance, devant les difficultés rencontrées par les élèves pour déterminer le nombre de groupes de 100 elle décide de ne pas travailler sur le nombre de groupes de 10. Elle propose également un travail sur ardoise avant de faire les exercices du fichier, pour préparer le travail demandé. Elle s'autorise aussi à faire des séances intermédiaires entre deux pages du fichier,

comme par exemple après la séance 1 où elle souhaite reprendre ce qui a été fait dans la première séance avant de passer à la suite.
L'OM de la numération construite dans la classe est assez proche de celle que nous avons déjà décrite dans « J'apprends les maths ». Cependant pour des nécessités de communication dans la classe pour dire les nombres, il apparaît que le type de tâches écrire/nommer y a une place plus importante. Nous avons aussi pu voir que le principe de position est un savoir qui est utilisé dans la classe notamment en lien avec le placement des chiffres dans le compteur, alors que dans le manuel il était peu visible. Tout comme dans le manuel on peut constater que les trois types de tâches principaux (dénombrer, nombre de, avancer/reculer) sont travaillés en parallèle. Les décompositions/recompositions sont également travaillées (contrairement au manuel), en lien avec l'utilisation du tableau de numération. Les recompositions sont variées, comme par exemple « 45 centaines 8 unités = … ». Finalement, on peut résumer l'OM locale par le schéma suivant :

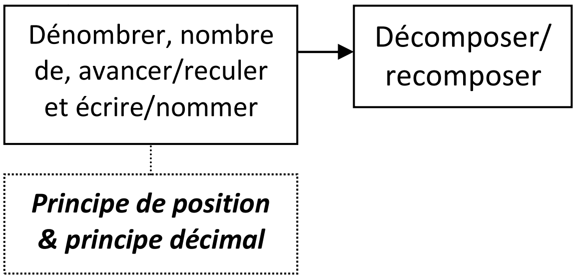


Figure 61 : OM de la numération dans la classe de Mme C

Les types de tâches proposés dans l'évaluation se démarquent nettement de l'OM proposée dans le manuel et témoignent de l'influence des programmes officiels sur le contenu de l'évaluation :
Exercice 1 : écrire en chiffres un nombre dicté oralement ($T_{Tn/ec}$)
Exercice 2 : écrire en lettres un nombre écrit en chiffres ($T_{Tec/n}$)
Exercice 3 : ranger des nombres du plus petit au plus grand
Exercice 4 : recomposer des nombres ($T_{Tepdc/ec}$ et $T_{Teun/ec}$). Voir ci-dessous.

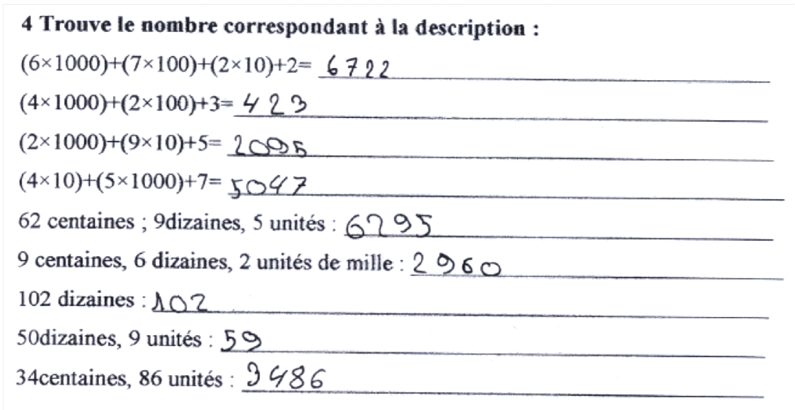

4 Trouve le nombre correspondant à la description :
(6×1000)+(7×100)+(2×10)+2= 6722
(4×1000)+(2×100)+3= 423
(2×1000)+(9×10)+5= 2095
(4×10)+(5×1000)+7= 5047
62 centaines ; 9dizaines, 5 unités : 6295
9 centaines, 6 dizaines, 2 unités de mille : 2960
102 dizaines : 102
50dizaines, 9 unités : 59
34centaines, 86 unités : 3486

Figure 62 : extrait de l'évaluation finale de la séquence réalisée par une élève de la classe de Mme C

Les cas proposés mettent en jeu différents cas : ordre des unités variés, absence d'unités isolées et plus de 9 unités à certains ordres. Pourtant les décompositions proposées avec les EPDC ne mettent jamais en jeu plus de 9 unités par ordre. C'est comme si l'enseignante était

passée aux unités de numération ensuite pour s'autoriser à changer les valeurs de cette variable didactique[64].
De plus, quand il y a plus de 9 unités à certains ordres, il n'y a pas d'unité isolée de l'ordre immédiatement supérieur, ce qui peut permettre aux élèves de réussir la tâche par simple juxtaposition des nombres, comme par exemple 34 centaines + 86 unités = 3486. Il est donc possible de réussir sans faire de conversion.

IV.2 Complément sur les deux premières séances observées.

Nous allons détailler l'analyse de ces deux séances car le principe décimal y est un enjeu. Pour la première séance, Mme C s'appuie sur la séquence 74 proposée dans le fichier (cf. chapitre 3, étude du manuel *J'apprends les maths CE2*).

Séance 1

On peut découper la séance en deux grandes phases.
<u>Phase 1 (de 0' à 32') : rappel sur les nombres à 3 chiffres</u>
Mme C décide de faire un travail préliminaire (sur ardoise) de rappel sur les nombres à 3 chiffres. Elle propose ensuite le premier exercice du fichier pour le nombre 999. Cela lui permet de faire travailler les 4 types de tâches pour ces nombres et d'institutionnaliser les deux principes de la numération :

- les relations entre unités apparaissent de manière contextualisée à travers les groupements de 10 billes en 1 boite et de 10 boites en 1 valise, ce qui est reformulé avec les unités de numération par l'enseignante : « les dix unités on les transforme en une dizaine », « dans une centaine il y a dix paquets de dix », « dans une centaine il y a dix dizaines ».
- le principe de position apparait avec le tableau de numération que l'enseignante a représenté au tableau en écrivant m c d u au-dessus des cases (la relation entre la position des chiffres et les unités n'est pas formulée explicitement). Elle demande également à une élève d'entourer en rouge le chiffre des centaines.

Rappelons que dans ce manuel le principe de position reste implicite. L'enseignante a donc pris l'initiative de faire émerger ce savoir à travers cette écriture des unités au-dessus des cases du compteur. Au cours de l'entretien qui suit la deuxième séance elle explique :

> « Je suis revenue au tableau classique où on visualise plus facilement le chiffre des dizaines des centaines enfin des unités. C'est vrai que c'est des trucs, mais je trouve que pour eux c'est plus facile de l'appréhender comme ça. Même si je trouve très intéressant le passage par le dessin, l'idée des paquets, mais je vois que pour certains + Dès qu'on aborde quelque chose de nouveau comme ça y'en a toujours un ou deux … »

Elle s'excuse presque d'utiliser ce tableau qui est considéré comme un « truc », une astuce, mais elle légitime son utilisation par le fait que ça peut aider les élèves en difficulté.

<u>Phase 2 (de 32' à 1h16') : exposition des nouveaux savoirs par l'enseignante et exercices d'application du fichier.</u>

[64] Nous avions pu relever le même phénomène dans les évaluations de Mme A et de M. B où les recompositions en EAC et EPDC ne faisaient jamais non plus intervenir plus de 10 unités à certains ordres (sauf 22x10 dans l'évaluation de M. B), alors qu'avec les unités de numération les deux cas étaient proposés.

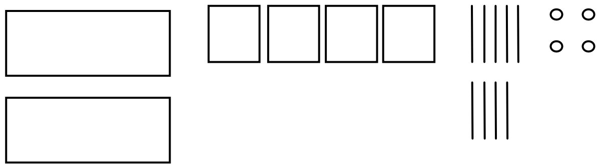
Conformément à ce que nous avions vu dans l'analyse de l'exercice 1 de la séquence 74 (cf. OM à enseigner) l'enseignante est amenée à présenter le lien entre centaines et milliers par ostension (« attention regardez ce qui se passe. On regarde, on regarde. »). Elle montre alors ce qui se passe quand on ajoute une unité aux 9 unités de 999 (avec un dessin du matériel du fichier au tableau) : 10 unités se groupent en 1 dizaine (elle barre 10 unités et dessine une nouvelle dizaine). Elle fait de même pour les dizaines puis les centaines, ce qui lui permet d'introduire la « malle ». Elle montre ce qui se passe avec le compteur dans ce passage de 999 à 1000 puis demande aux élèves combien ils ont de paquets de 100 et de groupes de 10 dans ce nombre (1000). Il suffit alors de compter. Ensuite l'enseignante propose de coller les autocollants de valises puis de « malle » et explique qu'il faut bien comprendre qu'il y a dix groupes de cent dans une malle. Mais beaucoup d'élèves n'écoutent pas car ils collent leurs étiquettes. L'enseignante choisit de ne travailler que les groupes de 100 (et pas 10 comme cela est proposé dans le manuel) car cela pose déjà des difficultés aux élèves.
Comme nous l'avions vu dans l'analyse *a priori,* pour la suite des exercices les élèves peuvent:

- pour le dénombrement, ajouter 1 au chiffre des unités, sans utiliser la technique de juxtaposition,
- pour le nombre de groupes de 100, utiliser le fait que le nombre de 100 est toujours le même que pour le nombre précédent, ce que l'enseignante met d'ailleurs en évidence.

Ils n'ont alors ni la responsabilité de l'utilisation de connaissances liées au principe de position et au principe décimal puisque ces techniques ne mobilisent pas ces savoirs.
Pour l'exercice 3 il est seulement demandé de compléter la suite des nombres mais le nombre de centaines et de dizaines n'est pas demandé par l'enseignante. Il y a des erreurs, mais l'enseignante les traite individuellement en passant voir les élèves. Elle travaille également la lecture des nombres à 4 chiffres pour les élèves qui ont des difficultés.
Du coup la technique de troncature proposée dans le "j'ai appris" en bas de page du fichier n'est pas institutionnalisée par l'enseignante (le nombre de centaines n'a été travaillé jusque là que pour les nombres 1000, 1001, 1010 et 1011, il est donc toujours le même). Il est toutefois possible qu'elle l'ait mis en évidence individuellement en passant voir les élèves.
Finalement, c'est l'enseignante, dans les phases collectives, qui a toujours la responsabilité de la mise en œuvre des savoirs de la numération. *A minima* les élèves ont utilisé des procédés ne mettant pas en jeu ces savoirs (avancer de 1 au rang des unités ou encore réécrire le nombre de centaines du nombre précédent). *A maxima* ils ont travaillé les conversions et en on déduit la lecture directe par troncature proposée dans le manuel.

Séance 2

Le déroulement de la séance 2 est décrit en annexe. Nous avons choisi d'analyser un épisode de travail sur le nombre de groupes de 10 et de 100 d'une collection représentée au tableau :



Les élèves doivent tout d'abord écrire le nombre correspondant sur leur compteur (donc en chiffres) puis en lettres. La correction de cette première question permet de trouver l'écriture 2494 (et deux-mille-quatre-cent-quatre-vingt-quatorze).
L'épisode qui nous intéresse commence alors ici. L'enseignante écrit au tableau :

m	c	d	u	
2	4	9	4	C'est … groupes de 10 et … unités

m	c	d	u	
2	4	9	4	C'est … groupes de 100 et … unités

Les élèves doivent compléter les trous. Elle laisse chercher 4 minutes puis propose une correction collective de 12 minutes.
L'analyse *a priori* de cette situation et le déroulement de cet épisode sont proposés en annexe. Nous proposons ici l'analyse *a posteriori* de l'épisode.
L'analyse *a priori* montre que le fait de demander en premier la détermination du nombre de groupes de 10 rend l'utilisation des techniques relevant de conversions (en appui sur le dessin du matériel ou sur les unités de numération) plus coûteuses que la technique de troncature. De plus l'enseignante laisse peu de temps de recherche (4 minutes) et par effet de contrat (en demandant une méthode qui permet de trouver « facilement ») indique ses attentes. C'est alors la technique de troncature qui est attendue et, qui plus est, est la plus adaptée ici. Mais l'analyse de la séance 1 avait montré qu'elle n'avait pas encore émergé. Pourtant une élève (Léa) a bien utilisé cette méthode. D'autres élèves observés ont fait des erreurs en utilisant cette technique : 249 groupes de 100 et 4 unités ou 24 groupes de 10 et 94 unités. Tel qu'il est organisé, le milieu est peu rétroactif. Il faudrait en effet ici des connaissances liées à la recomposition (avec conversions) ou à la multiplication par 10 ou 100, mais elles n'ont pas été travaillées auparavant. De plus ici la juxtaposition des deux nombres obtenus permet de retrouver le nombre de départ (ce qui n'est pas le cas si par exemple l'élève avait écrit 4 groupes de 100 et 94 unités qui était aussi une erreur possible).
Dans la correction collective, l'enseignante ferme tout de suite la discussion sur les diverses techniques possibles (et les erreurs) en orientant vers la technique de troncature qu'elle montre tout de suite, ce qui permet d'annoncer à nouveau la technique attendue (contrat). Du coup, nous ne savons pas quelles sont les procédures utilisées par les élèves, excepté celle de Léa qui est reprise et montrée par l'enseignante ce qui permet une institutionnalisation de cette méthode.
La suite de la mise en commun a pour but la vérification et la justification de cette méthode avec le matériel de numération. C'est alors par l'évocation des groupements matériels que se fait la vérification, sous la responsabilité de l'enseignante. Mme C reprend ce qui est proposé dans le « *j'ai appris* » : les unités que l'on voit et celles qui sont cachées (dans les unités d'ordre supérieur). Mais les relations entre unités ne sont pas des connaissances suffisamment disponibles chez les élèves pour être utilisées comme critère de validité (la technique de multiplication par les puissances de 10 non plus). Au cours du jeu de questions/réponses qui s'instaure entre l'enseignante et les élèves, on peut noter que les élèves font de nombreuses erreurs dans les réponses aux questions liées aux conversions. Nous reprenons ici toutes les questions de conversion posées par l'enseignante ainsi que les réponses données par les élèves (les réponses exactes sont entourées, les réponses erronées ou l'absence de réponse est soulignée).

1. Lors de la vérification du nombre de groupes de 10 dans 2494, Mme C demande (14'05): « vous vous souvenez qu'il y a des dizaines qui sont cachées, qui sont

rangées déjà. Ici combien est-ce que j'ai de dizaines ? » (montre les 4 valises dessinées au tableau). L'élève interrogé répond « quatre ». Mme C lui demande alors combien de billes dans une boite puis dans une valise. L'élève répond dix puis cent. Mme C demande alors le nombre de dizaines dans cent. L'élève ne répond pas.

2. Mme C demande (16'15) : « c'est là que ça se complique, dans un paquet de mille, j'ai combien de groupes de dix ? » (elle dessine en même temps au tableau une malle avec 10 valises à l'intérieur). Un élève répond « dix ». L'enseignante reprend : « j'ai dix groupes de dix ? ». Les autres élèves ne savent pas (ne disent ni oui ni non). Mme C demande alors le nombre de centaines dans un paquet de mille. Une seule élève tente une réponse : « des centaines y'en a cent + enfin euh y'en a cent euh » L'enseignante reformule alors : « combien est-ce qu'on met de valises pour faire un paquet de mille ? ». L'élève répond alors qu'il en faut dix.

3. Lors de la vérification du nombre de groupes de 10, Mme C demande (19'45) : « est-ce que dans les mille je peux ranger en faisant des paquets de cent ? ». Les élèves répondent oui donc Mme C poursuit : « j'ai combien de paquets de cent dans deux-mille ? ». Un élève répond « cent ». L'enseignante répète : « combien il me faut de groupes de cent pour pouvoir faire mille ? ». Devant l'absence de réponse des élèves elle propose de compter. Pendant que les élèves comptent de cent en cent l'enseignante lève un doigt à chaque fois : elle termine avec 10 doigts levés et répète la question. Les élèves disent alors « dix ».

Ces extraits permettent de mettre en évidence les difficultés rencontrées par les élèves[65] dans les conversions entre milliers, centaines et dizaines[66] et peut-être également dans la traduction entre unités de numération et mots désignant les unités avec le matériel (par exemple entre « centaine » et « valise »). Dans ces conditions la technique proposée par l'enseignante ne peut jouer le rôle de critère de validité (qui est censé s'appuyer sur des connaissances anciennes). Elle est ainsi amenée à prendre entièrement en charge cette technique, en laissant principalement aux élèves la responsabilité des comptages en unités simples (par dix ou cent).

Pour les cas suivants (à partir de la 24ème minute), l'écriture de la troncature dans le compteur par l'enseignante en face des nombres à trouver[67] montre clairement ses attentes (contrat) en termes de techniques et réduit la responsabilité des élèves qui n'ont plus qu'à réécrire les chiffres dans chaque case et en extraire le nombre qui est entouré. Finalement tout le travail qui a été fait publiquement par l'enseignante sur les conversions n'est plus en jeu.

Ces difficultés rencontrées dans la mise en œuvre de la séance pourraient être à l'origine de ce que dit Mme C lors de l'entretien qui suit cette deuxième séance. Pour elle l'enseignement de cette notion est vécu comme « lourd », « trop fouillé » et finalement c'est

[65] En particulier ceux qui sont interrogés, mais l'absence de réponses collectives à certains moments laisse penser que le phénomène est plus général dans la classe.

[66] Dans la dialectique ancien/nouveau, ce sont les relations entre centaines/milliers (et dizaines/milliers) qui sont censées relever du nouveau puisque le travail sur les nombres à trois chiffres était l'objet de l'année précédente (CE1) ainsi que des révisions de la première partie de l'année de CE2, même si ce n'est pas vraiment le cas.

[67] Voici ce que l'enseignante écrit au tableau :

- pour le nombre de groupes de 10 :

m	c	d	u

C'est … groupes de 10 et … unités

- pour le nombre de groupes de 100 :

m	c	d	u

C'est … groupes de 100 et … unités

l'intérêt de ce travail qui est questionné, même si elle en perçoit la cohérence dans la progression du manuel :

> « Est-ce que c'est vraiment utile pour savoir lire un nombre, pour savoir l'écrire ? C'est plus dans la compréhension des nombres. Moi j'étais de la période où on essayait d'analyser, de comprendre comment se construit le nombre. Donc automatiquement c'est logique pour moi. Maintenant la question est est-ce que c'est vraiment bénéfique pour les enfants ? […] Moi je pense que j'aurais tendance à l'alléger cette partie là justement. Moins insister sur + plus insister sur le nombre en lui-même, les paquets de dix, les paquets de cent. »

Elle trouve que dans ce manuel le travail sur la numération est trop approfondi : « moi je m'y retrouve bien dedans mais en l'occurrence là c'est un peu trop fouillé […] Cet aspect là est lourd ».
Les activités proposées dans ce manuel lui semblent donc difficilement tenables compte-tenu des difficultés qu'elles peuvent poser aux élèves, de la lourdeur du dispositif et finalement de l'intérêt que cela peut avoir savoir, selon elle, pour écrire ou nommer un nombre.

Conclusion de cette étude des pratiques de trois enseignants de CE2 sur la numération

Les projets des enseignants (reconstruits à partir de nos observations)
Cette étude nous a permis de mettre en évidence, pour les enseignants observés, une grande proximité des évaluations finales proposées par les différents enseignants et de supposer l'influence importante des programmes sur leur projet d'enseignement. En effet, ces évaluations reprennent les objectifs des programmes avec les types de tâches écrire/nommer ($T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$), décomposer/recomposer ($T_{Tepdc/ec,}$ $T_{Tec/epdc,}$ $T_{Teun/ec}$, $T_{Tec/eun}$), avancer/reculer (T_{AR}) sauf pour Mme C, et comparer/ranger (T_C).
Cette influence des programmes pourrait se manifester également pour une enseignante dans les choix effectués des activités proposées par son manuel. Il nous semble possible d'interpréter les choix de Mme A dans la construction de son projet en lien avec ce programme, ce qui l'amène à ne choisir qu'une des deux situations proposées par *ERMEL*, « Le bowling » alors que « Jeu des palets » très proche peut mettre en jeu des conversions entre unités.
M. B construit sa trame de progression principalement à partir des textes des programmes. Pourtant pour la tâche de *décomposition/recomposition*, sous l'influence d'un maître formateur semble-t-il, il propose de nombreuses recompositions en EUN avec plus de dix unités à certains rangs. Ce phénomène n'est pas spécifique au projet de M. B puisque l'on trouve de telles recompositions dans les évaluations proposées par les trois enseignants. Nous avons d'ailleurs remarqué qu'ils utilisent alors les EUN plutôt que les EPD.
Mme C, elle, en s'appuyant sur son manuel (« *J'apprends les maths* ») a construit une OM donnant une place centrale au principe décimal, conformément à ce que proposent les auteurs. Il est alors d'autant plus remarquable que l'évaluation ne prend pas en compte tout ce travail puisque les types de tâches *dénombrer* et « *nombre de »* ne sont pas évaluées, alors qu'elles ont une place centrale dans les séances observées. On peut y voir là encore une influence des contraintes institutionnelles (programmes), qui, dans ce cas, ne sont pas en accord avec le contenu du manuel.

Pour revenir sur les recompositions proposées par les enseignants ($T_{Teun/ec}$, …) nous pouvons ajouter qu'ils proposent des ostensifs différents pour ces recompositions (EAC, EPDC et unités de numération) et qu'ils utilisent les deux variables « ordre des unités » et « absence d'unité à certains ordres », ce qui est susceptible de permettre une technique de juxtaposition en prenant bien en compte la position de chaque unité dans l'EC. Par contre pour la mise en jeu du principe décimal, le fait de donner plus de dix unités à certains ordres doit être relativisé par le fait que souvent ces cas peuvent se traiter par une simple juxtaposition de nombres, quand cela se fait sur l'unité de plus haut rang comme par exemple dans l'évaluation de Mme C : 34 centaines 86 unités = 3486. Il n'y a que dans l'évaluation de Mme A que nous avons vu des cas nécessitant un ajout avec l'unité d'ordre supérieur, comme 12 centaines 3 milliers.

Les mises en œuvre dans les classes
Aucune séance observée dans la classe de Mme A ne met en jeu les relations entre unités.
Dans une séance observée dans la classe de M. B, nous avons montré l'existence d'un milieu qui, *a priori*, permet de faire apparaître le lien entre les centaines et milliers. Pourtant ces relations restent invisibles car les élèves utilisent des juxtapositions de chiffres qui fonctionnent pour le rang du millier et le maître met en avant la technique de comptage en unités simples qui ne permet pas de contrôler ces manipulations faites sur les chiffres. Ce sont deux techniques différentes, qui utilisent des savoirs différents. Du coup les « manipulations » effectuées par les élèves sur l'EC ne sont pas justifiées par des propriétés mathématiques, ce qui explique notamment que pour le dernier essai la plupart des enfants effectuent une juxtaposition incorrecte des nombres. Finalement, le principe décimal n'est pas institutionnalisé, ce qui laisse penser que ce n'était pas un enjeu pour l'enseignant.
Nos observations dans la classe de Mme C (où le principe décimal est un enjeu important) ont montré, pour le « *nombre de »* en particulier, que cette enseignante s'attache à justifier la technique de troncature en utilisant les relations entre objets matériels censés représenter les unités de numération. Mais ce travail se fait toujours sous sa responsabilité, dans les moments de phases collectives, ce qui ne nous permet pas de savoir si les élèves font un lien entre la technique de troncature et les relations entre unités. Nous avons aussi pu constater à cette occasion les difficultés rencontrées par les élèves dans la mobilisation des relations entre unités (même celles concernant les nombres à trois chiffres).

Les savoirs et leur formulation dans les classes
Ces différentes observations mettent aussi en évidence une responsabilité importante de la part des enseignants pour amener les élèves à utiliser et s'approprier les savoirs de la numération. Il ne suffit pas qu'ils réussissent à faire dévolution d'une situation d'action mettant en jeu les savoirs de la numération ; il faut aussi qu'ils obtiennent que les élèves ne restent pas au seul niveau des techniques mais atteignent le niveau technologique. Nous avons observé cette remontée au niveau des savoirs dans le cas du principe de position, dans la classe de Mme A, qui sollicite très fréquemment les élèves sur des demandes de justification. Nous l'avons vu également dans la classe de Mme C dans le cas des relations entre unités (mais pas pour M. B). Ces observations montrent la difficulté de donner une véritable responsabilité à tous les élèves dans ce travail, dans une phase collective de mise en commun.
Pour institutionnaliser le principe de position (qui est bien un enjeu dans toutes les classes de par les types de tâches travaillés) les enseignants montrent la relation entre le millier et le 4ème rang à travers le tableau de numération ou l'écriture « m c d u » au-dessus de chacun des chiffres (ou au-dessous), comme dans les manuels étudiés.

L'utilisation des unités de numération

Sur la question des ostensifs, nous avons observé plus de variété dans les classes que ne le laissait penser l'étude des programmes et manuels. En particulier les unités de numération ont une place importante pour dire le nom des rangs dans l'EC mais également pour les décompositions/recompositions. Par contre ces unités ne sont pas utilisées pour faire un travail de conversion (leur valence instrumentale pour les conversions n'est pas sollicitée) ce qui peut être lié à l'absence de ce type de tâches dans les manuels. Seule Mme C utilise les unités de numération pour dire les relations entre unités, alors que ce n'est pas le cas dans le manuel qu'elle utilise (utilisation des mots « malles », « valises, … » ou des expressions « groupes de 1000 », …).

L'interprétation des erreurs des élèves

Lors de l'entretien avec Mme A nous avons eu l'occasion de soulever la question des erreurs des élèves dans des recompositions mettant en jeu des conversions (car plus de dix unités à certains ordres) comme par exemple « 12 centaines 3 milliers = 3120 ». Nous avons pu constater le lien entre son interprétation des erreurs et les savoirs visés dans son projet. Elle n'identifie d'ailleurs, dans les diverses recompositions proposées, que la variable « ordre de présentation des unités », qui est liée au principe de position, mais ne dit rien sur le nombre d'unités de chaque ordre. Cela peut alors expliquer pourquoi elle ramène les erreurs des élèves à des fautes d'inattention. On peut donc également lier cela aux contraintes institutionnelles de l'enseignement de la numération.

Conclusion de la partie I

L'objectif de cette partie était de se donner un regard sur l'enseignement actuel de la numération en CE2, pour les nombres à quatre chiffres.

<u>Les principales difficultés des élèves</u>

Nous avons limité notre étude des réussites et difficultés des élèves aux nombres inférieurs à cent en début de CE2. Les exercices de l'évaluation portant sur les types de tâches écrire/nommer ($T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$) et comparer des nombres écrits en chiffres (T_C) sont bien réussis par les élèves. Cela pourrait témoigner d'une bonne maîtrise des techniques mettant en jeu principalement le principe de position. Pourtant pour les traductions non canoniques d'écritures le pourcentage de réussite est nettement moins bon : seule la moitié des élèves réussit à traduire 3d + 6c en EC alors que 90% arrivent à traduire 1c + 9d + 3u en EC. Les traductions mettant en jeu les conversions entre unités ont des résultats encore bien plus faibles, avec par exemple 21% de réussite pour traduire 21d + 3c en chiffres. Les difficultés observées peuvent mises en regard des trois conditions de la technique de juxtaposition de nombres. L'observation des erreurs d'élèves révèle des extensions de techniques de juxtaposition hors de leur domaine de validité.

Un exercice ne mettant en jeu que des conversions entre unités (T_{Ceun}) montre les difficultés que cela pose aux élèves : un tiers des élèves environ réussit à convertir 60 dizaines en centaines, alors qu'environ la moitié connaît la relation directe entre 1 centaine et 10 dizaines. Il en est de même pour le type de tâches *nombre de* (T_{Cnd}). Nous pensons que la maîtrise insuffisante des conversions ne permet pas aux élèves de comprendre la technique de troncature afin de l'adapter à différentes unités. Cela les amène alors à faire des découpages de l'écriture chiffrée non appropriés.

Ces résultats nous interrogent sur la possibilité, pour les élèves, d'aborder l'étude des nombres à quatre chiffres dans de bonnes conditions, lorsque les relations entre unités vont se complexifier.

Nous allons maintenant revenir sur notre étude des programmes et manuels ainsi que sur nos observations de classes à partir des deux questions principales : la possibilité de mise en jeu des conversions dans les types de tâches travaillés et la formulation des savoirs de la numération.

<u>Quelles sont les types de tâches travaillés et quelles sont les possibilités de travail sur les conversions entre unités ?</u>

Dans le travail sur la numération des nombres à quatre chiffres, l'OM_{trad} est centrale à la fois dans les programmes et dans les manuels, hormis dans *J'apprends les maths*. À l'intérieur de cette OM ce sont les types de tâches écrire/nommer et les traductions canoniques d'EC en EPD ou EUN (et inversement) qui sont privilégiés, ce qui traduit la place centrale donnée aux types de tâches mettant en jeu le principe de position. Nous n'avons pas regardé en détail l'OM_{ord}, mais il semble que ce travail concerne principalement la comparaison de nombres (hors contexte) qui a une place centrale dans les programmes et les manuels, hormis dans *J'apprends les maths*.

Ces contraintes institutionnelles peuvent avoir des répercussions sur le projet des enseignants. Pour deux enseignants (Mme A qui utilise ERMEL et M. B qui n'utilise pas de manuel en particulier) il nous semble voir leur influence sur leur choix d'activités pour les élèves : celles-ci ne mettent en jeu que les types de tâches cités ci-dessus. Les observations de séances de ces deux enseignants permettent de constater que pour Mme A aucune séance ne met en jeu le principe décimal alors que pour M. B, une des situations proposées aurait pu le permettre, mais elle n'est pas gérée dans cette perspective, puisque pour cet enseignant le principe décimal ne semble pas être un enjeu d'apprentissage à cette époque de l'année. Pour tous les enseignants nous avons pu constater l'influence des programmes officiels (et peut-être des évaluations nationales) sur les évaluations proposées, qui reprennent sous forme de types de tâches les libellés des programmes : écrire/nommer, décomposer/recomposer, avancer/reculer (sauf pour Mme C) et comparer/ranger, même s'ils n'ont pas tous centré leur travail sur ces types de tâches au cours de la séquence (en particulier Mme C). Pour les traductions d'écritures, les enseignants utilisent le jeu sur les deux variables « ordre des unités » et « absence d'unité à certains ordres », ce qui est susceptible de permettre une technique de juxtaposition prenant en compte les deux conditions de respect du rang et de présence de chaque unité dans l'EC.

L'OM_{card} est quasiment invisible dans les programmes alors que nous avons pu observer des types de tâches de dénombrement, de *nombre de* avec des collections ou de comparaisons de collections dans des manuels comme *ERMEL* et *J'apprends les maths* où un choix affirmé par les auteurs est de faire prendre conscience aux élèves « non seulement des chiffres au rang des centaines, mais du nombre de centaines » (*ERMEL*). Ces types de tâches servent souvent à introduire le travail de numération, mais aucun manuel ne propose d'activités de groupements et d'échanges de matériel (même si des matériels de numération sont évoqués dans les manuels). Dans les classes de Mme A et M. B nous n'avons pas observé de types de tâches relevant de l'OM_{card}. Un manuel (*J'apprends les maths*) construit sa progression sur le dénombrement et le de *nombre de* avec des collections représentées. Mme C, qui utilise ce manuel, a construit une séquence donnant une place centrale aux relations entre unités (matérialisées par les groupements matériels : boites, valises, malles). L'analyse d'une séance montre qu'elle s'attache à justifier la technique de troncature (pour le *nombre de*) en appui sur les relations entre ces différents groupements, mais ce travail se fait toujours sous sa responsabilité, dans les moments de phases collectives. De plus, nous avons observé les nombreuses difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'elle les questionne sur les relations entre unités, à travers le matériel représenté du manuel.

Dans les autres classes, comme dans les manuels et programmes, nous n'avons pas observé le type de tâches de conversions entre unités de numération. Des possibilités de mise en jeu de conversions entre unités se retrouvent pourtant dans les classes avec les traductions non canoniques d'écritures, que Mme A et M. B proposent à leurs élèves. Dans l'analyse des manuels, nous n'en avions observé que dans *ERMEL* (dans plusieurs situations). Dans les programmes de 2002, cela était aussi un enjeu comme en témoigne l'adjectif « diverses » associé aux décompositions/recompositions. Cependant, dans les classes de Mme A et M. B ces traductions non canoniques sont proposées pour « aller plus loin ». Par exemple, Mme A ne réalise pas de phase collective suite à cet exercice (la correction reste individuelle). Nous pensons que cela est lié au fait que, pour ces enseignants, les relations entre unités ne sont pas un enjeu de leur séquence, ce qui peut s'interpréter comme une conséquence des contraintes institutionnelles.

L'utilisation des unités de numération, qui pourrait être un des éléments essentiels pour engager un travail de conversion, est plus importante que ne le laissait penser notre étude des programmes et manuels, notamment pour les traductions d'écriture. Cependant elles ne sont pas utilisées pour faire des conversions entre unités, ce qui confirme le constat de Chambris (2008).

Dans certains manuels (*La tribu des maths* et *Cap Maths*) le travail mettant en jeu le principe décimal est cantonné au type de tâches *nombre de*. Mais cela n'amène pas à faire des conversions entre unités car le travail technologique pour la technique de troncature n'est pas un enjeu ni dans le premier ni dans le second. Nous pensons que c'est l'extension de la technique de multiplication par 10 et 100 (aux nombres à quatre chiffres) qui permet la construction de cette technique. Pourtant on trouve une formulation des relations entre unités dans *Cap Maths*, mais pas d'activités permettant de les mettre en jeu (pour les nombres à quatre chiffres). Comme dans *ERMEL*, il semble que l'utilisation des EPD amène à ne pas faire des conversions entre unités un enjeu pour l'étude des nombres à quatre chiffres, même si *ERMEL* peut être pourtant un terrain propice à un travail sur les relations entre unités du fait des situations proposées et du choix des valeurs des variables didactiques.

<u>Quelle formulation des savoirs de numération ?</u>

Bien que le principe de position soit un enjeu important du travail sur la numération dans presque tous les manuels étudiés (à travers les types de tâches qui y sont travaillés), ce savoir reste souvent implicite (sauf dans *Cap Maths*). Nous n'en avons jamais trouvé de formulation en texte (les milliers s'écrivent au quatrième rang de l'EC par exemple) : il est donné par le tableau de numération ou par des flèches associant les unités à leur position. Il est rarement utilisé pour formuler ou justifier d'autres techniques, hormis la comparaison. Dans les classes observées, le principe de position apparaît aussi à travers le tableau de numération ou l'écriture « m c d u » au-dessus de chacun des chiffres (voire au-dessous).

Les relations entre unités sont formulées dans *Cap Maths*, même si nous n'avons pas trouvé de référence à ces équivalences dans le manuel et le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire. A contrario, dans *ERMEL*, même si de nombreuses activités pourraient permettre l'institutionnalisation du principe décimal, nous n'en avons pas trouvé de formulation. Dans *La tribu des maths* ce savoir n'apparaît pas. Dans *J'apprends les maths*, les relations entre le millier et les centaines et dizaines sont exprimées sans utiliser les unités de numération mais avec le mot « groupe » (1000 c'est 10 groupes de 100). Pourtant dans la classe de Mme C, le principe décimal est exprimé avec les unités de numération qui servent aussi à désigner les rangs de l'EC. Il nous semble que cela permet de faire plus facilement le lien entre les deux principes de la numération.

Cette première étude est un point d'appui important pour la conception d'une ressource pour des enseignants, question principale de cette thèse, autour de laquelle nous allons maintenant poursuivre notre travail.

Partie II

Etude préliminaire pour la conception d'une ressource pour l'enseignement de la numération à l'école primaire

L’étude faite en partie I, que ce soit au niveau théorique (OM de référence, situation fondamentale) ou au niveau de l’état des lieux effectué, ne nous permet pas de nous lancer directement dans la conception et l’expérimentation d’une ressource avec des enseignants. En effet, nous avons besoin d’en savoir davantage sur l’usage des ressources par les enseignants du primaire, sur leur intégration possible, dans leur système de ressources, d’une ressource proposant des apports sur un thème d’étude (la numération), de prendre en compte des contraintes éventuelles sur la ressource pour une utilisation par des enseignants ordinaires, etc. Nous pouvons nous appuyer pour cela sur les résultats de recherches récentes en didactique des mathématiques sur ce sujet (chapitre 5). Nous en profiterons pour indiquer aussi quelques résultats de recherches portant sur les pratiques des enseignants du primaire, notamment concernant la question de l’institutionnalisation des savoirs qui a une place importante dans ces recherches.
Nous reviendrons alors, à la lumière de ces résultats concernant des conditions et contraintes au niveau de l’enseignement du thème de la numération (de la partie I) mais aussi à celui, plus large, de l’usage des ressources par les enseignants du primaire (du chapitre 5), sur notre problématique de conception d’une ressource et nous préciserons notre méthodologie d’ingénierie didactique pour le développement d’une ressource. Nous indiquerons le type de ressource que nous souhaitons proposer aux enseignants et nous définirons des premiers choix généraux pour cette ressource (chapitre 6).
Afin de nous assurer d’un minimum de viabilité de notre ressource dans l’enseignement ordinaire, du point de vue du canevas didactique et des situations proposées ainsi que de l’ergonomie générale, nous avons élaboré une version 0 de la ressource que nous avons testée dans une pré-expérimentation avec seulement deux enseignants (chapitre 7).
Ainsi, nous pourrons conclure cette partie en présentant ce que cette pré-expérimentation nous a appris pour la conception de la version 1 de notre ressource ainsi que les choix effectués pour la ressource qui sera l’objet de l’expérimentation.

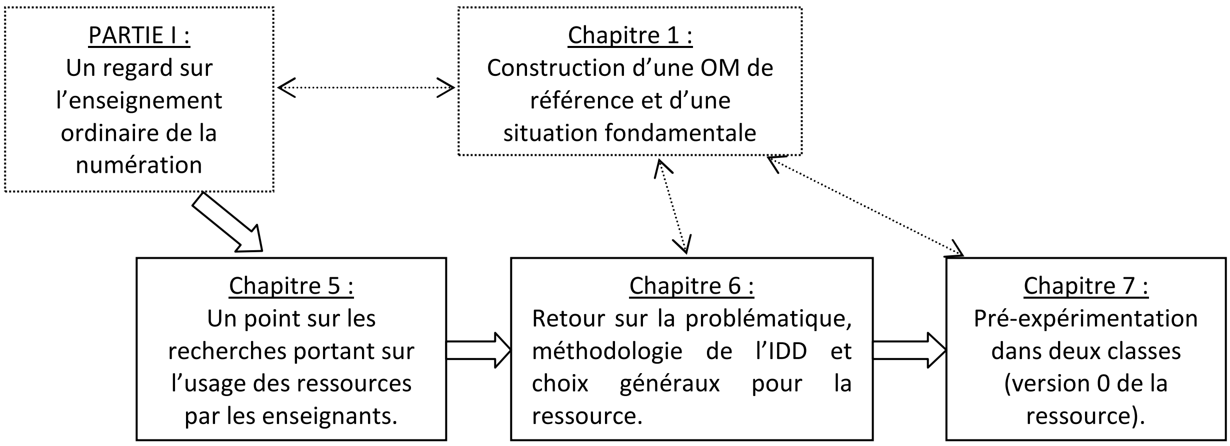


Figure 63 : schéma du plan de la partie II

Voici le sommaire détaillé de la partie II :

Chapitre 5

Un point sur les recherches portant sur l'usage des ressources par les enseignants

Afin de définir nos choix généraux pour la conception de la ressource servant de support à l'expérimentation, nous allons nous appuyer sur les résultats de recherches existantes sur l'usage des ressources par les enseignants du primaire en lien avec leur travail de préparation et de mise en œuvre de séances de classes. Nous nous restreindrons au cas de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire car il pourrait y avoir des différences importantes dans les pratiques et les usages des enseignants en fonction de la discipline et du niveau d'enseignement. Puisque notre objectif, *in fine*, est d'élaborer une ressource, nous discuterons au fur et à mesure de la présentation des travaux de recherche les apports que nous y voyons pour la conception d'une ressource, dans le cadre de notre thèse. Nous nous appuierons également sur certains résultats de recherches portant sur les pratiques des enseignants du primaire concernant l'institutionnalisation car ils pourraient avoir des conséquences sur le contenu de la ressource. Nous terminerons en nous posant la question de l'intérêt de types de ressources autres que les manuels usuels.
Commençons par rappeler des concepts théoriques en lien avec les usages des ressources par les enseignants.

I. Des concepts théoriques pour l'étude de l'usage des ressources

Cette problématique est assez récente en didactique des mathématiques. En France, elle est principalement traitée par l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2010). Nous souhaitons rappeler quelques concepts théoriques qui permettent d'étudier le travail documentaire des enseignants afin de montrer comment sont prises en compte les interactions entre un enseignant et une ressource qu'il utilise, et nous complèterons par les apports de l'ergonomie des *environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (EIAH) sur cette question des ressources.

I.1 L'approche documentaire

En s'appuyant sur *l'approche instrumentale* de Rabardel (1995), Gueudet et Trouche (2010) ont développé une *approche documentaire du didactique* qui permet d'étudier les interactions entre les professeurs et les ressources qu'ils utilisent. Dans ce cadre une ressource est définie comme « un *artefact* : un produit de l'activité humaine, élaboré pour s'inscrire dans une activité finalisée […], ou un composant d'un artefact » en appui sur la définition de Rabardel (1995). Une ressource peut alors être matérielle ou non : un manuel scolaire, un site internet, une fiche de préparation de l'enseignant mais aussi des réponses données par les élèves, etc.
Tout comme un artefact est transformé en instrument dans l'approche instrumentale, ici « un ensemble de ressources donne naissance, pour une classe de situations, au cours d'une genèse documentaire, à un document » à travers les deux processus *d'instrumentation* (« constitution des schèmes d'utilisation des artefacts ») et *d'instrumentalisation* (« par lesquels le sujet met à sa main les artefacts »). Ces processus sont au cœur du *travail documentaire* de l'enseignant (interactions entre l'enseignant et un ensemble de ressources). Ils peuvent être résumés par le schéma suivant :

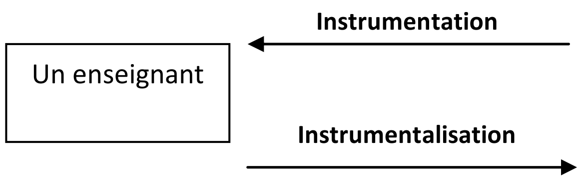


Figure 64 : schéma simplifié de l'instrumentation/instrumentalisation

Nous retenons pour la suite cette définition de ressource. Cette approche amène à dépasser une idée un peu naïve d'influence à sens unique d'une ressource sur le travail d'un enseignant pour considérer les usages de ressources selon ce double processus d'instrumentation/instrumentation. Ainsi comme cela est souligné en conclusion d'un atelier portant sur la qualité des ressources dans les actes des journées INRP de 2010[68], il apparait :

> « qu'on ne peut pas dissocier les ressources de leurs usages et la question de relation entre la qualité d'une ressource et la qualité de ses usages s'est posée. En effet, il semble indiscutable que la qualité d'une ressource ne garantit pas la qualité de son usage et vice versa. Les usages des ressources sont déterminés en grande partie par les connaissances et les compétences professionnelles des enseignants ou formateurs - utilisateurs de ressources » (p.146).

[68] http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/apprendre-enseigner-se-former-en-mathematiques. Site consulté le 13/06/2013.

Cela n'est pas sans conséquence du point de vue de la conception de ressources (et plus généralement d'artefacts) comme le souligne Trouche (2005) :

> « l'idée que la conception des artefacts s'enrichit à travers ses usages suggère que le processus même de conception se poursuit à travers les usages. Il ne s'agit plus de faire un prototype, de le tester, et de passer à une phase opérationnelle, mais bien plutôt de prévoir une conception d'artefacts comme nécessairement itérative, alternant des *phases de réalisation* et des *phases de mise en œuvre* » (p.275).

Dans une telle perspective, la ressource doit alors satisfaire à certains critères permettant d'assurer une certaine qualité. Ces critères peuvent être évalués par les concepts d'ergonomie.

I.2 Une approche ergonomique : les concepts d'*utilité*, *utilisabilité* et *acceptabilité*.

Ces concepts d'ergonomie se différencient des concepts de l'approche documentaire par le fait que leur finalité est d'évaluer la qualité d'une ressource afin de permettre la conception de ressources qui soient utiles et utilisables par les utilisateurs. L'approche documentaire s'inscrit davantage dans une démarche de compréhension des usages.
Georget (2010) et Hammoud (2009) proposent de s'appuyer sur les critères définis pour l'évaluation des EIAH (Tricot et *al.*, 2003) pour évaluer les usages des ressources : *utilité*, *utilisabilité* et *acceptabilité*. Voici comment Hammoud (*id.*) les définit :

> « L'ergonomie propose de distinguer : i) l'utilité d'une ressource pour remplir une fonction, accomplir une tâche, atteindre un objectif d'apprentissage, ii) l'utilisabilité d'une ressource pour désigner le fait que l'utilisateur visé peut effectivement se saisir de cet outil pour accomplir sa tâche, et iii) l'acceptabilité d'une ressource pour désigner le fait que l'utilisateur potentiel acceptera de l'intégrer dans sa pratique car elle lui apparaît cohérente avec ses attentes, ses valeurs et les contraintes institutionnelles perçues. » (p.25)

Enfin quand on considère qu'une ressource s'enrichit à travers ses usages (ce qui est lié au phénomène d'instrumentalisation) il est important que cette ressource permette de s'adapter aux usages personnels que vont en faire les enseignants, ce qui est lié à son *adaptabilité* (Georget, *id.*). Cela concerne aussi le fait que les enseignants n'ont pas tous les mêmes connaissances professionnelles, les mêmes expériences. Pour Georget, il « paraît essentiel de permettre à l'enseignant de personnaliser les ressources qu'on lui propose, de les adapter à sa propre pratique et à ses contraintes » ce qui doit permettre d' « élargir l'espace de libertés des enseignants […] et non le réduire » (*id.*).
Dans son travail de thèse, Georget (2009) a été amené à concevoir une ressource pour des enseignants pour la mise en œuvre de « situations de recherche et de preuve entre pairs » (RPP). Ce travail s'est fait dans le cadre d'une communauté de pratiques[69]. Il a alors été confronté à « un paradoxe d'incomplétude des ressources » qu'il explique ainsi :

> « Si les ressources sont « trop incomplètes », les enseignants auront vraisemblablement du mal à en tirer profit et si, à l'inverse, les ressources sont « trop complètes », les enseignants risquent de ne pas les utiliser du fait de la quantité d'information à traiter. » (Georget 2010, p.1)

[69] Wenger, E. (1998). *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity*. Cambridge University Press.

Cela pose alors la question, pour la diffusion d'une suite de situations, des informations essentielles qui sont à décrire pour en permettre une bonne appropriation par les enseignants. Il n'est certainement pas possible de répondre d'une manière générale à cette question, qui pourrait dépendre du savoir en jeu et des situations proposées. Dans l'expérimentation de Georget (2009), il semble que le fait de ne pas trop décrire dans le détail les déroulements des situations s'accompagnait d'une volonté de laisser des marges de manœuvre pour la mise en œuvre. Cela a été « unanimement apprécié » par les enseignants, ce qui témoignerait d'une bonne acceptabilité. Cela semble tout à fait cohérent avec les résultats de recherche que nous allons présenter maintenant.

II. Les résultats de recherches sur les usages de ressources par les enseignants de primaire, en mathématiques.

Nous allons ici nous appuyer sur les travaux de recherche de Leroyer et Bailleul (2010), Remillard (2010), Margolinas et Wozniak (2010) et Arditi (2011).

II.1 Une utilisation importante des ressources commerciales

Leroyer et Bailleul (2010) ont effectué une enquête sur l'usage des supports commerciaux (manuels et guides pour l'enseignant associés) à partir d'un questionnaire auquel ont répondu 261 enseignants d'école primaire en France (de l'école maternelle jusqu'au CM2). Les résultats mettent en évidence « une utilisation importante des supports d'enseignement commercialisés par les enseignants ». En effet 98,1% des enseignants déclarent utiliser *un ou plusieurs* de ces supports. Une bonne partie (79%) indique même utiliser *plus d'un support* et presque le tiers utilise *5 supports ou plus*. Cela témoigne de la place importante de ces outils dans le travail de l'enseignant et révèle que, pour la plupart, les enseignants travaillent à partir de plusieurs ressources.
Ils pointent que les supports commerciaux proposant un guide pour l'enseignant et un manuel pour l'élève, sont utilisés de façons variées. L'utilisation du guide pour l'enseignant semble être une pratique répandue mais souvent accompagnée du manuel pour l'élève. Par exemple, 87,54% des enseignants n'utilisent *jamais* ou *parfois* le guide de l'enseignant seul. Par contre 55,66% des enseignants déclarent utiliser *toujours* ou *souvent* le support élève et le support enseignant. Plus de la moitié des enseignants (52,14%) n'utilisent, *toujours* ou *souvent*, que le support élève.

II.2 Diversité des rapports des enseignants aux ressources qu'ils utilisent

Les résultats de cette recherche mettent en lumière une utilisation massive des supports commerciaux avec des modalités différentes concernant les supports pour l'enseignant et pour l'élève allant de la simple utilisation à l'adaptation avertie voire la conception[70]. Il n'est pas possible de dégager un profil principal dans l'utilisation de ces supports. Au contraire il y a une grande diversité dans les rapports au support qui semblent en partie liés à l'âge ou à l'expérience des enseignants ou encore à leur niveau d'enseignement. Mais, puisque les

[70] Les auteurs définissent trois rapports au support à travers la relation qui existe entre l'action de l'enseignant et le support d'enseignement : l'utilisation, l'adaptation et la conception.

enseignants n'utilisent pas tous les mêmes supports, cette diversité pourrait aussi témoigner de différences importantes dans les apports proposés par ces supports.
Par exemple, les enseignants ayant un rapport au support de type « utilisateur » (19,5% des enseignants interrogés), déclarent que :

> « les supports d'enseignement commercialisés permettent la mise en œuvre d'une programmation, d'une progression ou de séances sans trop se poser de questions et qu'ils font confiance aux concepteurs et au contenu de ces supports. » (p.324)

Des enseignants ont une utilisation « avertie » (13,41%) et considèrent que les supports qu'ils utilisent ont peu d'impact sur leur préparation matérielle et sur leur travail de réflexion. On peut penser qu'ils utilisent les supports d'enseignement en y dégageant les idées essentielles, ce qui leur suffit pour la mise en œuvre des séances. D'autres ont un rapport basé sur l'adaptation ou l'utilisation allant au-delà de l'application (21,07%). Ils considèrent que « ces supports apportent donc un contenu théorique qui permet d'éclairer et de comprendre les choix opérés par les concepteurs du ou des supports utilisés ».
Enfin, des enseignants (23,37%) montrent une certaine réserve vis-à-vis des manuels qui pourrait témoigner d'un rapport de type adaptation ou conception. Ils déclarent en effet que ces supports :

> « ne permettent pas une mise en œuvre de séances, de progressions ou de programmations sans trop se poser de question, qu'ils n'ont pas nécessairement confiance en les rédacteurs et ce qui est écrit, que les supports ne fournissent pas d'éléments théoriques accessibles à tous et qu'ils ne réduisent pas le temps de préparation lié à la réflexion. » (p.323)

Ces résultats peuvent être mis en relation avec l'étude de Remillard (2010) sur les *modes d'engagement*[71] des enseignants avec les ressources curriculaires, dans un autre contexte, celui de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire aux Etats-Unis. Cela concerne l'utilisation d'une même ressource, qui diffère des ressources plus traditionnelles :

- par le fait qu'elle décrit des déroulements précis pour les élèves en lien avec les préconisations curriculaires (standards NCTM[72] aux Etats-Unis) qui laissent une place importante aux interactions entre élèves,
- et fournit des éléments pour la formation de l'enseignant (« sous forme d'explications mathématiques, d'exemples de productions d'élèves, de résultats de recherche, et de suggestions d'évaluation »).

Remillard (2010) donne quatre exemples de modes d'engagement de professeurs des écoles avec cette ressource.
Le premier enseignant (4ème primaire, 30 ans d'expérience), utilise la ressource « pour les fiches », c'est-à-dire qu'il recherche ce qui sera à proposer aux élèves (il lit en premier les pages pour les élèves). De plus « Il orchestre ces séances avec les mêmes pratiques d'enseignement qu'avec les manuels du commerce » plus traditionnels. Remillard souligne que ce phénomène a été montré par de nombreuses études :

---

[71] Selon Remillard (2010),

> « le mode d'engagement concerne ce que les professeurs font dans leurs transactions avec une ressource curriculaire particulière, comment ils y instillent du sens, et comment ils interprètent ce qui est proposé. » (p.208)

[72] National Council of Teachers of Mathematics

> « Les professeurs ont tendance à s'engager avec une nouvelle ressource curriculaire, au moins au départ, comme lors de leurs interactions avec les ressources qu'ils utilisaient auparavant ». (p.209)

La deuxième enseignante (2ème primaire, 20 ans d'expérience) lit la ressource « pour le scénario », c'est-à-dire que « quand elle les lit, ce qu'elle fait très soigneusement, c'est pour chercher un scénario ». Elle se centre donc sur la description de la leçon.
La troisième enseignante (2ème primaire, plus de 30 ans d'expérience) a rejeté cette nouvelle ressource. Elle semble sceptique sur l'intérêt des ressources, en général, pour l'enseignement. Elle utilise alors ces ressources « en extrayant et en choisissant des activités dans un ensemble de différents manuels ».
Enfin la quatrième enseignante (3ème primaire, 4 ans d'expérience) lit « pour les idées » c'est-à-dire que « Lorsqu'elle lit le texte, elle ne cherche pas ce qu'il faut faire, mais quelles sont les idées mathématiques à retenir ». Elle déclare :

> « Même si la leçon ne se déroule pas comme prévu, je sais quelles sont les mathématiques que je vise et je garde cet objectif même si nous devons introduire des changements ». (p.213)

Remillard conclut alors que quand les enseignants utilisent une nouvelle ressource, « ils le font en adoptant une attitude principale » et que cette attitude est fortement dépendante des expériences personnelles des enseignants avec les ressources antérieures et de leurs *a priori* sur les ressources.
Même si les modes d'engagement peuvent évoluer au cours du temps, c'est seulement pour cette dernière enseignante ainsi qu'une autre, parmi les 14 enseignants ayant participé à son expérimentation, que leur mode d'engagement correspond aux utilisations prévues par les auteurs :

> « C'étaient les seuls professeurs à se centrer sur les objectifs mathématiques, les seuls à lire les compléments d'analyse mathématique destinés aux professeurs et à les utiliser pour leurs décisions didactiques et pour comprendre l'apprentissage des élèves. » (p.213)

Dans le cas d'une ressource portant sur un thème ou un secteur mathématique qui vise donc une utilisation ponctuelle de la part de l'enseignant, aurait-on ce même phénomène ? Cela permet d'entrevoir la difficulté de diffusion d'une séquence avec une ressource de type manuel et/ou guide du maître. Si par exemple, un enseignant utilise la ressource « pour les fiches », ne risque-t-il pas de rester insensible aux apports pour l'enseignant et peut-être de ne pas mettre en œuvre les situations de façon adaptée ? Mais si la ressource ne propose pas de telles « fiches », le risque de rejet pourrait être important de la part de cet enseignant, parce que cette ressource ne serait pas utilisable. Il pourrait donc y avoir certains compromis à trouver dans une ressource pour permettre son usage par différents enseignants.
La question d'appropriation d'une séquence proposée dans une ressource, dans le cas d'un manuel scolaire et de son guide pour l'enseignant, est traitée dans la thèse d'Arditi (2011). Ce manuel étant écrit par des didacticiens cela pose également la question de la diffusion de travaux de recherche dans l'enseignement ordinaire.

II.3 Les différentes pratiques d'enseignants lors de l'usage d'un même manuel scolaire

La thèse d'Arditi (2011) porte sur l'étude des « variabilités des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens ». Elle étudie les usages par cinq enseignants du manuel Euromaths[73] (2006), pour le thème des fractions. Elle observe le suivi du manuel à deux niveaux : celui de la séquence et celui d'une activité particulière de cette séquence. Nous allons présenter les résultats obtenus.

Le suivi du manuel pour la construction de la séquence sur les fractions

On peut observer des différences au niveau du suivi du manuel pour la construction du projet des enseignants (leur séquence) : certains le suivent pas à pas alors que d'autres prennent certaines libertés (modification de la séquence ou simple changement d'une des activités proposées). Selon Arditi, « tout se passe comme si la logique de la construction de la séquence était difficilement accessible à des enseignants ordinaires ». Les enseignants peuvent alors appliquer la séquence telle quelle mais également en proposer des modifications (comme par exemple supprimer un exercice) qui pourraient modifier la cohérence de cette séquence. Pour Arditi, « il semblerait que ce soit le fait de proposer aux enseignants des processus qu'ils n'ont pas les moyens de comprendre complètement qui puisse entraîner ce type d'écueil », même si elle souligne que les adaptations faites par les enseignants ne sont pas toujours problématiques, comme elle a pu l'observer pour une enseignante qui avait supprimé une question importante sans que cela l'empêche de proposer une situation d'apprentissage à ses élèves.
A ce niveau de construction d'une séquence, il semblerait donc que la ressource ne donne pas les moyens aux enseignants de faire des choix raisonnés, ce qui peut donner lieu à des modifications qui ont des effets, dont les enseignants n'ont pas conscience, sur la cohérence de la séquence.

Le suivi d'une activité précise du manuel

<u>Appropriation des enjeux de l'activité</u>
Arditi (2011) met en évidence que la redéfinition et la mise en œuvre d'une des activités proposées par ce manuel, pour l'introduction des fractions, sont variées et sont influencées par les pratiques et les connaissances des enseignants. Il est à noter que les enseignants qui redéfinissent peu l'activité proposée sont tous les trois « proches du milieu de la didactique et, deux d'entre eux ont des formations scientifiques alors que la troisième continue à suivre des formations en mathématiques ». Arditi en conclut alors qu'il semblerait que « l'*activité* ne soit lisible et explicite *a priori* que pour des enseignants « experts » en mathématiques et/ou didactique ou ayant déjà utilisé l'*activité* » (p.263).
Cela pourrait être lié à des problèmes de « lisibilité » des activités proposées dans le manuel :

> « Les activités de découverte du manuel ne sont pas toujours explicites en termes d'enjeux ou pour ce qui est du rôle des différentes questions qui le constituent. Par exemple, certaines questions permettent de mettre en place un milieu pour la résolution d'une autre question. Sans analyse *a priori* de l'*activité*, l'intérêt qu'elles peuvent avoir peut ne pas être explicite. » (p. 342)

L'appropriation par les enseignants des enjeux des différentes activités ne semble pas aller de soi, ce qui peut les amener à faire des modifications non adaptées ou bien à suivre ce qui

[73] Peltier M.-L., Briand J., Ngono B. & Vergnes D. (2006). Euromaths CM2 et Livre du professeur Euromaths CM2. Hatier.

est proposé sans en comprendre les enjeux. Cette appropriation pourrait donc être difficile à obtenir avec un manuel proposant directement des activités pour les élèves. C'est en effet dans les guides à destination des enseignants que l'on peut trouver de tels éléments, mais les enseignants ne les utilisent pas toujours (Leroyer & Bailleul 2010). Ceux qui participent à l'expérimentation d'Arditi ne semblent pas l'utiliser en général. Certains ne l'ont même pas. Ce point nous semble essentiel car en n'utilisant que le manuel de l'élève les enseignants doivent reconstruire les enjeux à partir des activités proposées. Pour cela, d'une part, ils font bien sûr appel à leurs connaissances mathématiques et didactiques et, d'autre part, s'appuient sur leurs expériences antérieures, ce qui leur permet une interprétation de ces enjeux, mais elle n'est pas toujours conforme aux attentes des auteurs. Cela amène les enseignants à une redéfinition des activités proposées « qui peut avoir des conséquences négatives sur les apprentissages potentiels des élèves : dédoublement des situations et enjeux hors programme de CM2 ».

Cela nous semble relever d'une limite importante des ressources commerciales du type manuel/guide de l'enseignant, dont la conception est soumise à de nombreuses contraintes pour les auteurs (Briand et Peltier, 2010), et pour lesquelles les enseignants peuvent avoir un mode d'engagement uniquement centré sur les fiches proposées aux élèves ce qui ne leur permet pas (sauf peut-être s'ils ont des connaissances mathématiques et didactiques suffisantes) une mise en œuvre de la situation en préservant les enjeux prévus par les auteurs. La question de la lisibilité de ces enjeux en lien étroit avec les activités à proposer aux élèves est donc une question essentielle à prendre en compte dans la conception d'une ressource pour limiter les phénomènes observés par Arditi.

Cependant Arditi fait le constat que plus les objectifs sont explicites, plus les enseignants ferment les situations (pour ceux qui ne suivent pas le manuel pas à pas) ou encore qu'une enseignante qui suit pas à pas le manuel et qui a compris les enjeux « force » l'apprentissage par rapport à ce que font les élèves. La mise en avant des enjeux ne suffit pas à permettre une gestion adaptée de l'activité en classe.

Il y a donc un équilibre difficile à trouver entre la description d'une situation à proposer aux élèves et les enjeux mathématiques associés.

<u>Compatibilité des pratiques des enseignants avec l'utilisation du manuel</u>

Selon Arditi il y aurait des pratiques plus ou moins compatibles avec l'utilisation de cette activité précise. Par exemple (p.261) deux enseignants qui ont des pratiques compatibles avec l'utilisation de cette activité du manuel respectent la tâche prescrite et laissent une certaine responsabilité aux élèves. Une autre enseignante a des pratiques moins compatibles (puisqu'elle « réduit la tâche et laisse peu de responsabilités aux élèves ») mais les conséquences ne sont pas « graves » en termes d'apprentissages possibles pour les élèves. Le manuel, pour ces enseignants peut alors être un outil utile, relativement à d'autres ressources. Ce n'est pas le cas pour les deux derniers enseignants qui ont des pratiques moins compatibles avec l'utilisation de cette activité, ce qui peut avoir des conséquences plus « graves », comme l'introduction d'objectifs hors programme. Cependant Arditi fait remarquer que l'utilisation de ce manuel pourrait être positive pour la pratique d'une de ces deux enseignantes puisqu'« elle peut permettre de laisser plus de responsabilités aux élèves et de les confronter à des situations d'apprentissage ».

Voici les facteurs d'incompatibilité entre pratiques des enseignants et utilisation de l'activité :

> « Il s'agit : de la difficulté probable de comprendre les enjeux de l'*activité* lors d'une lecture sans analyse a priori, de la grande présence demandée aux enseignants pour mettre en œuvre l'*activité*, des gestes nécessaires aux enseignants qui demandent probablement des

> connaissances mathématiques et/ou didactiques, et de la nécessité de laisser à chaque élèves des responsabilités lors de la mise en œuvre de l'*activité*. Cette *activité* semble donc difficile à mettre en œuvre telle qu'elle est prescrite par le manuel car elle demande aux enseignants des gestes précis et potentiellement coûteux. »

L'activité en question semble difficilement utilisable car elle s'adapte peu aux différentes pratiques. En effet, en renversant le point de vue pris par Arditi, c'est-à-dire en prenant celui des ressources, on pourrait dire que cette ressource est peu utilisable du fait de sa non compatibilité avec certaines pratiques d'enseignants. Même si la possibilité d'une ressource qui le soit reste posée. En tout cas, dans ce cas précis, il semblerait que cette situation ne permette pas des utilisations variées du fait d'un enchaînement de questions ayant une certaine logique. La question de situations qui pourraient mieux s'adapter à différentes pratiques d'enseignement et dont les enjeux pourraient être préservés malgré différents types de mises en œuvre en classe apparait alors comme essentielle.

<u>Le suivi d'un manuel « les yeux fermés »</u>
Arditi (2011) s'est également posé la question de la possibilité pour les enseignants de suivre le manuel « les yeux fermés », c'est-à-dire « en suivant assez strictement le déroulement prévu mais sans comprendre complètement ce qui y était en jeu ou sans y adhérer complètement » (p.334). Les analyses des pratiques des enseignants observés montrent que ce n'est pas possible sans « analyse *a priori* poussée ou des connaissances mathématiques et didactiques permettant de s'adapter rapidement » (p.266-267).
Il s'agit là d'un résultat essentiel sur l'usage de ressources car à regarder certains manuels et guides associés, les auteurs semblent faire l'hypothèse inverse. Arditi montre qu'encadrer au maximum le travail de l'enseignant afin d'avoir une mise en œuvre la plus proche possible de ce que les auteurs avaient prévu ne permet pas nécessairement aux enseignants de s'approprier les enjeux des activités proposées ; ces activités peuvent même alors perdre tout leur intérêt d'apprentissage.
L'utilisation de multiples ressources par les enseignants (Leroyer et Bailleul 2010) peut amener à questionner la genèse de l'« œuvre » des enseignants, comme l'ont fait Margolinas et Wozniak (2010).

II.4 La construction de l'« œuvre » de l'enseignant autour de certaines ressources et des questions sur l'intégration de nouvelles ressources

Margolinas et Wozniak (2010) ont fait une étude clinique de type exploratoire, sous forme d'entretiens réalisés auprès de 11 professeurs des écoles volontaires dont le but est d'identifier les raisons des choix des enseignants quant aux ressources pour leur préparation de classe.
Elles montrent que les enseignants se réfèrent principalement à un document[74], qu'elles appellent « document principal » :

> « Il s'agit toujours d'un document essentiel dans la pratique mathématique du professeur au moment où il est interrogé ». (Margolinas & Wozniak, *id.*, p.239)

[74] Elles précisent que « le mot « document » est utilisé dans ce chapitre dans son acception large : « chose qui enseigne ou renseigne » (Littré v1.3).

Elles le distinguent du « document générateur » autour duquel l'œuvre du professeur se constitue :

> « Mais si le professeur évoque la diversité des documents qu'il utilise, il en est un qui semble à l'origine de son œuvre, nous l'appelons le *document générateur*. En effet, c'est autour d'un document « élémentaire » que se cristallise le travail de développement de l'œuvre du professeur, comme la perle de l'huître se construit autour du grain de sable. » (p.239)

Le document générateur se donne donc à voir de façon différente en fonction de l'expérience de l'enseignant :

> « Au début de l'œuvre, le document générateur est très visible et reconnu comme tel par le professeur. Cependant, nous constatons dans nos entretiens que plus l'œuvre se construit comme une réponse personnelle, plus le document générateur est masqué par l'œuvre elle-même » (p.240).

Même si un aperçu est donné pour le cas d'un professeur, l'étude ne permet pas d'identifier les éléments qui contribuent au développement de l' « œuvre » du professeur. Il faudrait pour cela un suivi d'enseignants sur plusieurs années.

Le document générateur peut être vu comme un point d'appui pour l'enseignant, car les organisations mathématiques et didactiques du document générateur pourraient être un prisme à travers lequel sont regardées toutes nouvelles ressources, ce qui pose des questions de cohérence entre les deux approches (Margolinas & Wozniak 2010). Cela pourrait donc apparaître comme une contrainte pour l'introduction de nouvelles propositions d'enseignement.

Ce point est d'autant plus crucial aujourd'hui du fait de la quantité de ressources existant sur internet. Les entretiens de Margolinas et Wozniak (2010) avec des enseignants permettent de « supposer » que les changements opérés par les professeurs se font au niveau d'organisations mathématiques ponctuelles (par exemple dans le choix, mouvant, des exercices proposés aux élèves d'une année à l'autre) alors qu'ils maintiennent l'organisation mathématique globale (comme la programmation des thèmes d'études, par exemple).

Et qu'en est-il de l'organisation mathématique locale, c'est-à-dire des différentes organisations mathématiques ponctuelles relevant d'une même technologie ? Les enseignants pourraient donc accepter de modifier des exercices sur un thème donné en s'appuyant sur une nouvelle ressource, à condition que ces modifications s'inscrivent bien dans leur organisation mathématique globale, voire locale sur un thème donné.

Dans une ressource proposant une séquence sur un thème leur premier usage pourrait donc se caractériser par le choix de quelques problèmes ou exercices seulement (sur quels critères ?) tout en maintenant leur organisation mathématique locale antérieure pour ce thème. Cela pourrait être éventuellement dans un second temps qu'ils seraient amenés à faire des modifications plus en profondeur de l'organisation mathématique locale puis éventuellement de l'organisation mathématique globale. Nous reviendrons par la suite sur ces questions d'intégration de nouvelles ressources.

Nous avons vu que les enseignants adaptent les ressources à leurs pratiques d'enseignement. C'est ce qui nous a amené à explorer ce que la recherche en didactique des mathématiques apporte sur la connaissance de ces pratiques afin d'en tirer des conséquences possibles pour la conception d'une ressource. Des recherches visant l'étude de ces pratiques se sont développées au cours des quinze dernières années ; nous présentons maintenant quelques résultats très récents concernant l'institutionnalisation des savoirs.

III. Un nœud des pratiques des enseignants du primaire : l'institutionnalisation des savoirs

Nous ne cherchons pas ici l'exhaustivité dans les résultats des travaux de recherche concernant les pratiques des enseignants de l'école primaire en mathématiques, mais nous souhaitons mettre en évidence certains phénomènes liés à l'institutionnalisation des savoirs.
Dans plusieurs recherches (Butlen & *al.* 2011, Coulange 2011, Margolinas & Laparra 2011) portant sur les pratiques des enseignants du primaire, il ressort, pour certains enseignants, certains dysfonctionnements concernant l'institutionnalisation des savoirs en jeu suite à la recherche d'un problème. Cela amène Coulange (2011) à parler « d'*incidence* des savoirs à enseigner dans les pratiques enseignantes ». Même si une enseignante montre des qualités dans la gestion de la dévolution (« une réelle capacité à engager les élèves dans des situations d'action, et ce quel que soit le potentiel de ces situations vis-à-vis d'apprentissages mathématiques ») il peut ne pas y avoir (ou peu) d'institutionnalisation des savoirs en jeu. Selon Coulange, « tout se passe comme si les savoirs mathématiques et leur problématisation n'étaient pas au cœur des pratiques ».
Des constats du même ordre ont pu être faits également par Margolinas et Laparra (2011) dans le cadre du même projet de recherche[75] à partir de l'observation d'une classe de Grande Section d'école maternelle (élèves de 5/6 ans) sur deux années consécutives : « les maîtres que nous observons semblent penser que l'activité de l'élève serait suffisante à provoquer un apprentissage ». Elles sont alors amenées à parler de « dysfonctionnement de l'institutionnalisation »[76] dont l'origine pourrait être liée à « la forme scolaire dominante aujourd'hui qui donne une prééminence à l'activité de l'élève » et qui « renverse en quelque sorte ce qui faisait le fondement du métier du professeur : assurer la responsabilité et la transmission des savoirs ». Il devient alors parfois difficile d'identifier les intentions d'enseigner des enseignants.
Enfin, signalons qu'une équipe de recherche travaillant sur les pratiques des professeurs des écoles débutants, en milieu défavorisé (Butlen et *al.* 2011), a fait apparaître, dans ce contexte particulier, que majoritairement les pratiques des enseignants observés peuvent se caractériser par :

> « des scénarios ne présentant pas (ou très rarement) de problèmes consistants aux élèves, par des temps de recherche très réduits, par une baisse quasi systématique des exigences de la part du professeur, par une individualisation non contrôlée de l'enseignement, par la mise en œuvre d'une certaine forme de pédagogie différenciée rendant le plus souvent impossible l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation. » (p.6)

Cela les différencie d'autres enseignants qu'ils ont observés, très minoritaires, dont les pratiques se caractérisent par :

> « des scénarios proches de ceux privilégiés en formation (problèmes consistants, phase de recherche des élèves, synthèse et institutionnalisation suivies d'activités de réinvestissement,

---

[75] Ces deux recherches, sont présentées dans l'ouvrage « La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignement », de Jean-Yves Rochex et Jacques Crinon (dir.), Presses universitaires de Rennes, 2011

[76] Ces auteures font le même type de constat pour une enseignant de classe de CP dans Margolinas C., Laparra M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. *Actes du colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

> etc.), gestion collective des apprentissages et des comportements, maintien des exigences en termes d'apprentissages. » (p.6)

Des alternatives sont donc possibles, même dans ce contexte particulier des classes faibles. Cependant cela demande une certaine « vigilance didactique » (Charles-Pezard, 2010) de la part des enseignants, c'est-à-dire :

> « des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques » (p.210).

Ces connaissances s'exercent donc à la fois lors du travail de préparation de l'enseignant (au niveau global de la séquence ainsi qu'au niveau local pour une séance) et de la mise en œuvre des séances dans la classe. Arditi (2011) montre également que ce sont bien ces connaissances qui sont nécessaires pour avoir une utilisation du manuel conforme aux attentes des auteurs.
Nous allons maintenant compléter par des constats et par certaines questions soulevées par ces recherches concernant le travail de conception des séquences. Si les savoirs ne sont pas toujours au cœur des préoccupations de l'enseignant dans la mise en œuvre d'une séance, on peut penser que ce n'est pas le cas non plus lors du travail de conception d'une séquence (projet local) sur une notion mathématique.
Les différentes observations d'une même enseignante sur toute une année scolaire amènent Coulange (2011) à faire des hypothèses sur les choix de situations proposées aux élèves. Ce choix serait guidé :

> « par des préoccupations éloignées des savoirs et de leur épistémologie : comme les liens apparents des activités proposées avec du concret ou du transversal […] ou leur capacité visible à plonger et à maintenir les élèves en action, dans « du faire ». Le didactique est écrasé par de l'idéologique ou du doxique qui place au cœur des actions enseignantes d'autres priorités que les savoirs mathématiques ». (p.44)

Cela entre en résonance avec les constats de Margolinas et Wozniak (*op.cit.*) dans leur recherche sur la documentation des professeurs des écoles. Elles ont été amenées à interroger des enseignants sur leur travail de préparation en lien avec l'utilisation de diverses ressources. Ces entretiens témoignent du fait que les choix des enseignants au niveau de la construction d'un thème s'appuient sur des considérations d'ordre pédagogique plus que mathématique ou épistémologique.
Les mêmes questions se posent au niveau plus large de l'organisation mathématique globale. Margolinas et Wozniak expliquent en effet que les ressources usuelles ne laissent pas toujours apparaître la cohérence sur laquelle se fondent les choix de transposition didactique effectués par les auteurs.

> « Or les professeurs déclarent fréquemment qu'ils ne peuvent pas « tout faire » dans un manuel, ce qui veut dire que les choix écologiques des auteurs de la ressource utilisée peuvent être bouleversés par les choix du professeur, choix dont nous avons dit qu'ils n'étaient pas nécessairement motivés par des raisons liées à l'organisation mathématique, mais par d'autres types de contraintes. » (p.242)

Elles ajoutent :

> « il pourrait donc y avoir des enjeux épistémologique et didactique importants à proposer des ressources disponibles sous forme numérique sur l'Internet qui permettraient d'avoir accès à une organisation des savoirs pensée dans sa globalité. » (p.244)

Cela serait-il susceptible d'avoir une influence sur les choix des enseignants ? Nous allons poursuivre avec cette question de nouvelles ressources possibles pour les enseignants.

IV. Vers de nouvelles ressources pour les enseignants ?

Même si les différentes recherches présentées s'appuient sur des observations faites dans des contextes particuliers, elles semblent mettre en évidence certaines caractéristiques des pratiques actuelles de professeurs des écoles, dont Margolinas et Laparra (2011) ont proposé une explication de l'origine, par les contraintes institutionnelles pesant sur ces enseignants concernant l'importance accordée à l'activité de l'élève.

Elles signalent d'ailleurs que les ressources à disposition des enseignants (programmes et manuels) ne leur permettent pas de dépasser cette vue de l'enseignement centrée sur les tâches à proposer aux élèves car ils renforcent la centration sur l'activité des élèves (à l'exception de certains guides pour l'enseignant) :

> « D'un côté (les programmes), le professeur est conçu comme ayant « toute liberté pédagogique », sans que les moyens intellectuels de cette prise de liberté soient dévoilés ni même envisagés. D'un autre (les manuels), le professeur est vu plutôt comme un exécutant qui doit mettre l'élève au travail, ce qui peut laisser croire au professeur que cette activité de l'élève (remplir la fiche du jour) peut suffire et ne lui donne aucune indication pour gérer l'ensemble des situations nécessaires à l'apprentissage des savoirs (en termes de formulation, formalisation, etc.).
>
> Les ressources à la disposition du professeur sont le plus souvent inadaptées, non seulement à ce qu'il peut ressentir comme étant ses besoins mais surtout à ce que seraient ses besoins si l'acquisition de savoirs primait dans sa pratique effective. » (Margolinas & Laparra, p.30)

Ainsi des ressources permettant de s'approprier les enjeux d'enseignement pour différentes notions à enseigner pourraient être des ressources complémentaires à l'offre déjà existante. Margolinas et Wozniak (2010) posent la question d'un nouveau type de ressource pour les enseignants du primaire qui pourrait leur permettre « de mieux comprendre les difficultés des élèves », « de réfléchir aux mathématiques à enseigner, de les mettre à distance ». Elles proposent, ce que Neyret (1995) appelle un « traité » pour les outiller « par l'apport de savoirs mathématiques, didactiques et épistémologiques ».

Des ressources de ce type commencent à être produites dans le cadre de travaux de recherche, sur l'énumération (Margolinas & *al.*, 2011) et sur les liens entre numération et système métrique (Chambris 2012). Elles pourraient en effet avoir un intérêt majeur pour la formation des enseignants ou pour servir de point d'appui pour la conception des ressources pour l'enseignement, sans être pourtant directement utilisables par les enseignants.

On peut par exemple considérer que les documents d'accompagnement[77] (MEN, 2005) des programmes officiels de 2002 qui proposaient des apports didactiques pour les enseignants, avaient été conçus comme des compléments des programmes permettant d'apporter « un éclairage spécifique sur quelques thèmes sensibles ». Il semble qu'ils aient été peu utilisés par les enseignants, qui parfois n'en connaissaient même pas l'existence. Par contre ils ont servi de point d'appui pour la formation des enseignants. Cela avait été, semble-t-il prévu par les auteurs : « Destinés aux enseignants, ces documents, […] serviront également de supports aux actions de formation, initiale ou continuée. » En effet, en utilisant ces

[77] Document d'accompagnement, Mathématiques, Ecole primaire, 2005, SCEREN CNDP, Paris. Disponible en ligne : http://www2.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf (consulté le 25/08/2012)

ressources il reste à la charge de l'enseignant un important travail de conception de séquences et de séances à partir des grandes idées proposées. Cela pourrait ne pas être compatible avec les contraintes du métier de professeur des écoles (polyvalence, temps de préparation, …).

Il apparaît donc intéressant de s'interroger sur des ressources intermédiaires entre les ressources de type manuel proposant des activités aux élèves et celles proposant des apports pour l'enseignant sans proposer des réalisations en classe. C'est par exemple le cas des « guides pour l'enseignant », quand ils ne proposent pas uniquement une prescription d'un déroulement de l'activité à proposer aux élèves. Mais les recherches que nous avons citées précédemment sur les usages des ressources par les enseignants (Arditi, Remillard, …) ainsi que les contraintes institutionnelles générales sur la primauté accordée à l'activité de l'élève témoignent selon nous du fait que, pour un tel guide, le seul fait d'être associé à un manuel peut amener les enseignants :

- à n'utiliser que les fiches pour les élèves sans se préoccuper des apports pour l'enseignant (Remillard 2010) ;
- ou bien à chercher à suivre au plus près les activités proposées sans que cela n'aboutisse nécessairement à une situation d'apprentissage pour les élèves si les enseignants n'ont pas les connaissances suffisantes (Arditi, 2011) ;
- ou encore à faire des adaptations, comme supprimer une question, en ajouter d'autres, etc., qui peuvent s'avérer non pertinentes si l'enseignant ne s'est pas bien approprié les enjeux (Arditi 2011).

Le travail de réflexion sur la conception et l'usage de ce type de ressources est donc à poursuivre. Les ouvrages de la collection ERMEL[78] à l'école primaire pourraient correspondre à ce type de ressource intermédiaire. Mais Perrin-Glorian (2011) pose, à leur propos, la question du niveau de précision pour le travail de l'enseignant dans la description des situations :

> « d'une part une partie théorique est supposée apporter les connaissances mathématiques (y compris didactiques) nécessaires, d'autre part, une répartition sur l'année est proposée et, surtout dans les dernières éditions, les milieux sont beaucoup plus contraints, dans le sens qu'ils laissent moins d'incertitude pour le maître et les déroulements possibles sont décrits avec plus de précision. Mais peut-on décrire les situations en encadrant totalement le travail du maître ? […] Les livres de la collection ERMEL sont très utilisés en formation des maîtres, ils ont influencé les manuels scolaires (l'un d'eux en est même directement issu) et les programmes de 2002 mais l'impact réel sur l'enseignement ordinaire reste à étudier. » (p.66)

L'intérêt d'une réflexion sur des ressources permettant à la fois l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants a déjà été pointé aux Etats-Unis par Ball et Cohen (1996) :

> « Rather than conceiving the curriculum as "something for students" and the teacher's guide as merely an instruction manual for teachers, both would have to be considered as terrain for teachers' learning. This would require learning how to design and develop written materials so as to be educative for teachers as well as students. » (p.8)

Ils proposent de voir l'enseignant comme le concepteur du « curriculum », ce qui demande selon eux de considérer différents aspects de ce travail comme la prise en compte des connaissances des élèves, la compréhension des idées centrales, la conception d'une progression dans les apprentissages et le lien avec les contraintes institutionnelles (programmes, …). Davis et Krajcik (2005) proposent alors, à la suite de Ball et Cohen, des grands principes (« High level guidelines ») pour la conception de telles ressources destinées

[78] L'équipe ERMEL, dont nous avons analysé une partie du guide de CE2, propose des ouvrages (aux éditions Hatier) de la Grande Section d'école maternelle jusqu'au CM2 de l'école élémentaire.

à l'enseignement des sciences. On y retrouve le fait de rendre visibles les choix effectués par les auteurs : la ressource doit parler aux enseignants plutôt que de chercher à guider leur action. Elle doit promouvoir leur autonomie tout en les aidant à prendre des décisions pour adapter les propositions.

Conclusion

Les enseignants de l'école primaire ont accès à de nombreux supports commerciaux de type manuels et guides pour l'enseignant associés. Ils ont un suivi varié de ces ressources qui peut dépendre en particulier de leur niveau d'enseignement ou de leur expérience professionnelle. Lors de l'utilisation d'une même ressource ils n'ont pas tous le même rapport à cette ressource (mode d'engagement) : certains lisent surtout les fiches élèves, d'autres cherchent les idées mathématiques principales ou encore un scénario guidé pour le maître, etc. Ainsi les utilisations effectives de ces ressources ne sont pas toujours compatibles avec les projets des auteurs de ces ressources. Dans le cas d'un manuel écrit par des didacticiens, les enseignants ayant une formation solide en mathématiques et/ou en didactique des mathématiques, pourraient être ceux qui arrivent à l'utiliser en préservant les enjeux prévus par les auteurs. Or, cela est loin d'être le cas de la majorité des enseignants de l'école primaire.

Du point de vue de la conception de ressources proposant des activités pour les élèves et des apports pour l'enseignant, il est alors illusoire de penser cette ressource pour en permettre le suivi pas à pas par l'enseignant : les usages seront nécessairement variés (la conception se poursuit dans l'usage) et donneront lieu à des adaptations variées (instrumentalisations) de ce qui est proposé par les auteurs. L'important semble alors de savoir ce qu'il est essentiel de chercher à préserver et de proposer des apports pour l'enseignant permettant une mise en œuvre adaptée en classe, même si les questions de diffusion de ces apports restent posées. Une place importante semble devoir être faite à la description des enjeux de savoir du fait des contraintes institutionnelles actuelles qui peuvent amener les enseignants à se centrer sur les activités proposées aux élèves sans toujours se préoccuper des savoirs qu'elles pourraient permettre de faire émerger.

De plus, la réflexion au niveau d'une situation ponctuelle ne suffit pas : les ressources actuelles ne semblent pas permettre aux enseignants de s'approprier les progressions (sur un thème donné ou plus généralement sur l'ensemble des mathématiques travaillées dans l'année). Il y a donc également une réflexion à mener lors de la diffusion de situations sur les moyens donnés aux enseignants pour s'approprier l'organisation didactique et lui permettre d'en faire des adaptations raisonnées.

Nous allons maintenant préciser notre problématique, la méthodologie générale de notre ingénierie didactique et indiquer nos premiers choix généraux pour la conception de notre ressource.

Chapitre 6

Précisions sur la problématique et la méthodologie générale

En nous appuyant sur notre étude de l'état des lieux de l'enseignement de la numération (partie I) et sur les résultats des recherches portant sur l'usage des ressources et sur les pratiques des enseignants du primaire (chapitre 5), nous allons maintenant revenir sur notre problématique liée à la conception d'une ressource sur la numération ainsi que sur la méthodologie générale de l'ingénierie. Nous terminerons par la proposition de principes généraux qui guideront la conception de la ressource.

I. Précisions sur la problématique de la thèse

La partie I de la thèse a permis de constater que notre système de numération écrit, en chiffres, est travaillé principalement sous son aspect positionnel dans les manuels du niveau étudié (3ème primaire, CE2) ainsi que dans les programmes et évaluations nationales. Pourtant la connaissance des conversions entre unités de la numération est importante dans les mathématiques de l'école primaire, puisqu'elle est notamment en jeu dans la compréhension des techniques de calcul posé des quatre opérations. Les résultats des élèves de CE2 aux évaluations que nous avons fait passer en début d'année sur les nombres à trois chiffres montrent que les élèves rencontrent des difficultés importantes dans des tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération. Au vu de notre étude de la

transposition didactique de la numération, on peut faire l'hypothèse que les résultats ne seraient pas meilleurs un peu plus tard dans l'année sur les nombres à quatre chiffres.
Nous avons également pu constater (chapitre 3) que les guides du maître associés aux manuels étudiés offrent trop peu d'aide aux enseignants pour leur permettre de prendre conscience des enjeux de savoirs ou encore que les enseignants n'utilisent pas le potentiel des guides comme il serait possible de le faire (chapitre 5). Notre revue de travaux sur les usages des ressources et les pratiques des enseignants (chapitre 5) montre toute l'importance d'une explicitation des enjeux de savoirs auprès des enseignants. Cette préoccupation qui est au cœur de notre questionnement.
Dans les travaux de recherche sur la numération que nous avons consultés nous avons trouvé peu de propositions d'enseignement de la numération de position pour les nombres à trois ou quatre chiffres[79]. En effet même si l'on peut trouver de telles propositions dans des recherches anglo-saxonnes, comme celles rappelées dans Tabor (2008), propositions qui cherchent souvent à lier l'apprentissage de la numération à celui des techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, peu de recherches, en particulier en France, proposent des situations pour l'apprentissage de la numération de position[80] (on en trouve dans des manuels écrits par des didacticiens comme Cap Maths ou ERMEL ou encore EuroMaths).
La ressource que nous cherchons à construire vise à proposer aux enseignants des situations mettant en jeu les savoirs de la numération sans chercher à remplacer ce que fait l'enseignant habituellement sur la numération mais plutôt en venant combler des manques, en apportant des compléments concernant les conversions entre unités de numération. Nous ne visons pas une ingénierie longue sur la numération mais plutôt des apports ponctuels.
Cependant en proposant un travail trop centré sur le principe décimal de la numération (c'est-à-dire sur les manques) il pourrait y avoir, en contrepartie, à plus ou moins long terme, un effet de balancier qui consisterait pour l'enseignant à donner moins d'importance au travail sur les types de tâches mettant en jeu le principe de position (comparaison, lecture/écriture …). Ce phénomène a été mis en évidence par Sierpinska (2006) comme une « loi de radicalisation » qu'elle explique ainsi :

> « La recommandation, ''ne faites pas seulement X, comme vous l'avez toujours fait ; faites aussi Y'' devient : ''il n'est pas correct de faire X, il est correct de faire Y'' » (p.34).

Il est donc nécessaire de prendre en compte les questions d'intégration du nouveau contenu proposé dans l'ancien, pour s'assurer d'une cohérence de l'organisation mathématique ainsi construite.
Pour concevoir les situations, nous nous appuyons sur la situation fondamentale (SF) construite dans la partie I. Des questions se posent sur les conditions de mise en scène de cette situation fondamentale dans l'enseignement ordinaire. Elles doivent prendre en compte des contraintes existantes. Les résultats des recherches sur les pratiques des enseignants du primaire peuvent nous y aider. En théorie des situations (Brousseau, 2000), on considère l'enseignement comme devant concilier un double processus : « l'un d'acculturation, l'autre d'adaptation indépendante ». Comment ces deux points de vue peuvent être pris en charge dans une ressource ? Comment permettre à l'enseignant d'articuler effectivement les deux processus ? En décrivant trop les savoirs, le risque est que

[79] On peut signaler l'étude d'une situation de classe ordinaire sur les grands nombres dans Blanchard-Laville (1997) mais elle concerne la lecture et l'écriture principalement.
[80] Signalons qu'une proposition d'une telle situation, s'appuyant sur la comparaison de collections, est faite dans la thèse de Mounier (2011) pour le CP, elle n'aborde donc pas la question des groupements supérieurs à la dizaine.

l'enseignant ne permette pas l'adaptation au milieu car il peut prendre toute la responsabilité, comme cela est décrit dans le cas d'un enseignant de la thèse d'Arditi (2011) par exemple[81]. Mais en ne décrivant que les situations le risque est que les enseignants n'institutionnalisent pas les savoirs en jeu, que les situations restent sans lendemain comme cela a été observé par Margolinas et Laparra (2011) et Coulange (2011).

Les résultats des recherches citées dans le chapitre précédent montrent que les usages par les enseignants d'une même ressource, dans le cas de manuels du commerce (et guides de l'enseignant associés), peuvent être très variés et dépendent fortement de leurs connaissances mathématiques et didactiques. Des questions se posent alors sur ce qu'il est essentiel que les enseignants s'approprient pour mettre en œuvre l'ingénierie proposée sans dénaturer les enjeux prévus par le chercheur. Suite aux résultats d'Arditi (2011) il apparaît important de considérer la compatibilité entre une ressource et les pratiques d'enseignement. Quelles conditions doit satisfaire la ressource pour que les enseignants, avec des pratiques variées, permettent aux élèves d'acquérir les connaissances visées ?

Enfin la conception d'une ressource destinée à des enseignants ordinaires, dont on vise une utilisation en dehors du seul cadre de la recherche, doit prendre en compte des questions d'acceptabilité par les enseignants. En effet, si l'enseignant n'accepte pas d'utiliser la ressource, les questions d'usages des enseignants et, *a fortiori*, d'apprentissage des élèves ne se posent même plus. Ainsi on peut se demander à quelles conditions les enseignants acceptent de l'investir. Pour cela, il faut prendre en compte le point de vue de l'enseignant : à quels besoins permet-elle de répondre ? Quelles sont ses attentes pour une ressource sur la numération ? Comment concilier les attentes avec les objectifs du chercheur ?

Voici donc les questions qui constituent la problématique de la thèse. Nous les séparons en questions sur la conception de situations et en questions sur leur diffusion dans une ressource pour les enseignants ordinaires :

- Quelle suite de situations (à usage didactique) utilisables dans l'enseignement ordinaire peut-on construire pour amener les élèves à donner à l'écriture des chiffres une signification articulant les deux principes de la numération ? Les situations construites permettent-elles bien l'émergence des connaissances prévues chez les élèves et leur conversion en savoirs de numération ? Permettent-elles de dépasser les difficultés rencontrées par les élèves dans certaines tâches mettant en jeu le principe décimal ?
- Quels sont les éléments fondamentaux à diffuser aux enseignants pour permettre une gestion adaptée des situations et l'institutionnalisation des savoirs en jeu ? Y a-t-il certaines résistances de la part des enseignants ? Quelles peuvent en être les origines (contraintes institutionnelles, du métier, pratiques, …) ? Quelles conditions pour que les enseignants acceptent d'investir la ressource construite ?

La ressource construite dans le cadre de cette recherche pour avancer sur les questions posées aura également vocation à être diffusée dans l'enseignement ordinaire. Elle pourra donc elle-même constituer un résultat de recherche si cette diffusion est possible.

[81] Voici ce qu'en dit Arditi (2011) :
« La dernière enseignante réalise la tâche prescrite par le manuel sans trop s'en éloigner. Elle contrôle la réalisation de façon très précise et propose une situation d'apprentissage à ses élèves même si ce n'est pas exactement celle prévue par le manuel. Cependant, probablement en lien avec l'idée de contrôler la réalisation de la tâche prescrite aux élèves, cette enseignante ne leur laisse que très peu de responsabilités. Ils parlent très peu et dans ces conditions il est difficile de présager de leurs apprentissages potentiels » (p.338).

Pour étudier ces questions nous nous appuierons sur la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue 1990, 2002, 2011), mais adaptée au cas du développement de ressources pour l'enseignement ordinaire (Perrin-Glorian 2011).

II. L'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource

Nos questions liées à la conception d'une ressource pour l'enseignement nous amènent à nous situer du côté de la recherche développement. On peut trouver différentes définitions (van den Akker 1999)[82], mais nous retenons celle proposée par Loiselle et Harvey (2008) :

> « Les diverses formes de recherche scientifique poursuivent des finalités multiples. Thom (1982)[83] distingue deux pôles pouvant caractériser l'activité scientifique. Un de ces pôles vise la compréhension des phénomènes, l'autre pôle vise l'action. Pour cet auteur, l'activité scientifique se situe sur un continuum entre ces deux pôles. Les recherches orientées vers l'action visent principalement à résoudre des problèmes locaux alors que les recherches orientées vers la compréhension des phénomènes cherchent à dégager des conclusions plus universelles. […] La recherche développement se situe principalement vers le pôle de l'action : elle a pour objectif premier de développer des outils matériels ou conceptuels utiles pour agir sur une situation locale donnée. Le pôle de la compréhension n'est toutefois pas absent d'une telle démarche. Dans l'optique que nous proposons, l'expérience de développement devra faire l'objet d'une analyse qui assure une meilleure compréhension de la dynamique entre l'objet développé, le contexte d'application et les perceptions des acteurs dans leur expérience d'utilisation de l'objet. Les questions de recherche formulées dans une recherche développement devraient donc refléter ces deux types de finalité » (p.45-46).

Selon van den Akker (1999) ou Burkhardt et Schoenfeld (2003) la recherche en éducation ne mène pas souvent à des avancées directement utiles aux praticiens. Elle a d'ailleurs assez peu de crédibilité pour la résolution des problèmes qui se posent « sur le terrain » : les enseignants se tournent rarement vers la recherche lorsqu'ils rencontrent de tels problèmes : « le développement par la recherche d'outils et de processus pour l'utilisation par des praticiens, courante dans d'autres domaines, est en grande partie manquante en éducation » (Burkhardt & Schoenfeld, 2003).

Dans le paradigme de la recherche en didactique des mathématiques en France, l'ingénierie didactique (Artigue 1990, 2002, 2011) apparaît comme une méthodologie privilégiée pour s'engager dans ce type de recherche, notamment lorsqu'il s'agit de concevoir des situations. C'est, en effet, une méthodologie

> « basée sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement […] dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. » (Artigue 1990 p.286).

Cependant comme le rappellent Margolinas et *al.* (2007) les « ingénieries [que Brousseau] a développées ne sont ni transposables ni destinées à être transposées dans les classes ordinaires » (ce qu'il dit aussi lui-même). Leur objectif est de « comprendre certaines

---

[82] On trouve également diverses appellations : *Design* studies, *Design* experiments, *Design*/*Design-based* research, *Development*/*Developmental* research, *Engineering* research, etc.

[83] Thom R. (1982) Mathématique et théorisation scientifique. Dans F. Guénard et G. Lelièvre (Éds.), *Penser les mathématiques* (p. 252-273). Paris : Éditions du Seuil.

conditions de possibilité ou d'existence de situations didactiques » (*id.*). L'appui sur l'enseignement (expérimentations) ne vise donc pas l'amélioration de la pratique mais le développement de savoirs pour la recherche fondamentale en didactique. Ces chercheurs mettent alors en garde contre une conception « classique » des liens entre recherche, ingénierie didactique, développement et enseignement, qui pourraient être vus uniquement dans une perspective descendante (recherche → ingénierie → développement → enseignement). Ils proposent alors de questionner plutôt les « relations entre ces deux pôles : recherche fondamentale/ingénierie d'une part, enseignement/développement, de l'autre ». En effet les difficultés de diffusion des ingénieries didactiques dans l'enseignement ordinaire témoignent de la naïveté du modèle « classique ». Selon Perrin-Glorian (2011) ces difficultés ont

> « fait apparaître la nécessité d'étudier de plus près le fonctionnement de l'enseignement ordinaire du point de vue des contraintes institutionnelles (y compris sociales) cadrant l'exercice du métier d'enseignant et de la conduite de la classe » (p.64).

Nous avons repris, au chapitre précédent, des résultats obtenus dans ce type de recherche pour le cas de l'école primaire. Ils sont bien sûr un point d'appui pour la conception de ressources pour les enseignants ordinaires.
Mais la question de la diffusion des ingénieries à l'enseignement ordinaire reste posée : elle est un des deux défis pointés par Artigue, lors de l'école d'été de didactique des mathématiques de 2009 (Artigue 2011, Perrin-Glorian 2011). Elle explique l'intérêt pour la recherche en didactique des mathématiques, comme le proposait déjà Chevallard en 1982, de « poser le problème de l'action et des <u>moyens</u> de l'action, sur le système d'enseignement » (p.18), ce qui

> « requiert de questionner les visions de la transmission et de la diffusion qui pèsent sur le discours didactique et les pratiques, pour pouvoir penser de nouveaux rapports entre chercheurs et praticiens, concepteurs et usagers » (Artigue 2011, p.24).

L'ingénierie didactique peut-elle permettre à la fois des avancées sur des questions de recherche tout en permettant la diffusion de ces résultats dans l'enseignement ordinaire ? Selon Perrin-Glorian (2011),

> « le problème n'est plus seulement celui du contrôle et de la mise en œuvre des principes théoriques qui guident l'ingénierie didactique. C'est aussi celui des possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans les conditions ordinaires de fonctionnement de l'enseignement avec la double perspective de l'étude de la robustesse d'une suite de situations et de la formation des enseignants » (id, p.57).

Elle propose une « ingénierie didactique pour le développement et la formation » (*IDD*) permettant de questionner la diffusion, dans l'enseignement ordinaire, d'une ingénierie didactique « pour la recherche » (*IDR*). Cela consiste en « plusieurs niveaux d'ingénierie (au moins deux mais peut-être plus) avec des objectifs différents », qui ne sont pas des niveaux chronologiques mais des niveaux de questionnement différents :

> - premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques « protégées » pour tester la validité théorique des situations (i.e. leur capacité à produire les connaissances attendues, on vise au moins un théorème d'existence) et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie : qu'est-ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé, qu'est-ce qui relève du contexte choisi et pourrait être changé, adapté, ce qui relève du détail en somme ?
>
> - deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations

> opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...). Sur quoi peut-on lâcher du lest dans la négociation ? Que va-t-on essayer de sauvegarder ? Pourquoi ? Comment exercer un contrôle sur ce qui peut se passer ? (id, p.68)

Ainsi l'ingénierie didactique (de développement) apparaît comme une « interface » entre recherche et enseignement. Comme l'explique Perrin-Glorian (2011), ce type de recherche vise le développement de ressources pour les enseignants tout en permettant d'accroître les connaissances pour la recherche fondamentale sur la transposition didactique de la notion mathématique étudiée :

> « En effet, la négociation d'une ingénierie didactique avec des enseignants qui n'ont pas contribué à sa production est un moyen à la fois d'étudier la manière dont ils abordent habituellement le contenu concerné, de repérer des besoins de la formation, des savoirs manquant à la profession, de continuer l'étude de la transposition didactique de ce contenu et de repérer des phénomènes didactiques plus généraux » (p.64-65).

Mais ces ingénieries doivent aussi permettre d'avancer sur les questions de diffusion de situations à des enseignants ordinaires (2ème niveau d'ingénierie). La ressource devient donc un objet d'étude, alors que dans les ingénieries didactiques pour la recherche sur un contenu mathématique donné, les produits de l'ingénierie ne sont pas questionnés en tant que ressources pour les enseignants.
Nous allons maintenant expliquer comment nous nous appuyons sur ces principes généraux pour concevoir notre propre méthodologie d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource pour l'enseignement de la numération au CE2.

III. Description de notre méthodologie générale

Entre la variété des approches pour la recherche-développement en « éducation », Van den Akker (1999) a mis en évidence des points communs qui peuvent apparaître comme des points d'appui importants dans une méthodologie de recherche-développement :

- choix d'un problème qui se pose dans la pratique (et pas d'une question théorique de recherche) avec un affinement progressif de ce problème au fur et à mesure des allers-retours dans les classes ;
- nécessité de liens avec les praticiens (enseignants) pour mettre à l'épreuve le produit ;
- présence de cycles de développement, d'allers-retours entre les phases de conception du produit et les phases de mise à l'épreuve de la pratique. La question de l'évaluation apparaît comme cruciale pour étudier les choix effectués dans la conception ;
- détermination de principes de développement qui peuvent se dégager du travail effectué même si les « résultats » obtenus peuvent se limiter au contexte de leur obtention. Il semble difficile d'obtenir des généralisations dans ce type de recherche.

Nous pouvons ajouter à cela l'importance d'un point d'appui théorique qui pour nous est constitué par l'OM de référence et la situation fondamentale.
Nous allons revenir sur ces différents points et expliquer comment nous les utilisons dans le contexte de notre recherche.

III.1 Les grands principes méthodologiques

Le problème de départ

Il est courant dans la recherche-développement de partir d'un problème qui se pose dans la pratique (et pas d'une question théorique de recherche). Notre méthodologie ne consiste pas à chercher un problème qui se pose aux praticiens à partir de ce qu'ils pourraient nous en dire mais à partir d'une difficulté d'enseignement et d'apprentissage repérée par la recherche : un déficit semble exister dans l'enseignement actuel concernant l'aspect décimal de la numération, déficit qui pourrait expliquer les difficultés résistantes des élèves.
Ce problème émerge donc de l'étude faite dans la première partie (qui s'appuie entre autres sur des analyses de manuels, de déroulements en classe, d'évaluations d'élèves …). Le travail avec les enseignants au cours de l'ingénierie peut permettre à la fois de préciser l'étude de la transposition didactique et de faire émerger des problèmes qui se posent aux praticiens, en lien avec d'autres aspects non perçus dans la première étude. Il faut essayer de concilier les deux points de vue, celui du chercheur et celui de l'enseignant.

Des points d'appui théoriques sur la numération

Nous nous appuyons sur la construction théorique présentée dans le chapitre 1 qui met en évidence la numération en unités comme un ostensif essentiel.
La recherche de la situation fondamentale de la numération a montré des mises en fonctionnement des savoirs de numération sur lesquels nous allons nous appuyer pour concevoir un *canevas didactique*[84]. Nous allons donc essayer de réaliser une « importation » (Bloch, 2005) de la SF dans l'enseignement ordinaire du CE2, c'est-a-dire de décliner la situation fondamentale en une suite de situations à « mettre en scène » dans les classes (Bessot, 2011). En retour, ce travail théorique peut aussi être enrichi par l'expérimentation.
Bloch (2005) précise que cette mise en scène n'est pas unique (tout comme une SF d'un savoir n'est pas unique) et que les choix dépendent « des priorités en matière de connaissances visées, de savoirs à institutionnaliser, et des contraintes des niveaux institutionnels où l'importation est envisagée ». Notre étude de l'enseignement actuel de la numération au CE2 (Partie I) est donc un point d'appui important pour les choix de mise en scène de la SF.
Enfin, Bloch signale que dans cette mise en scène la question de « l'a-didacticité inhérente à la situation fondamentale – puisque celle-ci est une construction entièrement épistémologique – ne pourra parfois être conservée que partiellement » (p.54).

[84] Voici comment est définie la notion de *canevas*, dans le domaine du théâtre, dans Wikipedia http://fr.wikipedia.org/wiki/Canevas_(th%C3%A9%C3%A2tre) (consulté le 22/10/2012) :
« Le canevas est un synopsis général schématisant les lignes principales du scénario. Habituellement mémorisé, souvent consigné par écrit (mais pas toujours), le canevas précise nettement chacune des phases narratives du déroulement du spectacle sans entrer dans le détail méticuleux du jeu, des déplacements des acteurs ou du contenu textuel des répliques. Tout en suivant les étapes du canevas, les acteurs sont donc chargés d'en meubler l'action par leur jeu effectif, par leur texte semi-improvisé et par les lazzis. Le jeu varie donc à chaque représentation tandis que le canevas demeure stable. »

Un processus cyclique

Nous prévoyons une méthodologie par cycles. Il est en effet essentiel de réaliser des allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique pour les deux niveaux de l'ingénierie. Au premier niveau, cela passe par :

> « des contrôles de pertinence et de consistance, et donc un choix de variables, de valeurs de ces variables, et une analyse de consistance a posteriori, de telle sorte qu'on soit sûr d'avoir approché le concept mathématique visé » (Bloch, p.59).

Au deuxième niveau cela doit permettre de déterminer des conditions pour que la ressource soit adaptée à une utilisation par des enseignants ordinaires. Il est également nécessaire de travailler avec plusieurs enseignants pour pouvoir comparer les usages de la ressource dans différents contextes[85].

La collaboration entre chercheur et enseignants

Nous pouvons nous appuyer sur l'expérience acquise, dans cette collaboration entre chercheurs et enseignants, par Brousseau et son équipe avec le dispositif du COREM[86] (Brousseau 2008). Selon Brousseau,

> « Organiser des observations conduit à fondre dans un même système, deux sous-systèmes aux buts et aux moyens très différents, parfois opposés ou contradictoires : le dispositif d'enseignement et le dispositif d'observation de l'enseignement. Le meilleur appariement sera celui qui permettra le meilleur fonctionnement autonome de chacun des deux sous-systèmes, avec seulement les interactions nécessaires à l'observation » (p.6).

Ainsi nous définissons clairement un contrat d'expérimentation avec les enseignants pour répartir les responsabilités entre enseignant et chercheur. Il sera, en particulier, précisé que c'est le fonctionnement de la classe qui prime sur la recherche.
L'observation dans des classes ordinaires, en dehors de tout dispositif de recherche comme le COREM, amène à prendre en compte d'autres aspects de la collaboration entre chercheur et enseignants. Il faut, par exemple, trouver des enseignants volontaires pour participer à l'expérimentation. Le fait de proposer aux enseignants une ressource favorise ce volontariat car cela est ressenti comme une véritable collaboration. Il faut tenir compte de certaines

---

[85] Voici ce qu'en dit Akker (1999) :

> "Interaction with practitioners is needed to gradually clarify both the problem at stake and the characteristics of its potential solution. An iterative process of 'successive approximation' or 'evolutionary prototyping' of the 'ideal' intervention is desirable. Direct application of theory is not sufficient to solve those complicated problems. […] Another reason for cooperation is that without involvement of practitioners it is impossible to gain clear insight in potential implementation problems and to generate measures to reduce those problems. New interventions, however imaginative their design, require continuous anticipation at implementation issues. Not only for 'social' reasons (to build commitment and ownership of users) but also for 'technical' benefits: to improve their fitness for survival in real life contexts. Therefore, rigorous testing of practicality is a *conditio sine qua non* in development research."

[86] COREM : Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques. Ce centre fonctionnait selon certains principes : « une institution spécifique, la séparation des fonctions, la priorité à l'enseignement, la limitation des influences réciproques des observateurs et des observés, la segmentation des tâches et la coopération, la neutralité pédagogique, l'équilibre des pouvoirs, la limitation et la banalisation des rapports avec l'environnement etc. »

contraintes des enseignants, en particulier celle du temps : temps de préparation, temps à passer sur ce chapitre, temps pour les entretiens individuels … De plus, les enseignants du COREM ont une formation mathématique et didactique (ils sont donc familiarisés avec les concepts théoriques de la TSD) et participent à des observations de leurs collègues, travaillent en équipe (3 enseignants pour 2 classes), etc. Cela n'est pas le cas des enseignants avec qui nous travaillons : nous travaillons avec des enseignants de CE2 qui sont dans des conditions tout à fait ordinaires, sans aucune formation ou responsabilité particulière en mathématiques. En effet, l'étude d'Arditi (2011) sur les usages des manuels montre que ces enseignants s'approprient moins facilement les enjeux des activités proposées. Les questions de diffusion se posent donc davantage pour eux. Pour ne pas provoquer d'interférences avec les questions spécifiques liées aux pratiques des enseignants débutants, nous choisissons de travailler avec des enseignants non débutants c'est-à-dire ayant au moins cinq années d'expérience.
Nous allons maintenant passer à la méthodologie d'étude des usages de la ressource.

III.2 L'analyse des usages de la ressource par les enseignants

Les échelles prises en compte pour la conception et l'analyse

Aux niveaux d'organisation mathématique ponctuelle et locale (Chevallard 1999), nous associons les niveaux de situation didactique et de séquence. Les mots *situation* et *séquence* peuvent donner lieux à deux interprétations différentes : comme objet destiné à être mis en œuvre en classe (à usage didactique) ou bien comme sa réalisation effective en classe[87]. C'est ce qu'explique Brousseau (2000) pour le terme de situation didactique :

> « Le terme "situation didactique", a de fait aujourd'hui au moins deux sens :
>
> i) Au sens classique c'est *une situation à usage didactique, qui sert à enseigner*, (comme un problème ou un exercice), que cette situation soit douée de vertus didactiques autonomes ou que le professeur soit obligé d'intervenir pour qu'elle produise son effet ;
>
> ii) C'est *une situation qui décrit l'environnement didactique d'un élève*, elle comprend tout ce qui concourt à lui enseigner intentionnellement quelque chose. En ce sens elle comprend l'enseignant, qu'il se manifeste ou non pendant le déroulement de la situation » (p.15).

Nous utiliserons ces deux sens. Le premier dans le cadre du travail sur la situation telle qu'elle sera proposée dans la ressource (donc pour l'analyse *a priori*) et le second quand il s'agira de décrire la situation effectivement mise en œuvre dans la classe. Si nécessaire nous préciserons *situation à usage didactique* pour le premier cas et *situation didactique* pour le deuxième.
Il en est de même pour le terme *séquence* qui peut désigner à la fois une séquence proposée dans une ressource, donc à usage didactique ou bien la réalisation effective d'une suite de situations par un enseignant avec ses élèves. Cependant, nous parlerons de séquence uniquement dans le deuxième cas. Dans le premier nous préférons utiliser le terme de *canevas didactique*. Nous considérons que la ressource propose une suite de situations qui s'enchaînent selon un certain canevas, à partir duquel l'enseignant construit une séquence et la met en œuvre dans sa classe.

[87] De même *ingénierie didactique* fait souvent référence à la fois à la méthodologie de recherche et à sa réalisation en classe, voire au produit de l'ingénierie lui-même : curriculum, ensemble de situations etc.

Nous avons limité nos interventions à quelques séances, qui correspondent à une grande partie du chapitre « numération » des manuels de CE2 (nous avons exclu le travail sur l'ordre des nombres). Ainsi les questions d'articulation avec d'autres domaines et plus généralement d'organisation d'une programmation annuelle seront peu présentes dans notre travail. Ce sont plutôt des questions d'intégration des situations proposées dans ce que font habituellement les enseignants qui vont se poser. Ce travail peut toutefois avoir des effets sur l'enseignement d'autres thèmes comme celui du calcul ou des grandeurs du système métriques mais nous ne nous donnerons pas les moyens de les étudier (pour limiter notre champ d'étude).

Les niveaux d'activité de l'enseignant, les analyses a priori*,* a posteriori

Ces niveaux d'organisations didactiques (situation et séquence) se retrouvent dans les niveaux d'activité de l'enseignant de Margolinas (2002) déjà évoqués au chapitre 4. Nous ne prenons donc pas en compte le niveau de projet global (sans nous interdire de l'évoquer si besoin).
A la différence de la première partie, nous considérons maintenant ce modèle en lien avec l'usage d'une ressource proposée aux enseignants. En effet, ce que nous souhaitons étudier ce sont les adaptations, les modifications faites par l'enseignant à partir de cette ressource, c'est-à-dire son usage. Ainsi nous nous intéressons aux *pratiques* des enseignants à travers leurs *usages* de la ressource.
Ainsi le projet de l'enseignant pour la séance peut être approché en étudiant, à partir de la situation proposée dans la ressource (et son analyse *a priori*), le problème qu'il pose à ses élèves, son choix de variable didactique et de milieu. Cela doit permettre de retrouver l'enjeu tel qu'il est redéfini par l'enseignant (ce qu'il nous dit en entretien peut venir compléter utilement cette analyse). Il s'agit donc d'une reconstruction à partir de l'observation de la mise en œuvre dans la classe pour les enseignants que nous observerons (nous choisissons de travailler avec des enseignants que nous irons observer en classe pour certains et non pour d'autres).
Il y a donc deux analyses *a priori* : celle de la situation proposée dans la ressource, pour laquelle on essaie de tenir compte des différents usages possibles et celle du problème effectivement proposé par l'enseignant. La comparaison de ces deux analyses *a priori* permet de mettre en évidence les adaptations réalisées par les enseignants à partir de ce qui est proposé dans la ressource.
Pour le niveau didactique, l'analyse du déroulement effectif en classe (analyse *a posteriori*) prend appui sur la situation redéfinie par l'enseignant et permet de mettre en évidence les choix réalisés par les enseignants pour la dévolution et la régulation de la situation ainsi que l'institutionnalisation des savoirs en jeu.
Nous étudions les situations selon les trois dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation. Les situations proposées sont en général des situations d'action. Mais il peut y avoir un enjeu de formulation et/ou de validation. L'enseignant peut alors organiser des *phases*[88] de formulation et/ou de validation (Margolinas 1993). On peut se demander si la donnée d'une situation d'action suffit à l'enseignant pour organiser de telles phases

[88] Selon Margolinas (1993) : « Quand nous parlons de *situation (a-didactique) de formulation*, il s'agit de situations dans lesquelles le milieu (a-didactique) a été organisé de façon à contraindre l'élève à faire fonctionner sa connaissance pour produire des formulations. […] Quand nous parlons de *phase de formulation*, il s'agit d'un moment dans lequel sont effectivement advenues des formulations d'une connaissance en jeu dans l'interaction didactique. […] Des phases de formulation peuvent surgir dans la réalisation de situations d'action » (p.77-78). Il en est de même pour la distinction entre *situation de validation* et *phase de validation*.

lorsqu'elles sont utiles au processus ? Sur quels éléments du milieu/contrat s'appuie-t-il pour cela ? Les analyses *a posteriori* des situations doivent permettre de déterminer s'il y a bien eu un enjeu de formulation et/ou de validation à certains moments de la séance.
Enfin, concernant le projet des enseignants pour la séquence, nous en faisons une reconstruction *a posteriori* à partir de nos observations et des entretiens avec les enseignants. Il s'agit d'une étude plus sommaire dont l'objectif est de mettre en évidence l'OM construite (au moins pour les types de tâches proposés), les situations de la ressource utilisées et les ajouts d'exercices, d'évaluation, de traces écrites … effectués par les enseignants à partir du canevas didactique proposé.

Etude des éléments des situations à décrire dans la ressource

Il est prévisible que les mises en œuvre des situations proposées dans la ressource seront variées puisque les enseignants se les approprient en fonction de leurs connaissances, de leur contexte d'exercice, etc. Ce qui nous intéresse est de savoir ce qu'il faut proposer aux enseignants dans la ressource pour leur permettre, malgré tout, d'avoir une mise en œuvre préservant les enjeux prévus initialement. La question qui se pose alors n'est plus seulement celle de la consistance des situations elles-mêmes (qui concerne le premier niveau d'IDD) mais de la détermination de conditions pour que les situations proposées soient compatibles avec des pratiques différentes d'enseignement.
Cette question peut être approchée avec la notion de *robustesse* d'une situation définie par Assude (*in* Mercier et *al.*, 2011) « par la « stabilité » des enjeux de savoir lors de sa mise en œuvre (à l'épreuve) dans des contextes très différents et avec des acteurs très divers ». Ainsi une « situation est robuste si elle résiste aux « perturbations » ».
Cependant, notre questionnement sur la diffusion des situations au deuxième niveau d'ingénierie nous amène à poser le problème différemment. Même si c'est bien la robustesse qui est visée *in fine*, ce qui est essentiel dans notre travail est de déterminer les éléments des situations qui peuvent permettre d'obtenir cette robustesse, car ce sont ces éléments qui seront centraux dans la diffusion de la situation aux enseignants. Voici comment Hersant (2011[89]) explique cela : il s'agit, pour ce deuxième niveau, d'identifier

> « les éléments des situations qui garantissent leur robustesse par rapport au savoir (quelles sont les variables qui doivent faire l'objet d'un contrôle serré de la part du chercheur ?) sans pour autant obliger l'enseignant à observer scrupuleusement le déroulement d'une situation (quelles sont les variables dont la détermination peut, et doit, être laissée à la charge de l'enseignant ?). Nous nommerons *déterminants* ces variables de la situation qui garantissent sa robustesse et permettent une « migration réussie » vers les classes ordinaires ; ces déterminants correspondent en quelque sorte aux conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation.

Le terme *déterminant* pourrait laisser penser que la réalisation du déterminant seul permette d'atteindre les enjeux visés[90]. Nous préférons utiliser l'expression *condition essentielle* (qui n'est pas une condition suffisante).
Elle distingue des conditions sur le problème et des conditions sur la situation :

[89] Dans le TD associé au cours de Perrin-Glorian (2011) sur l'ingénierie didactique de développement (école d'été de didactique des mathématiques de 2009).
[90] C'est d'ailleurs ce que Hersant (2011) dit ici : « il est certainement plus juste de dire qu'un déterminant est une condition qui contribue à préserver l'essence d'une situation car la réalisation d'une condition ne peut garantir cela. »

> « Quand nous disons que les déterminants d'une situation sont des conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation, cela sous-entend que certaines de ces conditions sont à tenir au cours du déroulement de la situation. C'est pourquoi, aux conditions initiales de la situation liées en particulier aux choix des variables du problème il faut ajouter des conditions associées au déroulement de la situation. »

Cependant Hersant ne s'est intéressée qu'aux conditions pour le processus de dévolution et elle pose la question de l'existence de déterminants associés également au processus d'institutionnalisation. D'ailleurs le texte du savoir proposé dans la ressource fait aussi l'objet d'un questionnement dans le cadre des questions liées à la ressource. Il constitue une aide pour l'enseignant pour l'institutionnalisation. Mais là aussi il faut distinguer, pour le processus d'institutionnalisation, les conditions sur le texte du savoir et les conditions sur le déroulement de la situation.
Ces questions sont aussi liées à celles de l'ergonomie de la ressource.

Etude de l'ergonomie de la ressource

Nous nous appuyons sur les concepts d'*utilisabilité* et d'*acceptabilité* (voir chapitre 5). L'objectif de développement d'une ressource dans l'enseignement ordinaire nous amène aussi à prendre en compte la façon dont les enseignants peuvent percevoir la ressource et du coup accepter, ou non, de l'utiliser en dehors du cadre d'une recherche. Cette perspective est en général absente des travaux de recherche en didactique des mathématiques (exception faite du travail de Georget 2010). Nous nous appuierons alors sur le concept d'*acceptabilité* (voir chapitre 5). Selon Tricot et *al.* (*id.*) l'acceptabilité conditionnerait la décision d'utilisation de la ressource. C'est bien en cela qu'elle est une dimension essentielle de notre questionnement. En appui sur Tricot et *al.* (*id.,* p.394) on peut préciser différents aspects de l'acceptabilité en les adaptant au cas d'une ressource pour les enseignants. L'acceptabilité est alors considérée en termes d'adéquation aux :

- besoins ou objectifs de l'institution, en particulier à travers la compatibilité avec les programmes officiels. Notre étude préalable permet de prévoir cette compatibilité mais elle sera aussi confrontée à la façon dont les enseignants la perçoivent ;
- attentes des enseignants mais aussi des élèves telles qu'elles perçues sont par les enseignants ou effectivement observées dans la classe.

Elle est aussi considérée en termes de compatibilité avec l'organisation du temps (pour les séances, la séquence entière) et l'organisation de la classe (contraintes matérielles et de gestion du groupe).
Nous ne faisons pas une étude approfondie de ces questions, nous les utilisons simplement pour nous efforcer d'avoir une ressource utilisable et acceptée par les enseignants. Nous assumons donc notre vision « naïve » de l'ergonomie. Cela nous amène à faire une étude empirique. Ainsi, pour analyser l'utilisabilité et l'acceptabilité de la ressource, nous nous appuyons principalement sur des entretiens avec les enseignants. A partir de la comparaison de ces entretiens, nous essayons de mettre en évidence les conditions sur la ressource permettant d'être mieux utilisable et acceptée.
Mais les enseignants que nous observons en classe peuvent se sentir tenus d'utiliser davantage la ressource que s'ils avaient été en dehors de l'expérimentation. Ainsi, les enseignants qui utilisent la ressource sont répartis en deux groupes :

- un groupe « de travail » pour lequel nous observons les enseignants lors de la mise en œuvre de quelques séances dans leur classe. Ce groupe participe aussi à la conception de la ressource lors de deux réunions de travail collaboratif.

- un groupe « libre » pour lequel nous n'intervenons pas du tout au cours de leur utilisation de la ressource.

Pour les enseignants de ces deux groupes nous réalisons des entretiens individuels avant et après la séquence. Nous faisons aussi passer les deux évaluations (avant et après la séquence) aux élèves des deux groupes, ce qui permet d'avoir un échantillon plus important.
Cependant avant de s'engager dans cet important travail expérimental nous avons besoin de nous assurer d'un minimum :

- de consistance des situations : la mise en œuvre des situations dans la classe permet-elle aux élèves au moins d'apprendre aussi bien la numération que si l'enseignant suivait ses ressources usuelles ?
- d'utilisabilité et d'acceptabilité des situations et de la ressource en général, pour les enseignants : un enseignant peut-il et accepte-il de s'emparer de cette ressource pour mettre en œuvre une séquence sur la numération ?

Pour cela nous avons construit une pré-expérimentation avec un nombre restreint d'enseignants (seulement deux et avec une modification de la ressource entre les deux utilisations), qui a servi à mettre en place une ressource et des situations proposées ensuite aux enseignants de la première expérimentation. Cette pré-expérimentation ne comporte pas tous les éléments de méthodologie présentés ici. Elle sera décrite dans le chapitre 7.
Nous allons, avant cela, préciser quelques choix généraux pour la conception de notre ressource.

IV. Principes généraux pour la conception de notre ressource

Pour le contenu

<u>La théorie mathématique</u> qui guide l'ingénierie est celle proposée en partie I s'appuyant sur les unités de numération pour décrire les savoirs de la numération et le lien entre numération parlée et numération écrite. L'appui sur les connaissances des élèves pour les nombres à 3 chiffres en est un des principes de base. Mais notre étude des connaissances des élèves sur les nombres à 3 chiffres nous questionne sur la disponibilité de ces connaissances pour les élèves.
Nous choisissons d'utiliser de manière privilégiée les unités de numération plutôt que les écritures chiffrées des puissances de dix (EPD) car ces dernières peuvent amener à utiliser des techniques de calcul qui rendent invisibles les conversions entre unités de la numération.
Pour la <u>mise en scène de la situation fondamentale</u>, un premier choix concerne la chronogenèse : nous commençons par mettre en scène les jeux de la SF où une écriture chiffrée est à produire à partir d'une collection ou d'une description de sa quantité en unités de numération (jeux 1 et 1') avant la mise en scène de la situation inverse où l'on part de l'EC pour produire une EUN (jeu 4 : la collection n'est plus qu'évoquée, c'est sa quantité qui est décrite en EUN). Ce choix présente l'intérêt de permettre de constituer un matériel de référence lors du dénombrement d'une première collection en vrac, matériel dont on peut penser *a priori* que les enseignants ne le possèdent pas car cela n'est ni utilisé ni même mentionné dans les manuels étudiés. Cela permet également de mettre en jeu, dès le début du canevas didactique, les trois conditions de la technique de position en lien avec le

dénombrement et donc d'amener la nécessité de la prise en compte de la position des unités dans l'EC, du chiffre 0 et des conversions entre unités. De plus, lors de la situation de production d'une collection (ou d'une EUN) à partir d'une EC, se pose le problème de la vérification de la quantité de la collection ou des écritures produites (par exemple 31c 5u). Nous faisons l'hypothèse que le travail sur le dénombrement peut être réinvesti pour ces vérifications, ce qui permet aux élèves d'utiliser à nouveau les conversions entre unités (31c 5u = 3m 1c 5u = 3 105).

Pour la première situation, nous parlons de *dénombrement* d'une collection même s'il s'agit d'un dénombrement particulier puisque dans un dénombrement d'autres désignations de la quantité peuvent convenir. Pour cette situation de dénombrement nous jouons sur certaines variables didactiques (ordre des unités, absence d'unités, nombre d'unités à chaque ordre) afin de mettre en jeu les deux principes de la numération. Nous choisissons de commencer par faire dénombrer une collection matérielle (constituée d'allumettes sans tête) pour faire faire des groupements successifs par dix et constituer un matériel de référence comme dans la situation des « fourmillions » (ERMEL CE1[91], 1993 ou Destouesse[92], 1996). Ainsi, dans maintes occasions l'enseignant pourra se référer à cette expérience qui devrait marquer les élèves[93]. Les groupements effectués permettront de toujours laisser visibles les groupements de rangs inférieurs (élastiques, sachets transparents, …). Ces groupements seront nommés avec les unités de numération pour amorcer une décontextualisation des connaissances.

Dans une deuxième partie du canevas didactique nous proposons une situation de traduction d'écriture qui doit permettre de produire des décompositions variées d'un même nombre. On peut également trouver ce genre de problème dans des manuels[94]. Les connaissances construites dans la situation de dénombrement pourront être mobilisées par les élèves pour vérifier les décompositions.

D'autres problèmes mettant en jeu ces connaissances dans d'autres contextes seront aussi proposés afin de permettre la décontextualisation des connaissances.

Pour la ressource

De par le caractère local de l'organisation mathématique proposée, la ressource ne peut être utilisée que ponctuellement par l'enseignant et apparaît donc comme une ressource complémentaire aux ressources qu'il utilise déjà. Cela implique de faire des choix de conception qui permettent une intégration aisée dans le système documentaire de l'enseignant, choix liés au contenu (mise en scène de la SF tenant compte de la transposition didactique de la numération au CE2) mais aussi à la ressource elle-même. Concernant ce dernier aspect, nous partons de principes généraux de conception pour la ressource que nous allons expliciter maintenant et qui seront à questionner et à préciser au fur et à mesure de l'ingénierie.

---

91 Hatier, 1993, p.316

92 Revue *Grand N, n°* 59, 1996, p.11-17

93 DeBlois (1995), dans un travail avec une élève en difficulté d'apprentissage en numération, montre que le matériel peut joue un rôle important pour « ''voir'' l'invariance de la quantité par rapport à son organisation » et faciliter « la mise en correspondance entre les chiffres d'un nombre et les unités de mesure de quantité (unités, dizaines, centaines, unités de mille) ».

94 Par exemple dans Cap Maths CE2 (Hatier) pour les nombres à 3 chiffres.

Une ressource à destination de l'enseignant

Nous évitons les activités toutes faites à donner directement aux élèves (comme dans un manuel du commerce) mais nous proposons plutôt une description de situations pour l'enseignant, charge à lui de concevoir sa séance (et sa séquence) et de construire éventuellement des fiches d'activités pour les élèves. La ressource s'adresse ainsi à l'enseignant et non directement aux élèves. Les expérimentations doivent permettre de s'assurer de la viabilité de ce choix en tenant compte des contraintes des enseignants (de temps de préparation principalement).

Une description de situations et d'enjeux de savoirs

Nous proposons dans la ressource des situations à usage didactique pour lesquels nous décrivons les éléments qui nous semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée par l'enseignant. Mais il est nécessaire que celui-ci s'approprie l'enjeu des situations proposées. La description du déroulement ou d'une fiche pour les élèves pourrait ne pas suffire pour beaucoup d'enseignants (si leurs connaissances mathématiques et didactiques ne sont pas suffisantes). La description des enjeux des situations sera donc mise en avant dans cette ressource. Elle intervient à deux niveaux : de manière générale, ce qu'il est important de savoir du point de vue mathématique, didactique et épistémologique, en lien avec chacune des situations proposées. Cette description fine des savoirs en jeu (dans les situations) pourrait outiller l'enseignant pour l'institutionnalisation, ce qui pourrait faire défaut dans les pratiques de certains enseignants du primaire actuellement comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

Des marges de manœuvre permettant des adaptations

L'appui sur les recherches présentées dans ce chapitre concernant les usages des ressources par les enseignants nous amène à considérer l'importance de décrire des situations en laissant une marge de manœuvre importante aux enseignants afin de leur donner la possibilité d'adapter, de mettre à leur main les situations proposées. Les expérimentations doivent permettre de progressivement déterminer ce sur quoi il est possible de laisser des marges de manœuvre et ce sur quoi il faut essayer d'avoir un contrôle.

Cela peut aussi permettre aux enseignants de s'autoriser à produire des choses non prévues dans la ressource qui pourraient mieux correspondre à leurs pratiques ou à leur contraintes et cela pourrait devenir l'objet de propositions pour une version ultérieure de la ressource. Comme nous l'avons déjà indiqué les marges de manœuvre peuvent être plus réduites pour les premières versions de la ressource car il est nécessaire de tester la consistance des situations.

Une description du canevas didactique général pour la conception d'une séquence

Pour aider l'enseignant à dépasser le pilotage de son projet par les tâches, nous décidons de mettre en évidence les relations entre les situations proposées et les savoirs mathématiques. Une description du canevas didactique général peut alors permettre à l'enseignant de s'approprier l'évolution des enjeux de savoirs en lien avec le jeu sur certaines variables didactiques. La détermination des éléments essentiels du canevas didactique à diffuser aux enseignants fait aussi partie des questions de la thèse.

Une description de l'utilisation de ces savoirs avec d'autres notions mathématiques

Enfin nous aiderons l'enseignant à inscrire la ressource locale dans une organisation mathématique globale par des apports sur les liens entre la numération et d'autres domaines mathématiques où elle intervient.

Des choix pour motiver l'enseignant à utiliser cette ressource

Enfin, dans une perspective l'élaboration d'une ressource pour les enseignants, on peut s'interroger sur la façon dont les enseignants vont recevoir la proposition d'un travail sur des tâches non valorisées par l'institution et, qui plus est, posent des difficultés aux élèves. Roditi (2008) a par exemple montré que, pour les enseignants de collège, il existait comme un « principe d'efficacité pédagogique » : les enseignants ne traitent pas les contenus mathématiques qui posent des difficultés aux élèves et qui ne semblent pas indispensables à la séquence. Qu'en est-il pour les enseignants du primaire ?

Notre étude de la transposition didactique de la numération peut alors être un point d'appui pour faire émerger les manques au niveau des savoirs travaillés dans certains manuels. Une justification de l'usage de la ressource ayant de la valeur pour les enseignants peut être l'importance de ce savoir pour le calcul posé. Mais cette entrée par les savoirs pourrait ne pas suffire. Margolinas, Mercier et René de Cotret (2006) ont mis en évidence l'importance de l'appui sur les difficultés des élèves dans ce qui peut amener un enseignant à utiliser une ressource :

> « Tout se passe comme si les professeurs nous disaient : ''je sais enseigner, pas de problème… sauf pour 20% des élèves (pourcentage qui peut varier selon les discours)''. ''Pour ceux-là, les élèves *en difficulté*, je suis demandeur d'aide, de suggestion, voire je réclame qu'on me fournisse des aides'' » (p.33).

Pour les enseignants du primaire, l'appui sur les difficultés récurrentes d'élèves pourrait être un catalyseur qui les pousse à repenser leur travail de préparation. Avec une limite : si le pourcentage d'échec est trop important, alors le savoir pourrait être repoussé, considéré comme inutile. Pour notre ressource, la mise en évidence d'erreurs ou difficultés courantes d'élèves liées aux conversions entre unités de la numération pourrait motiver les enseignants à utiliser la ressource.

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes appuyé sur les constats faits dans la première partie ainsi que sur les recherches présentées dans le chapitre précédent concernant les usages des ressources par les enseignants du primaire pour préciser notre problématique. Elle se résume à travers ces deux questions :

- quelle suite de situations (à usage didactique) utilisables dans l'enseignement ordinaire peut-on construire pour amener les élèves à donner à l'écriture des chiffres une signification articulant les deux principes de la numération ?
- quels sont les éléments essentiels à diffuser aux enseignants pour permettre une gestion adaptée des situations et l'institutionnalisation des savoirs en jeu ?

En nous appuyant sur les méthodes de recherche-développement et sur l'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource nous avons élaboré une méthodologie générale pour notre ingénierie, en articulation avec la partie I, ce que nous pouvons résumer par le schéma de la page suivante.

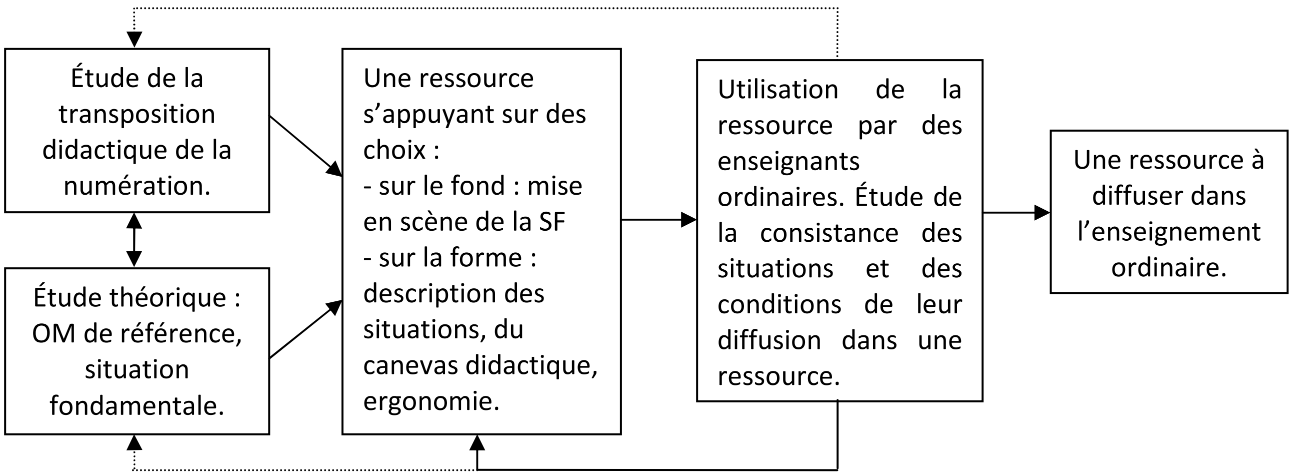


Figure 65 : méthodologie générale de la thèse

Au premier niveau d'ingénierie, il s'agit d'étudier la possibilité pour les situations (mises en scène de la situation fondamentale) de faire émerger les connaissances visées (donc leur consistance) et, au deuxième niveau d'ingénierie, d'étudier les conditions de leur diffusion (par le moyen d'une ressource) à des enseignants ordinaires. Les cycles de conception/expérimentation doivent permettre d'affiner les choix effectués, pour une meilleure diffusion des situations aux enseignants.

Pour cerner l'usage de la ressource par les enseignants, nous nous appuyons sur la comparaison d'analyses *a priori* et *a posteriori* en utilisant certains concepts de la théorie des situations didactiques (dévolution, institutionnalisation, contrat et milieu). Cela doit permettre d'étudier les adaptations qu'ils réalisent à partir des situations proposées. Nous faisons également une étude empirique de l'ergonomie de la ressource afin de la rendre utilisable et acceptée par les enseignants.

Dans les principes généraux qui guident la conception de la ressource, nous distinguons ceux portant sur le contenu (la numération) de ceux portant sur la ressource elle-même.

Nous nous appuyons sur la théorie mathématique proposée dans le chapitre 1 ainsi que sur la situation fondamentale pour faire certains choix de mise en scène. Dans un premier temps, nous proposons une situation de dénombrement d'une grande collection (production d'une EC de la quantité) avec un jeu sur certaines variables didactiques (ordre des unités, absence d'unités, nombre d'unités à chaque ordre) afin de mettre en jeu les deux principes de la numération. Dans un deuxième temps, nous proposons une situation de traduction d'écriture visant la production de décompositions variées d'un même nombre. Nous tentons d'amorcer la décontextualisation des connaissances en proposant des problèmes dans d'autres contextes.

Concernant la ressource, les résultats des recherches du chapitre précédent nous ont permis de faire certains choix généraux :

- une ressource à destination de l'enseignant ;
- description de situations et d'enjeux de savoirs avec des marges de manœuvre permettant des adaptations ;
- description du canevas didactique général pour la conception d'une séquence ;
- mise en relation de ces savoirs avec d'autres notions mathématiques ;
- des arguments pour motiver l'enseignant à utiliser cette ressource.

Tous ces choix seront à questionner et à préciser au fur et à mesure de l'ingénierie.

Nous allons maintenant passer à la description de la pré-expérimentation devant permettre la mise au point de la ressource.

Chapitre 7

Pré-expérimentation

Nous cherchons dans ce chapitre à tester la version 0 de la ressource (prototype) que nous avons conçu en nous appuyant sur nos choix généraux (chapitre 6). Il est nécessaire de s'assurer d'un minimum de consistance des situations et de viabilité de la ressource dans des classes ordinaires avant de se lancer dans une expérimentation avec plusieurs classes. Le premier jet de cette ressource, qui en constituera une version *0* sera testée par deux enseignants seulement, avec modification de la ressource entre les deux (version 0a pour le premier enseignant et 0b pour le deuxième). Nous parlons de *pré-expérimentation* du fait qu'il s'agit d'une expérimentation dans un cadre très restreint. Son objectif est de préparer la version 1 de la ressource.
Nous commençons à regarder si les situations prévues permettent bien de faire émerger les connaissances visées (premier niveau d'ingénierie) et à déterminer les éléments essentiels qu'il faut diffuser aux enseignants (pour la dévolution/régulation/ institutionnalisation). Éventuellement nous modifierons ces situations pour les rendre plus adaptées aux enjeux de savoirs visés.
Cette pré-expérimentation vise aussi à dégager des premiers éléments d'utilisabilité et d'acceptabilité pour la ressource.

I. Les choix principaux, précisions sur les questions à l'étude et la méthodologie de la pré-expérimentation

I.1 Les choix de conception pour la ressource 0a

Nous nous appuyons sur les principes fondamentaux présentés dans le chapitre 6. Cela donne lieu ici à une première situation de dénombrement (« combien de bûchettes ? ») pour laquelle nous indiquons différentes variantes en jouant principalement sur l'organisation de la collection suivie d'une situation de traduction d'écriture (« le jeu des familles ») visant la production des décompositions variées d'un même nombre. Enfin, un problème est proposé dans un contexte différent (« les timbres ») permettant de réinvestir les connaissances.
Nous décrirons plus en détail les différentes situations proposées dans les analyses *a priori*.

I.2 La ressource proposée (version 0a)

On la trouvera en annexe CD-ROM.
Pour la pré-expérimentation nous proposons une ressource papier, même si nous prévoyons pour la suite d'élaborer une ressource numérique permettant une meilleure diffusion via internet.
La ressource proposée est découpée en <u>deux parties</u> : l'une permettant l'appropriation des enjeux de savoirs, des choix effectués, l'autre donnant des situations à mettre en place.

<u>Première partie de la ressource : les apports pour l'enseignant</u>
Voici le plan de la première partie :

I. Pourquoi ce document ? Le point de départ : un constat dans les programmes, les manuels et dans les classes.
II. Nos choix
III. Les tâches travaillées et les savoirs mathématiques en jeu
IV. L'importance d'une bonne compréhension de la numération pour donner du sens aux techniques opératoires, aux règles de multiplication par 10, 100, …
V. La séquence

Le choix est fait de s'appuyer, d'une part, sur notre constat de manque de travail autour du principe décimal de la numération dans les programmes et manuels actuels, d'autre part, sur les erreurs et difficultés des élèves pour sensibiliser les enseignants au travail proposé dans la ressource.
Une description des premiers choix fondamentaux de la séquence est aussi proposée : intérêt du matériel pour les groupements mais aussi pour permettre la vérification des réponses des élèves. Importance de la décontextualisation et du changement de contexte.
Les savoirs mathématiques visés sont détaillés pour permettre à l'enseignant de saisir les enjeux de la séquence. En particulier, l'accent est mis sur les types de tâches, les savoirs et le lien entre les deux. Le lien avec les programmes officiels est mis en évidence également pour permettre à l'enseignant de bien identifier le champ mathématique couvert par la séquence.
Les liens entre la numération et d'autres notions mathématiques sont expliqués, ce qui peut également motiver les enseignants à s'engager dans ce travail. Nous insistons sur l'importance du principe décimal pour le calcul posé qui sera une occasion de réinvestir ce travail.

<u>Deuxième partie de la ressource : les situations</u>
Trois situations sont proposées en appui sur nos choix de mise en scène de la SF (chapitre 6) :

- « Combien de bûchettes ? » : dénombrement d'une grande collection « en vrac » puis des variantes sont proposées dans les exercices : ajout d'un nombre d'unités donné à une collection, dénombrement de collections dessinées totalement ou partiellement groupées (plus de dix unités à certains rangs).
- « Le jeu des familles » : associer différentes écritures d'un même nombre : en chiffres, en mots, en unités de numération (canoniques ou non).
- « Les timbres » : il s'agit de travailler le *nombre de* en contexte, à partir d'un problème de commande de timbres en tenant compte du nombre de timbres, carnets de dix, plaques de cent et enveloppes de mille timbres que possède le bureau de poste.

La description des situations ne devrait prendre en compte que les éléments essentiels pour une mise en œuvre permettant de préserver les enjeux visés. Un des objectifs de la pré-expérimentation est justement de déterminer ces éléments. Nous choisissons de ne pas décrire dans le détail la mise en œuvre des situations en classe, ce qui laisse une certaine marge de manœuvre aux enseignants, même si les résultats des recherches sur les usages des ressources montrent qu'ils prennent de toute façon certaines libertés. Cela permet de ne pas contraindre l'enseignant à un fonctionnement qui n'est pas le sien, mais aussi de produire des choses auxquelles le chercheur ne pense pas *a priori*, qui correspondent mieux aux contraintes de fonctionnement de la classe, etc. mais aussi pour ne pas contraindre l'enseignant dans un fonctionnement de classe qui ne serait pas le leur. Ce qui est visé est un enrichissement des pratiques (et non une modification radicale) par une meilleure prise en compte des savoirs de la numération.
Voici les éléments de description des situations : enjeux pour le maître, matériel nécessaire (des fiches sont proposées pour un jeu d'étiquettes, des timbres représentés …), description du problème, variables didactiques, exemples, procédures possibles des élèves, éléments pour la phase de conclusion, les savoir-faire et/ou savoirs à institutionnaliser. Il restera à définir plus précisément pour chaque situation les caractéristiques essentielles à diffuser aux enseignants.

I.3 Précisions sur les questions et la méthodologie

Cette pré-expérimentation vise à avancer sur les questions générales données dans le chapitre précédent. Les choix principaux sont mis à l'étude :

- les situations semblent-elles produire les connaissances prévues ? Y'a-t-il des difficultés résistantes chez les élèves ?
- semblent-elles viables dans l'enseignement ordinaire ? Quelles adaptations en font les enseignants ? Permettent-elles de préserver les enjeux prévus ? Quels aménagements semblent nécessaires ?
- la ressource est-elle utilisable et acceptée par les enseignants ? Comment améliorer son ergonomie ?

Nous avons conçu une version 0a (pour la première classe). La mise à l'épreuve de cette ressource dans la classe s'appuie sur un contrat d'expérimentation proposé aux enseignants, précisant les engagements respectifs du chercheur et de l'enseignant ainsi qu'un calendrier. En particulier il y est indiqué que :

- le chercheur communique les enjeux de l'ingénierie (à travers la ressource proposée) ainsi que des propositions de situations,
- l'enseignant construit une séquence avec le chercheur en s'appuyant sur les situations données ainsi que sur les enjeux décrits par le chercheur mais en adaptant

ces situations à sa classe et en amenant ses idées, son expérience, etc. et ses contraintes.

L'enseignant peut modifier et enrichir les situations prévues. Il reste responsable de sa classe pendant toutes les observations et le chercheur observera les séances sans jamais intervenir.

<u>Analyse des séances</u>

Nous entrerons moins dans le détail que pour les analyses de l'expérimentation de la partie suivante. Nous choisissons de décrire des situations dont la mise en œuvre par l'enseignant peut permettre d'avancer dans nos questions. Pour l'étude de ces situations mises en œuvre par les enseignants en classe, nous procédons à une comparaison de l'analyse *a priori* et de l'analyse *a posteriori*.

L'analyse *a priori* est faite en deux temps, comme dans la partie I : à partir de ce qui est proposé dans la ressource puis à partir de ce qui est mis en place par l'enseignant en tenant compte des adaptations éventuelles. Nous complétons éventuellement ces analyses par de courts entretiens de fin de séance en fonction de la disponibilité de l'enseignant.

<u>Évaluations</u>

Nous proposons également deux évaluations :

- une première avant la séquence sur les nombres à trois chiffres et portant sur les types de tâches qui seront travaillés dans la séquence ;
- une deuxième en fin de séquence (environ une semaine après) portant sur les mêmes types de tâches mais pour les nombres à quatre chiffres.

La comparaison de ces évaluations doit permettre d'étudier les apprentissages éventuels et de s'assurer *a minima* que l'utilisation de la ressource n'a pas d'effet négatifs sur les apprentissages des élèves.

<u>Entretiens</u>

Trois entretiens sont menés avec les enseignants. Au cours du premier (rapide entretien, éventuellement téléphonique), nous faisons le point sur ce que l'enseignant propose habituellement en numération, ensuite nous donnons la ressource pour qu'il puisse se l'approprier. Lors du deuxième entretien nous préparons le détail de la mise en œuvre avec lui. Cela donne l'occasion de revenir sur certains choix faits par le chercheur et éventuellement de les modifier : par exemple la consigne prévue par le chercheur n'est pas adaptée, le matériel ne convient pas à l'enseignant ou bien il faut commencer par une valeur différente d'une des variables, etc. Les responsabilités sont partagées : l'enseignant est responsable du déroulement qu'il va proposer en classe, le chercheur est responsable des objectifs de la recherche tels qu'ils sont explicités dans le document donné à l'enseignant.

Enfin lors du dernier entretien nous faisons le bilan de la séquence et discutons des modifications à envisager.

<u>Choix du nombre de classes observées</u>

Nous limitons à deux le nombre de classes observées afin de pouvoir observer la mise en œuvre du plus possible de situations de la ressource.

Les enseignantes, qui participent à la pré-expérimentation, ne travaillant pas cette séquence au même moment de l'année, cela nous permet d'effectuer quelques ajustements à la ressource entre les deux observations[95], mais ne nous permet pas toujours d'avoir des éléments de comparaison mais entre les deux mises en œuvre.

[95] On parlera alors de version *0a* pour la première ressource et *0b* pour la deuxième.

<u>Choix des enseignants</u>
La première enseignante (Mme D) est expérimentée mais l'entretien préalable permet de voir que le principe décimal n'est pas un enjeu de sa séquence sur les nombres à trois chiffres. Nous pourrons ainsi voir si l'utilisation de cette ressource lui permet de s'approprier de nouveaux enjeux pour l'enseignement de la numération. La deuxième enseignante (Mme C) a déjà été observée l'année précédente (voir partie I). Elle utilise le manuel « J'apprends les maths CE2 » et travaille le principe décimal comme un savoir central avec le matériel représenté (boites, valises, etc.). Cependant elle n'est pas satisfaite de ce travail sur la numération et aimerait bien utiliser une autre approche. Elle trouve en effet fastidieux de toujours avoir à repasser par un dessin des collections en lien avec l'utilisation du compteur. Cette expérimentation permettra de voir si cette nouvelle approche répond à ses attentes.
Nous allons maintenant mettre à l'étude les choix de cette pré-expérimentation.

II. Pré-expérimentation, classe de Mme D (version 0a)

II.1 L'enseignante, la classe, la séquence

L'enseignante est expérimentée : elle enseigne depuis une vingtaine d'années. Elle a principalement enseigné dans des classes de CM2. Elle vient de changer d'école et de niveau de classe. Il s'agit de sa première année avec des CE2. La classe est un double niveau CE2/CM1 en milieu urbain. Il y a 16 élèves de CE2 et 8 de CM1. Pour les CE2 l'enseignante a choisi d'utiliser le manuel « Maths tout terrain CE2 » (Bordas 2008) mais sans le guide pour l'enseignant dans lequel « il n'y a que des choses que tu sais déjà ! » (entretien final). Elle utilise ERMEL avec les CM1 de façon ponctuelle et un tout petit peu avec les CE2 :

> « Mais ERMEL c'est compliqué, je ne peux l'utiliser que ponctuellement. Je ne peux pas suivre ERMEL. Y'a plein de situations, avec le double niveau je te raconte pas … J'utilise beaucoup sur les fractions, parce que j'ai des habitudes, sur la soustraction parce que le fichier ne m'allait pas du tout, donc j'ai cherché des trucs dans ERMEL. Voilà quand moi-même je me sens en difficulté ». (Mme D, entretien final)

La séquence se compose de 8 séances dont 6 ont été observées. Toutes les situations proposées dans la ressource ont été testées, dans l'ordre proposé, même si l'enseignante avait la possibilité de s'en écarter :

- Situation 1 (dénombrement d'une collection matérielle puis représentée) : séances 1, 2, 3 et 4.
- Situation 2 (le jeu des familles) : séance 5 (associer un nombre à une décomposition en unités de numération) et séances 6, 7, 8 (décomposer un nombre)

Lors de la première séance les élèves ont eu à dénombrer une collection de bûchettes apportée par l'enseignante en réalisant des groupements successifs par dix : dix bûchettes se groupent en un « fagot » avec un élastique, dix fagots en un sachet. La classe obtient ainsi 26 sachets, 22 fagots et 11 bûchettes après réunion de tous les groupements des différents groupes d'élèves. Cette collection est dessinée par Mme D au tableau. A partir de cette représentation, sous la conduite de l'enseignante, les groupements se poursuivent :

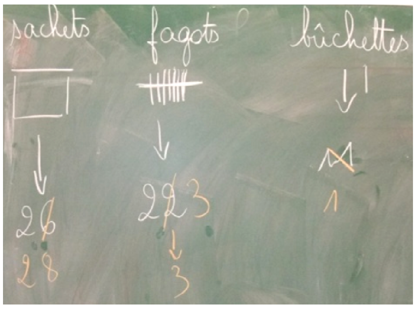


Figure 66 : représentation de la collection par l'enseignante au tableau

Les groupements se font ainsi : 10 bûchettes se groupent en 1 fagot, ce qui fait 23 fagots, puis 20 fagots se groupent en 2 sachets, ce qui fait 28 sachets. On peut observer quelques difficultés des élèves dans l'utilisation du vocabulaire « fagot » et « bûchettes ». Les unités de numération ne sont pas encore utilisées pour décrire les groupements.
Lors de l'après-midi (séance non observée), les groupements des 20 sachets sont réalisés et le nombre total est écrit en chiffres. Voici l'affiche réalisée par l'enseignante :

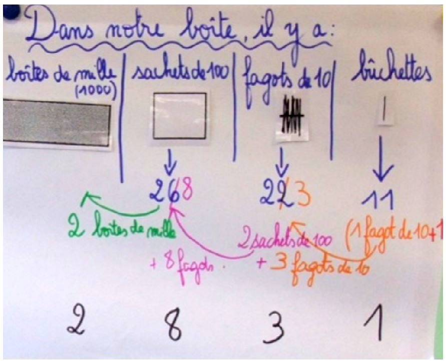


Figure 67 : affiche réalisée par Mme D

L'enseignante abandonne très rapidement le groupement avec matériel pour le remplacer par une représentation schématique avec des flèches, dans lequel les unités sont organisées comme dans un tableau de numération, dans l'ordre décroissant de leur valeur, qui est liée à la volonté de mettre par écrit les actions réalisées.

II.2 Analyse de la mise en œuvre de situations proposées dans la ressource

Nous avons choisi d'analyser la mise en œuvre de deux activités faisant partie de la situation 1 (de dénombrement de collections) car ces premières observations soulèvent des questions de fond liées aux connaissances construites dans ces séances, aux moyens de contrôle possibles, aux ostensifs et à la décontextualisation des connaissances. De plus, ces observations mettent en évidence l'appropriation faite par l'enseignante de cette situation. Elles serviront aussi de point d'appui pour des ajustements de la ressource que nous proposerons à une deuxième enseignante (version *0b*).

Analyse a priori des activités 2 et 3 (situation 1)

Voici comment sont décrites ces activités dans la ressource :

Trois types d'activités :

1. **A partir de la collection de l'étape précédente, l'enseignant ajoute du matériel (par exemple aux 2548 bûchettes on ajoute 8 sachets) : les élèves doivent trouver combien il y a de buchettes maintenant.**

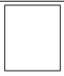
Remarque : cette activité peut se faire collectivement sur ardoise par exemple. On choisira les objets à ajouter de façon à faire faire des groupements aux élèves (dans l'exemple donné ici on amène les élèves à grouper les 13 sachets en 1 boite et 3 sachets)

2. **L'enseignant propose une collection représentée : les élèves doivent donner le nombre total de bûchettes.**

3. **L'enseignant propose une collection représentée et donne différentes écritures : les élèves doivent dire quelles sont les bonnes écritures et pourquoi elles le sont ou pas.**

Remarque : dans le troisième type d'activité, les enfants seront amenés à justifier les réponses en s'appuyant à la fois sur l'aspect positionnel et décimal de la numération.

Pour ces différents types d'activités voici un exemple de représentations du matériel que l'enseignant pourra utiliser :

			
1 millier de bûchettes	1 centaine de bûchettes	1 dizaine de bûchettes	1 bûchette

Variables pour les activités de type 2 et 3 :

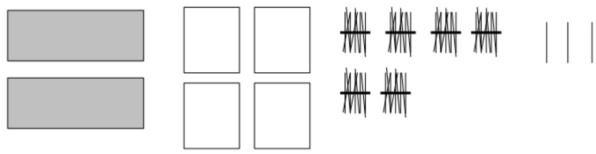
- ordre dans lequel les différents types de matériel sont donnés (par exemple 2 fagots, 1 boite, 3 bûchettes et 6 sachets)
- absence d'un matériel de type donné (par exemple absence de sachet : cela amène à utiliser le 0)
- le nombre d'objets pour chaque type de matériel : inférieur à 9 ou supérieur à 10 (dans ce denier cas on est amené à utiliser les relations entre les unités).

Pour l'activité de type 3, la principale variable concerne la présence des nombres d'unités de chaque rang dans l'écriture proposée. Par exemple avec 1 boite, 2 sachets, 3 fagots, 4 bûchettes on proposera : 1234, 1432, 4321, etc.

Exemples de collections à dénombrer pour les activités de type 2 et 3 :

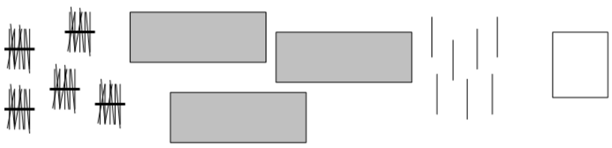
Avec moins de 9 unités à chaque rang

1.



NB: pour l'activité de type 3, l'enseignant pourra par exemple proposer ici les nombres 2453, 4253 et 3452

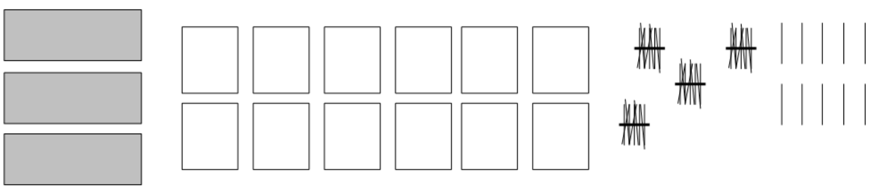
2.



3.

Avec plus de 10 unités à certains rangs :

4.



NB: pour l'activité de type 3, l'enseignant pourra par exemple proposer ici les nombres 312410, 3240, 31250 …

etc.

Figure 68 : description des activités d'entraînement de la situation 1, extrait de la ressource

Dans ces deux types d'activités l'<u>enjeu</u> est de faire émerger les trois conditions pour obtenir l'EC : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité et présence de nombres à un seul chiffre dans l'EC. Il est également précisé dans la ressource que les élèves devront

justifier leur réponse dans l'activité 3 pour s'assurer que le nombre choisi est le bon. Il peut donc y avoir un enjeu de formulation et de validation des connaissances construites.
Les connaissances supposées des élèves concernent les nombres à trois chiffres mais aussi celles en cours de construction sur le millier, suite au travail fait dans les situations précédentes : les relations entre les unités (en particulier millier/centaine) et le principe de position (rang du millier). L'objectif est de renforcer ces connaissances en proposant deux problèmes où les élèves auront la responsabilité de leur mise en œuvre (alors que dans la situation initiale de dénombrement, la plupart du travail se fait collectivement).
Le milieu contient le matériel représenté :

1 millier de bûchettes	1 centaine de bûchettes	1 dizaine de bûchettes	1 bûchette

Figure 69 : une représentation du matériel, extraite de la ressource

Le matériel des situations précédentes peut également être placé dans le milieu par la maîtresse. Cependant cela n'est pas précisé dans la ressource.
Les variables didactiques sont indiquées dans la ressource :

- ordre dans lequel les différentes unités sont données (par exemple 2 fagots, 1 boite, 3 bûchettes et 6 sachets) pour éviter que la réponse correcte soit systématiquement la juxtaposition des nombres dans l'ordre,
- absence d'unités isolées à un certain ordre (ou à plusieurs), par exemple absence de sachet : cela amène à utiliser le 0 pour marquer la position,
- le nombre d'objets pour chaque unité : inférieur ou égal à 9, ou plus grand : dans ce dernier cas on est amené à utiliser les relations entre les unités.

Autre variable pour l'activité 3 : présence de diverses juxtapositions des nombres d'unités de chaque ordre dans l'écriture proposée. Par exemple avec 1 boite, 2 sachets, 3 fagots, 4 bûchettes on proposera : 1234, 1432, 4321, etc. Avec 1 boite, 20 sachets, 3 fagots, 4 bûchettes on proposera : 12034, etc.
Dans les deux activités, les mêmes techniques sont utilisables.

- Comptage en unités simples, puis traduction du nom du nombre en EC : mille, mille-cent, etc. puis 3 034 ;
- Comptage en unités puis traduction en EPD et addition (en ligne ou posée, avec extension au cas des nombres à 4 chiffres) : (1x1000) + (20x100) + (3x10) + 4 = 1000 + 2000 + 30 + 4 = 3034 ;
- Comptage en unités puis conversion entre unités et association rang/unité : 1m 20c 3d 4u = 1m + 2m + 3d + 4u = 3m + 3d + 4u = 3034.

Pour les deux activités, les élèves peuvent faire des erreurs dans la juxtaposition des nombres (erreurs attendues). Par exemple :

- pour 4 fagots 3 boites 7 bûchettes et 1 sachet, ils pourraient écrire 4371,
- ou encore pour 3 boites 7 bûchettes et 1 sachet ils pourraient écrire 371,
- ou encore pour 3 boites 10 sachets 4 fagots et 7 bûchettes, ils pourraient écrire 31047.

Dans le premier cas (4371), une lecture du nombre (si cette connaissance est disponible) peut permettre à l'élève de repérer que « quatre mille » ne correspond pas au nombre de milliers de la collection, etc. Dans le second cas (371) l'élève peut essayer de remettre en cause sa réponse, en référence à l'ordre de grandeur du résultat ou bien parce qu'il n'obtient pas un nombre à quatre chiffres (ce qui peut être un effet de contrat). Pour le dernier cas le nombre de chiffres du résultat pourrait également lui donner des indices.

Cependant les élèves effectuent rarement un contrôle de leur réponse. Un travail des élèves par groupes pourrait permettre une confrontation des réponses et des rétroactions du milieu.
Plus généralement, dans ces activités de dénombrement, l'élève peut avoir un moyen de contrôle s'il cherche à obtenir à nouveau le nombre par une autre technique s'appuyant sur des connaissances mieux assurées. Souvent les élèves ne le font pas spontanément et cela doit être provoqué par l'enseignant.
Dans le cas d'une situation de communication l'élève pourrait avoir un retour sur la validité de son résultat si un autre élève (ou la classe) doit faire le travail dans l'autre sens (principes des jeux de l'émetteur et du récepteur de la SF) : partir du nombre obtenu et réaliser une collection puis la comparer à la collection initiale. Ce travail peut être proposé par l'enseignant mais rien n'est indiqué dans ce sens dans la ressource. De plus ce fonctionnement pourrait être plus coûteux à mettre en place dans la classe. C'est d'ailleurs la principale raison pour laquelle nous ne l'avons pas proposé.
Concernant l'activité 3 (trouver la bonne écriture parmi les différentes proposées), si les élèves juxtaposent les chiffres ils trouvent un résultat erroné qui peut faire partie de la liste de nombres (comme cela est indiqué dans la ressource). Les élèves ont les mêmes moyens de contrôle que pour l'activité précédente.
Il est possible de prévoir des <u>interventions de la part de l'enseignant :</u> il peut donc utiliser le matériel ou sa représentation pour permettre aux élèves de vérifier leurs réponses en utilisant un comptage en unités simples par exemple (si les connaissances associées sont disponibles). Cela peut aussi être effectué à travers la réalisation des groupements qui ne sont pas faits (ici dix sachets dans une boite). Dans ce cas il s'agit des connaissances visées, on peut donc penser que l'élève n'aura pas la responsabilité de cette vérification.
L'enseignant peut également amener dans le milieu un tableau de numération (ou écriture de MCDU au-dessus du nombre) qui permet une rétroaction pour l'association entre les unités et la position des chiffres. Mais là encore il s'agit du savoir visé.
Il est donc possible que l'enseignant prenne une responsabilité importante dans les phases de conclusion.

Déroulement de la deuxième séance observée.

<u>Début de la séance</u>
Rappel de la situation précédente. De 0' à 7'.
L'enseignante fait rappeler aux élèves ce qu'ils ont fait la veille. Elle s'appuie sur l'affiche réalisée précédemment (fin de la séance 1). Elle institutionnalise alors les relations entre différents groupements (écrite au tableau) :
Mille = 10 sachets de 100
= 1000 bûchettes
= 100 fagots de 10
L'ajout et le retrait d'objets à une collection : activité 1. De 7' à 33'.
L'enseignante demande de lire le nombre obtenu (2831). Un élève dit le nombre sans erreur. La technique reste invisible. Elle indique ensuite qu'elle ajoute trois fagots de dix et demande « qu'est-ce que j'obtiens comme nombre ? ». Les élèves écrivent la réponse sur ardoise (en chiffres). Elle invalide une réponse donnée par une élève (deux-mille-huit-cent-trente-quatre) en rappelant la différence entre une bûchette et un fagot de dix (les élèves

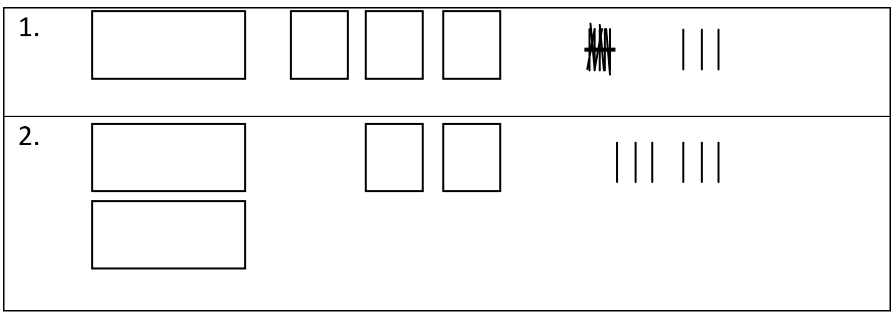
ont fait beaucoup d'erreurs). Une autre élève propose deux-mille-huit-cent-soixante-et-un. L'enseignante fait utiliser le tableau de numération pour vérifier la réponse de l'élève.
L'enseignante propose alors l'ajout de 5 boites de mille. Elle interroge une élève qui a trouvé la bonne réponse et lui demande de venir l'écrire au tableau puis de lire. La vérification se fait par l'enseignante.
Le déroulement est assez proche pour les cas suivants : les élèves écrivent le nombre sur l'ardoise. L'enseignante prend la responsabilité de la vérification. Ils écrivent un autre nombre si erreur (au début il y a beaucoup d'erreurs). Ensuite un élève vient au tableau : l'enseignante lui pose des questions très guidées (si j'ajoute ... ça fait combien de … ? et qu'est-ce que je peux faire de ces … ?).
Voici les cas proposés :

- Ajout de 9 bûchettes à 2831 bûchettes
- Ajout de 2 sachets de 100 à 2831 bûchettes
- Ajout de 7 fagots de 10 à 2831 bûchettes
- Ajout de 4 sachets de 100 à 2831 bûchettes
- Ajouts de 12 fagots de 10 à 2831 bûchettes
- Ajout de 4 sachets de 100 à 2831 bûchettes (à nouveau)

Lors de cette première partie de la séance on observe donc que certaines connaissances sont formulées alors que d'autres restent invisibles. En effet l'enseignante fait un travail sur la lecture des nombres écrits (non prescrit dans la ressource) mais sans que les techniques correspondantes soient explicitées. Cela restera le cas tout au long des séances observées même si l'enseignante reprendra dans une trace écrite la description du lien entre numération parlée et écrite proposée dans la ressource.
Le principe de position apparaît au cours de l'activité uniquement à travers le tableau de numération utilisé par l'enseignante dans les moments de correction sous sa responsabilité. Les relations entre différents groupements sont rappelées dès le début de la séance en appui sur une affiche récapitulant le dénombrement initial de la collection de bûchettes. Les EUN ne sont pas utilisées pour le moment. Ces relations sont ensuite en jeu dans l'activité proposée, avec certaines difficultés rencontrées par les élèves dans leur mobilisation. Elles sont alors mobilisées par l'enseignante pour la vérification des réponses (qui se fait par la technique visée, c'est-à-dire par utilisation de la position et des conversions). Lors de l'entretien de fin de séance Mme D nous signale avoir été surprise par les erreurs des élèves dans cette activité sur des choses « simples ». Elle paraît sous-estimer les difficultés liées à ce travail de numération.
Elle passe ensuite à l'activité 2 que nous allons analyser plus en détail.

Le dénombrement de collections (activité 2) : les choix de l'enseignante. Quelles adaptations ?

Mme D a choisi de faire dénombrer les collections suivantes :



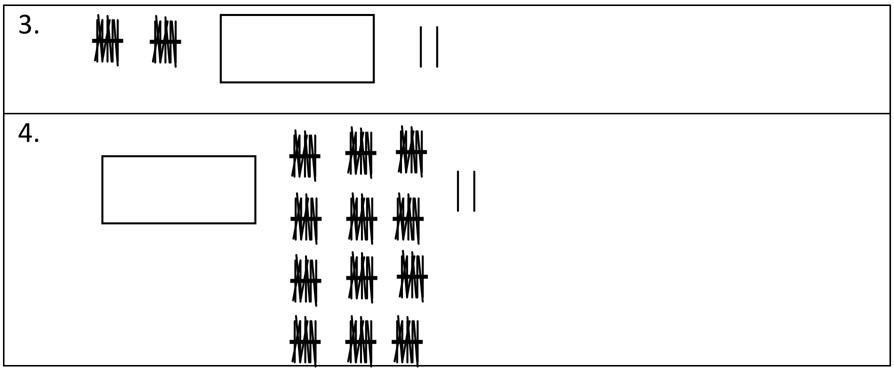


Figure 70 : les collections proposées par l'enseignante.

Ce choix correspond aux quatre types d'exemples proposés dans la ressource pour illustrer les différentes valeurs possibles pour les variables didactiques, avec la même progression. Mme D s'est donc approprié ce jeu sur les variables didactiques puisqu'elle a construit ses propres exemples (même si on peut penser qu'un exemple pour chaque cas pourrait être trop peu). L'enjeu de la situation est bien de faire émerger les différents savoirs correspondants : principe de position (rôle du zéro, rang des différentes unités) et principe décimal pour le dernier cas. Cependant la relation en jeu concerne les dizaines et centaines alors que dans la ressource il s'agissait des centaines et milliers (savoir nouveau). De plus, le fait de ne pas avoir de centaines isolées permet la simple juxtaposition : 1M 12D 2U = 1122. Il est donc possible que les élèves soient renforcés dans l'utilisation de cette technique et qu'ainsi la conversion correspondante reste transparente. Il serait possible, pour la conception de la ressource, de mettre davantage en avant l'erreur due à la simple juxtaposition de nombre pour éviter que l'enseignant ne propose des collections de ce type.
Pour les trois premiers cas le problème proposé est globalement le même que dans la ressource. Le milieu ne contient pas le matériel des bûchettes. L'enseignante a remplacé ce matériel par un autre matériel : celui des étiquettes plastifiées représentant les bûchettes et les différents groupements. Ainsi les actions de groupements par dix avec le matériel initial seront remplacées ici par des échanges dix contre un. Par contre le nom des unités reste le même (bûchettes, fagots, …). Les élèves écrivent le résultat sur leur ardoise ce qui peut leur permettre d'effacer et de recommencer rapidement.
Dans l'organisation du déroulement, pour chaque collection Mme D choisit de faire la correction collective avant de passer à la suivante (cela n'était pas précisé dans la ressource). Comme il y a une évolution dans les connaissances mises en jeu à travers les quatre cas, cela permet d'enrichir le milieu de chaque cas par les apports qui ont été fait dans le cas précédent.

Déroulement de la situation de dénombrement de collections.

<u>De 33' à la fin de la séance.</u>
Pour la première collection (1M 3C 1D 3U) les élèves font assez peu d'erreurs. Une élève vient au tableau pour présenter son résultat mais la vérification est prise en charge par l'enseignante : elle demande combien il y a d'unités, de fagots de dix, de sachets de cent et de milliers. L'élève écrit au fur et à mesure sous les étiquettes : 1 3 1 3 (de la droite vers la gauche). Ainsi on ne sait pas quelle était la technique utilisée par cette élève. Mme D lui demande ensuite de lire ce nombre sans que la technique soit visible dans la classe.

Pour le deuxième cas (2M 2C 6U), deux types d'erreurs apparaissent : 2026 et 226. Suite à cette dernière erreur, l'enseignante commence par revenir sur le fait qu'il n'y avait pas de fagot et donc qu'il fallait écrire 0 (ce qui est vrai seulement si le nombre d'unités d'ordre inférieur est au plus égal à 9). Ensuite elle prend en charge la conclusion en évaluant les réponses des élèves toujours de la même manière : combien d'unités, combien de fagots de dix, etc. Il y aurait eu ici une possibilité d'utiliser une lecture du nombre 226. L'enseignante demande encore de lire le nombre mais après la correction.
Pour le troisième cas (2D 1M 2U), de nombreuses erreurs apparaissent : 1222, 1002, 2012. Cette dernière témoigne d'une technique de position avec 0 mais sans tenir compte du rang des unités.
La phase de conclusion suit le même déroulement, mais cette fois Mme D institutionnalise une technique : « quand on écrit un nombre on commence toujours par les unités, puis les fagots de dix, … ». La méthode utilisée pour vérifier est celle qui est visée par l'enseignante et donc institutionnalisée. Pourtant, jusque là, les cas proposés n'amènent pas à commencer à partir des unités mais plutôt à partir des milliers, comme pour la lecture du nombre. C'est seulement quand il y a des conversions que cela peut s'avérer plus économique (cas suivant). On peut donc penser que si les élèves s'approprient cette technique c'est davantage par un effet de contrat que par adaptation au problème posé.
Pour le quatrième cas[96] (1M 12D 2U) il y a encore beaucoup d'erreurs. La vérification suit toujours la même technique : « Alors on commence par les ? ». Mais un problème est soulevé par Mme D : que fait-on des dix fagots qui restent quand on a écrit les deux fagots dans la colonne des fagots ? : « Qu'est-ce qu'on va faire des dix fagots de dix, en quoi on peut les changer ? ». L'enseignante fait alors réaliser l'échange de dix étiquettes de fagots contre une étiquette de sachet à l'élève au tableau. Elle fait ensuite écrire le nombre en chiffres au-dessous des étiquettes puis demande à l'élève de le lire.

Analyse a posteriori de la mise en œuvre en classe et discussion sur les modifications à apporter à la ressource 0a.

L'appui sur la situation initiale de dénombrement permet une dévolution rapide de la situation. Les élèves s'engagent dans la résolution. Leurs principales difficultés sont liées aux savoirs en jeu : position des unités dans l'écriture chiffrée, rôle du zéro et relations entre unités.
La nécessité d'utiliser le zéro est soulignée par Mme D à partir d'une erreur d'élève, mais la position de chaque unité n'est pas donnée explicitement. Elle apparaît à travers l'écriture des chiffres en dessous de la collection avec étiquettes (comme dans un tableau de numération) et la technique de vérification de l'enseignante consistant à commencer par les unités, etc. On peut penser que c'est grâce aux cas avec unités dans le désordre que les élèves peuvent dépasser certaines erreurs de juxtaposition des nombres, mais pour le dernier cas, la simple juxtaposition fonctionne. On ne sait pas quelles ont été les techniques utilisées par les élèves (puisque l'enseignante ne leur laisse pas la possibilité de les formuler).
De plus, le principe décimal apparait (dans le dernier cas) de façon très contextualisée au matériel des étiquettes. Les élèves vont-ils faire le lien avec les groupements réalisés avec la collection ? C'est possible car ce sont les mêmes mots utilisés et les étiquettes représentent

[96] L'enseignante utilise souvent des cas aboutissant à un nombre s'écrivant avec les chiffres 1, 2 et 3, et surtout plusieurs fois le même chiffre ce qui pourrait entraîner des confusions dans le discours sur la position des unités.

ce matériel. Dans la ressource, l'utilisation de dessins de la collection était liée à des raisons de présentation du problème : il est en effet difficile pour les élèves de voir bien distinctement une collection montrée devant le tableau de la classe. Ces dessins prennent une place plus importante que ce que nous avions prévu. Pour l'enseignante, comme elle le dit lors de l'entretien de fin de séance, « le but c'est de s'en détacher ». Mais elle n'utilise pas les unités de numération qui ont un caractère plus général que les mots bûchettes, fagots, sachets et boite[97], attachés à ce contexte particulier. Cela permettrait de dépasser l'idée de groupement ou d'échange par celle plus générale de conversion : 10 centaines = 1 millier, etc.
Comme nous l'avons vu, Mme D montre les techniques attendues lors des phases de conclusion, ce qui semble être pour elle un procédé didactique lui permettant à la fois de faire une évaluation des réponses et d'institutionnaliser la technique visée (notamment par la répétition de la même technique systématiquement). On peut alors penser que les élèves vont chercher à répondre aux attentes de l'enseignante (effet de contrat).
La différence entre les trois premiers cas et le dernier n'est peut-être pas suffisamment mis en évidence dans la ressource *0a*. En effet dans la séance observée, ce dernier cas pose un problème aux élèves puisque la technique institutionnalisée par l'enseignante ne fonctionne plus directement. D'ailleurs beaucoup d'élèves font des erreurs ici. Pourtant le traitement de la phase collective qui suit reste le même : Mme D ne semble pas tenir compte de ces difficultés ou n'a pas les moyens de les prendre en compte. Il pourrait alors être proposé dans la ressource *0b* de séparer cette situation en deux problèmes distincts afin de faire un travail spécifique sur le principe de position (et le rôle du zéro) dans un premier temps à partir de collections déjà groupées. Puis de proposer le problème des collections partiellement groupées montrer la nécessité des conversions. Ce découpage permettrait aussi, du côté de l'enseignant, de donner plus de visibilité aux savoirs en jeu dans la situation.

Déroulement de la troisième séance observée

<u>Début de la séance. De 0' à 24'.</u>
L'enseignante propose deux reprises de l'activité 2.
Tout d'abord en exercice d'échauffement sur ardoise, avec des collections dessinées au tableau et avec correction collective après chaque cas (pendant 9 min). Voici les cas proposés : 2M 2C 1D 2U, 2M 3D 4U, 2M 11D 4U 1C.
Le choix des collections est très proche de ceux de l'activité précédente avec toutefois un dernier cas où la simple juxtaposition ne permet pas d'obtenir une EC correcte. Le déroulement est similaire à celui de la séance précédente.

[97] Pour les milliers, Mme D utilise plus souvent le mot « millier » que « boite » alors que les autres unités de numération ne sont presque pas utilisées dans cette séance.

Ensuite Mme D propose un travail individuel ou par groupe de deux (au choix des élèves) sur une fiche (cf. ci-contre) préparée par le chercheur (à la demande de l'enseignante pour alléger son travail de préparation). Une correction collective est prévue après recherche de toute la fiche par les élèves. Seul le dernier cas fait intervenir une conversion. La correction est assez proche de celle observée lors de la séance précédente. La maîtresse s'attarde un peu plus sur le dernier cas qui a donné lieu à des erreurs. Elle évalue tout d'abord la bonne réponse puis demande aux élèves qui ont fait des erreurs de donner leur nombre. Enfin, elle annonce : « Alors, on va regarder maintenant euh … un petit peu ce qu'il fallait trouver. Et puis, on va comparer avec ce que tu as fait ». Elle explique alors comment « il fallait trouver » en partant du nombre d'unités, puis de dizaines, etc.

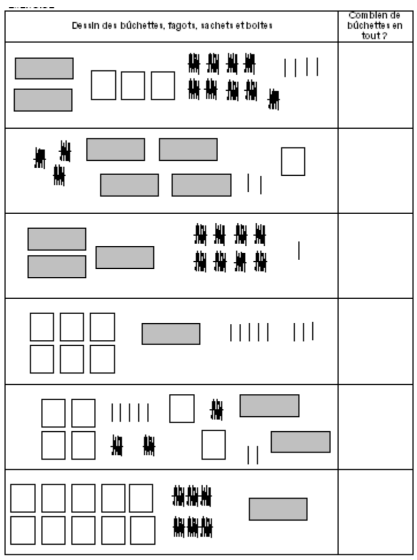


Figure 71 : fiche proposée aux élèves

Voici un extrait de la séance concernant les centaines et milliers (dernier cas de la fiche) :

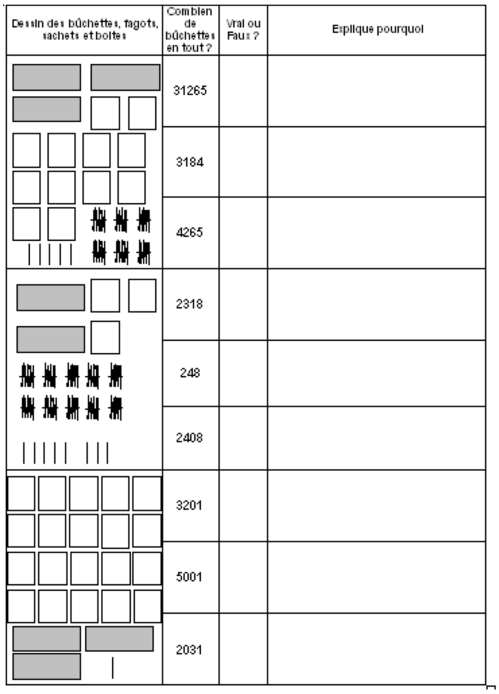
E : on regarde maintenant les centaines. Combien y'en a des centaines ? Combien y'en a des centaines ? Eva.
Eva : zéro
Des e : euh
E : moi je ne suis pas du tout d'accord avec toi. Combien y'a de centaines là sur le dessin ? Sarah ?
Sarah : dix
E : y'en a dix. Alors j'ai dix centaines, donc je peux les transformer en quoi ?
Des e : mille, millier
E : en un millier. Donc du coup, y'aura plus de centaine et y'aura un millier
Une e : non deux milliers
E : pourquoi deux milliers ? Ah oui y'a celui-ci tu as raison. Donc y'a deux milliers donc ça fait deux-mille-soixante. D'accord ? … Qui a eu tout juste ? Bon bah c'est pas grave, hein. Alors maintenant on va passer à un autre exercice un peu plus difficile …

On peut relever, dans cet extrait, que Mme D utilise les unités de numération pour désigner les groupements, ce qui n'était pas le cas pour la séance précédente (sauf parfois pour les milliers). Il est difficile d'interpréter les raisons de ce changement. Peut-être est-ce complexe pour elle aussi de se souvenir du nom des groupements de matériel ?

Les raisons pour lesquelles on « transforme » les 10 centaines en 1 millier n'apparaissent pas explicitement. Pour cela il faudrait regarder les réponses 11060 ou 1160 pour déterminer le nombre de milliers et le comparer avec celui de la collection. Une connaissance en jeu, et qui n'apparait pas dans la ressource *0a*, est le fait de faire le maximum de groupements pour pouvoir utiliser le principe de position. Il faut donc avoir des nombres compris entre 0 et 9 pour chaque ordre d'unité, c'est-à-dire s'écrivant avec un seul chiffre. Ce savoir pourrait émerger de cette situation à condition qu'il y ait un enjeu de validation des réponses des élèves. Cela pourrait être le cas pour l'activité suivante (activité 3, situation 1 de la ressource).

Le dénombrement de collections partiellement groupées (activité 3). Choix de Mme D. Quelles adaptations ?

Nous avons à nouveau réalisé la fiche d'exercices (à la demande de l'enseignante mais à partir de la discussion ayant suivi la séance précédente). Il s'agit d'un exercice de vrai ou faux (voir ci-contre) où les élèves doivent expliquer leur réponse, dans la dernière colonne. Le choix des collections est fait pour amener un travail sur les conversions entre unités et le choix des nombres pour favoriser l'apparition de l'erreur due à la simple de juxtaposition des nombres. L'enjeu de cette situation étant la validation des réponses des élèves pour faire émerger la nécessité des conversions entre unités.
Cependant, comme cela a été précisé dans l'analyse *a priori* une autre technique est possible comme le comptage oral (par unités simples : mille, deux-mille, etc.).
Il n'y a pas de matériel à disposition des élèves pour une vérification mais l'enseignante a choisi de faire chercher les élèves par groupes de deux (ce qui fait suite à une discussion que nous avons eue en fin de séance précédente).



Dessin des bûchettes, fagots, sachets et boites	Combien de bûchettes en tout ?	Vrai ou Faux ?	Explique pourquoi
	31265		
	3184		
	4265		
	2318		
	248		
	2408		
	3201		
	5001		
	2031		

Figure 72 : fiche pour l'activité 3

C'est la principale adaptation de la situation. Cela pourrait permettre des rétroactions du milieu.

Déroulement (activité 3).

<u>De 27' à 43' (fin de la séance).</u>
L'enseignante présente la situation de manière collective. La dévolution est facilitée par le fait qu'il s'agit toujours du même problème (dénombrer). Cependant pour faire dévolution de l'enjeu de validation, l'enseignante explique :

> « On fait par groupes de deux et on en discute. Je vais vous faire passer la feuille. On a toujours des collections. Et puis là *(montre la deuxième colonne)* on a mis des nombres et forcément y'en a qui sont pas justes. Il va falloir trouver celui qui est juste, qui correspond à la collection et expliquer pourquoi les autres sont faux. »

Après avoir distribué les feuilles, elle précise le nombre de collections à dénombrer et les trois possibilités pour chacune car les délimitations sur la fiche pourraient ne pas être comprises par les élèves. Elle termine en disant que l'« on met ici vrai ou faux et on explique à chaque fois pourquoi c'est vrai ou pourquoi c'est faux ».
Les élèves commencent alors à chercher (pendant 13 minutes, c'est-à-dire jusqu'à la fin de la séance). Ils rencontrent des difficultés, dès le premier cas, liées au fait d'avoir plus de dix unités à certains ordres. L'enseignante intervient très rapidement dans un groupe (au bout de 1 minute de recherche) : « qu'est-ce qu'on a fait quand on avait 10 sachets ? […] on faisait la boite des mille ». Un autre groupe pense que tout est faux : l'enseignante précise alors

que ce n'est pas possible. Finalement au bout de 7' de recherche l'enseignante intervient pour la classe entière :

> « Les enfants ! Chut. Vous pouvez aussi avec le crayon quand vous voyez qu'il y a des collections où il y a plus de dix, vous pouvez les entourer pour changer. Ça peut vous aider pour savoir le nombre. Tu peux entourer sur le dessin, tu as le droit ».

Nous retranscrivons ci-dessus l'échange de l'enseignante (de 2 minutes) avec un groupe qui ne sait pas comment gérer les 12 centaines (premier cas). Elle utilise alors le matériel des bûchettes qu'elle va chercher au fond de la classe.

E : Est-ce que t'as compté tes centaines ?
e : Oui
E : Combien y'en a ?
e : Y'en a douze
E : Et est-ce qu'on va pouvoir les laisser comme ça ?
e : *… inaudible*
E : Ah on va pouvoir les mettre en boite de mille. Entoure-moi dix centaines. […]
L'élève entoure. L'enseignante va chercher le matériel des bûchettes.
E : Alors combien je vais pouvoir mettre dans ma boite de mille ? … Combien il en faut de sachets pour faire mille ?
L'élève compte.
E : Est-ce que vous êtes d'accord que ce que vous avez fait sur le dessin c'est bon ? Il en reste combien des centaines ?
e : deux
E : deux, donc maintenant est-ce que là je les vois encore les centaines ?
e : Non
E : Qu'est-ce que je vois à la place ?
e : Des milliers.
E : Alors tu peux peut-être les barrer et fabriquer un millier. Dessine-moi un millier à la place. Tu les barres, on ne les voit plus, elles ont disparu. Maintenant elles se sont transformées en un millier donc tu vas dessiner un rectangle de un millier. D'accord ? Dessine un rectangle sinon tu vas mal compter. Dessine un rectangle de un millier. […] Donc ça en fait combien du coup ?
e : Quatre mille
E : Ça peut être ça. […] A chaque fois faites attention quand on peut faire un échange à le faire.

La phase collective de conclusion aura lieu lors de la prochaine séance.

Analyse a posteriori de la mise en œuvre en classe.

L'enseignante est amenée à intervenir dans les groupes. Cela peut être lié au fait que le travail par deux ne permet pas les rétroactions du milieu escomptées. Il est possible que les cas que nous avons proposés dans la fiche ne soient pas assez progressifs dans la difficulté. Peut-être aussi que la forme de la fiche (qui ressemble à une évaluation) restreint l'activité des élèves. Il y a en effet peu de place pour chercher la réponse. Il est aussi possible que les élèves ne s'autorisent pas à utiliser un comptage et cherchent à appliquer la technique montrée jusque là par l'enseignante. Ils rencontrent alors la difficulté de conversion, ce qui amène l'enseignante à les aider sur ce point. D'ailleurs constatant les difficultés nombreuses des élèves, elle finit par intervenir pour toute la classe en demandant d'entourer sur le dessin quand il y a dix objets d'une même unité. On ne voit toujours pas apparaître la raison pour entourer.

On peut se demander si la réalisation d'échanges avec représentation schématique de la collection est une étape vraiment nécessaire dans le processus global de la séquence avant

de faire des conversions entre unités. Nous n'avions en effet pas prévu que de représenter la collection amènerait à faire un travail spécifique de conversion à partir de cette représentation. Nous pensions *a priori* que les conversions effectuées le seraient en référence aux groupements avec matériel ou aux relations entre unités. La technique d'échange avec le dessin de la collection semble ici se substituer au matériel.
De plus, ce qui nous semble essentiel dans le problème posé ici concerne le passage de la collection (ou sa représentation) à l'écriture chiffrée. C'est, en effet, dans les allers-retours entre ces deux (ou trois) ostensifs que l'élève peut prendre conscience de la question du nombre d'unités isolées à chaque ordre permettant d'appliquer le principe de position ou non. Il lui est donc nécessaire d'éprouver lui-même ce qui se passe dans le cas où il écrit le nombre d'unités à chaque ordre pour faire émerger cette nécessité. Par exemple, pour le premier cas si l'élève traduit 3M 12C 6D 5U par 31265, le problème du nombre de milliers devrait se poser en comparaison avec le contenu de la collection. Or dans la mise en œuvre de l'enseignante, le fait de demander aux élèves de faire les « transformations » ne leur laisse pas la responsabilité du passage entre ces deux ostensifs : les actions réalisées par les élèves sur la collection se font alors par effet de contrat. De plus, si, à la demande de l'enseignante, tous les élèves ont déjà effectué ces groupements, cela va tuer l'enjeu de validation de la phase collective à suivre. Il pourrait alors être nécessaire de traiter la tâche inverse de réalisation de la collection à partir du nombre : c'est en effet en cherchant à réaliser une collection de 31265 bûchettes que la nécessité de ne laisser qu'un chiffre par groupement pourrait apparaître. Mais cela n'apparait pas dans cette première ressource.

<u>Déroulement de la séance suivante.</u>
La phase collective de conclusion de la séance précédente a lieu pendant les 16 premières minutes de la séance. Voici la consigne donnée par l'enseignante :

> « On reprend vous savez le petit travail que vous avez fait en petit groupes, les « vrai ou faux ». On va essayer de les refaire ensemble parce que c'était difficile. Alors dans la première collection on avait ? »

L'enseignante dessine au tableau la première collection et écrit les trois nombres proposés dans l'exercice. Il apparait qu'elle a rapidement une gestion de cette phase collective différente de ce que nous avions observé jusque là. Elle laisse en effet davantage de responsabilité aux élèves pour la validation en leur demandant d'expliquer leur réponse, ce qui témoigne d'une évolution du contrat didactique. Voici une transcription des échanges dans la classe pour cette première collection pour laquelle nous avons souligné les moments qui montrent cette évolution.

> E : Qu'est-ce qu'on peut dire de ces nombres là ? Est-ce qu'il y a une équipe qui veut dire ce qu'elle en a pensé ? Camille.
> Ca : moi j'ai dit que ça peut pas être le 1.
> E : <u>pourquoi ?</u>
> Ca : parce que y'a cinq chiffres.
> E : voilà alors si on est un tout petit peu logique, on est en train d'étudier les nombres à ?
> Des e : quatre chiffres
> E : Donc celui-là a priori ça semblait un petit peu grand. Après regarde les deux autres.
> Ca : le deuxième, euh … *(inaudible)*
> E : <u>pourquoi ?</u>
> Ca : déjà on peut pas euh …
> E : <u>prenez des indices dans le nombre</u>. <u>Pourquoi ça peut pas être très rapidement le deuxième ?</u>

Ca : parce qu'il est plus petit
E : c'est plus petit que la collection, <u>je sais pas moi</u>.
Un e : c'est que les centaines y'en a douze et là y'en a une centaine
E : y'en a qu'une, t'as raison. Et puis y'a les trois mille qui sont là et y'a qu'une centaine donc elle a raison […] Elle a raison Alizée, y'a qu'une centaine alors que nous y'en a douze. Alors lui forcément il est pas bon déjà. Qu'est-ce qu'on peut dire du dernier ? Leila.
Leila : c'est que on demande trois millions et y'en a quatre des millions.
E : pas des millions, attention Leila, des ?
Des e : mille
E : ou des ?
Des : milliers
E : milliers. [...] Soit tu peux dire des milliers, pas million, soit tu peux dire des mille, comme tu veux (*l'enseignante écrit au tableau ces deux termes*). Les millions c'est au-dessus encore, on verra plus tard.
Leila : y'a trois milliers et là y'a quatre milliers.
E : alors <u>Leila elle me dit on a trois milliers tu nous en présentes quatre c'est faux. Est-ce que vous êtes d'accord ?</u>
Les e : non, non
E : alors non, on n'est pas d'accord <u>mais il faut expliquer</u>. Léana.
Leana : c'est qu'en fait avec les centaines y'en a douze alors on peut faire dix centaines et dix centaines ça fait un millier.
E : alors moi je vais faire ce que dit Léana mais je vais carrément entourer je vais faire un paquet, d'accord ? Alors on a douze centaines, je vais en prendre … regardez-bien, je vais en prendre dix. Et ces centaines-là, je vais en faire quoi ?
Léana : les transformer en millier.
E : je vais les transformer en un millier supplémentaire, d'accord ? Alors là maintenant je les barre, je n'en ai plus, j'aurais pu les effacer aussi. Et maintenant on voit quoi en fait ? On en a combien des milliers ?
Une e : y'en a quatre.
E : on en a vraiment quatre parce qu'on a vu qu'on pouvait en prendre dix et les transformer. Donc j'ai bien quatre mille. Si on veut prendre un peu dans les centaines, combien il nous en reste. Romain ?
Ro : deux
E : Combien on a de dizaines ?
Des e : six
E : et combien y'a d'unités ?
Des e : cinq.
E : cinq. Alors est-ce que c'était ce nombre là ?
Les e : oui
E : Vous voyez comment il faut travailler.

Le déroulement pour les deux autres cas est assez proche.

<u>Analyse *a posteriori* de l'épisode transcrit</u>

Le premier nombre est écarté par une raison non mathématique, alors qu'il pose le problème des deux chiffres à un certain rang, qui est essentiel pour faire émerger la nécessité des groupements. Cela devrait apparaître dans la future ressource (version *0b)*.
Pour le deuxième cas la comparaison avec la collection permet à une élève d'écarter cette réponse avec l'aide de l'enseignante. Enfin le dernier cas montre bien le changement de posture de l'enseignante par rapport aux séances précédentes car il s'agit de la bonne réponse mais elle demande quand même aux élèves d'expliquer, en s'appuyant sur la contradiction apportée par une élève : on ne voit que 3 milliers dans la collection alors qu'il y en a 4 dans le nombre en chiffres, par comparaison de l'EC et de la collection (dessinée). Les

conversions apparaissent alors ici comme nécessaires pour lever la contradiction, alors que dans les séances précédentes, la raison pour laquelle il fallait faire des conversions n'apparaissait pas, les conversions étant sous contrat. Cependant la raison pour écrire un chiffre par rang n'apparaît toujours pas.
On peut interpréter cette demande de justification comme étant liée soit au fait que dans la réponse attendue des élèves il faut « expliquer pourquoi » (dernière colonne) soit au fait que cette réponse (le nombre donné dans l'exercice) n'a pas le même statut pour l'enseignante que les réponses erronées données par les élèves dans la phase collective de la séance précédente car son traitement fait partie de la tâche demandée aux élèves. Il y a donc ici quelque chose d'intéressant du point de vue des caractéristiques de cette situation qui semble pouvoir avoir une influence sur la gestion de la phase de conclusion par l'enseignante.

La suite de la séquence

Voici en quelques mots un résumé de la suite de la séquence et les points importants concernant les situations et la ressource que nous avons pu y relever.
Dans la séance 5, Mme D propose un travail de décomposition de nombres à partir du « jeu des familles » (cf. annexe CD-ROM). Ici les collections ne sont plus dessinées mais représentées avec les unités de numération. Mme D propose pour aider les élèves de dessiner les collections sur leur brouillon pendant la recherche « comme la dernière fois ». Cependant cette technique s'avère ici plus coûteuse et pas vraiment nécessaire tant qu'il n'y a pas de conversion en jeu (elles seront en jeu dans la suite de cette activité). On peut observer encore des difficultés chez les élèves quand les unités ne sont pas données dans l'ordre conventionnel (par exemple 4d 1c 5u 2m = 4 152), ce qui témoigne de la fragilité des connaissances construites par les élèves. Mme D intervient alors dans les groupes en s'appuyant sur l'affiche réalisée lors de la première situation ou en ressortant le matériel des bûchettes. Cela permet de faire le lien entre les unités de numération et la quantité correspondante.
Le passage des groupements réalisés à partir de représentations schématiques aux conversions entre unités n'est pas sans poser de difficultés aux élèves.
La sixième séance n'a pas été observée. Lors de la septième séance, Mme D a proposé la situation de décomposition de nombres (« de nouvelles familles »). Le premier nombre à décomposer est donné par un élève : 2 801. Les élèves sont par groupes et doivent trouver différentes décompositions en utilisant les unités de numération. Des groupes proposent des décompositions canoniques en variant l'ordre des unités, ce qui est tout à fait possible dans la situation. D'autres proposent des décompositions s'appuyant sur les conversions : 1m 0d 28c 0u (erroné), 1m 18c 1u, … L'enseignante prend la responsabilité de la conclusion (évaluation) mais en passant par une vérification à partir des propositions des élèves, en appui sur un tableau de numération, contrairement à ce qui se passait dans les séances précédentes. Elle montre donc la technique inverse de celle qui est visée puisqu'elle passe d'une EUN (produite par les élèves) à une EC. Cela laisse la possibilité aux élèves de chercher une technique par eux-mêmes. Mais les techniques directes (pour passer de l'EC à l'EUN) ne seront pas formulées au cours de la séance, elles resteront invisibles.
Le déroulement est le même pour le deuxième cas (2999) proposé encore par un élève.
Enfin Mme D propose un vrai ou faux pour finir, avec différentes décompositions et poursuit ainsi dans une huitième séance (non observée).

Mme D propose également en fin de séquence des phrases à écrire dans le cahier. Ces traces s'appuient sur la description des savoirs proposée dans la ressource.
Nous allons maintenant présenter les résultats des évaluations proposées.

II.3 Interprétation de la comparaison des résultats des évaluations initiales et finales

On trouvera les énoncés des évaluations en annexe II.1 et les résultats des deux évaluations de la classe de Mme D en annexe II.2.
Sur la lecture/écriture des nombres, la comparaison de nombres les résultats sont proches entre les deux évaluations et restent globalement élevés (entre 86% et 96% de réussite).
Pour les recompositions on observe une amélioration des résultats. Pour les cas avec neuf unités ou moins à chaque ordre, on passe de 50% à 87% de réussite. Cela tend à montrer que les élèves se sont approprié des connaissances liées au principe de position. Ils prennent en compte le rôle du zéro (malgré des erreurs encore sur ce point) et tiennent compte du rang des unités (ils ne placent plus les chiffres systématiquement dans l'ordre donné). Pour les cas avec plus de dix unités à un certain ordre, on observe encore de nombreuses difficultés mais une amélioration (passage de 11% à 33% de réussite). Pour les conversions, les résultats sont stables entre les deux évaluations (entre 43 et 44%). Il en est de même pour la résolution de problèmes de *nombre de* en contexte, toujours aussi peu réussie (entre 0 et 1 bonne réponse).

II.4 Des éléments sur l'usage de la ressource *0a* par l'enseignante, lors de l'entretien final

L'entretien final a été l'occasion de revenir sur certains éléments liés à l'usage de la ressource par Mme D.

<u>La partie introductive (apports pour l'enseignant sur la numération)</u>
Dans son utilisation de la ressource l'enseignante s'est appuyée sur la partie introductive, en particulier les premières pages (« j'ai trouvé super bien cette partie là ») mais pas des apports sur le lien avec les techniques opératoires (« parce que moi ma finalité c'était vraiment le début […] Je l'ai lu mais c'est vraiment tout le début qui m'importait au moment de la mise en œuvre de la séquence »). Pour elle tout était utile dans la ressource, ce qu'elle justifie par le fait qu'elle n'a pas d'expérience en CE2 : « un enseignant qui aurait des CE2 depuis longtemps il n'aurait peut-être pas besoin de tout ça mais moi ça m'a été utile ».
Mme C nous fait part d'un problème qu'elle a rencontré : la question des classes, en lien avec le rang. Elle s'interroge sur la possibilité de parler de classes aux élèves pour justifier par exemple que l'on met un espace entre le rang des milliers et des centaines. Elle ajoute : « j'ai pas su l'écrire dans la trace écrite, j'ai pas su l'aborder », ce qu'elle justifie par le fait qu'avec ces élèves de CM2 elle traitait directement la question des classes. Cette question pourrait faire l'objet d'apports pour l'enseignant dans la ressource.

<u>L'usage de la ressource pour la construction d'une séquence</u>
Concernant l'organisation de la séquence, Mme D est restée très proche de la séquence prévue en mettant en œuvre uniquement les situations proposées et toutes les situations. Cela peut être un effet du contrat de l'expérimentation. Sans le vouloir, nous avons peut-être laissé penser à l'enseignante qu'il fallait tester toutes les situations malgré les précautions prises dans le protocole que nous lui avions donné. Elle signale, au cours de l'entretien final, qu'elle aurait bien vu une gradation de la difficulté : une séance sans mise

en jeu des groupements dans les exercices de dénombrements de collections (après le dénombrement de la collection « en vrac »).
Au niveau du temps à accorder à la séquence, elle nous dit que la numération est un thème important et que ce n'est donc pas du temps perdu, malgré la durée importante de la séquence (elle n'aurait pas forcément passé autant de temps sur une notion géométrique). Cependant elle précise que le travail sur la numération n'est pas terminé puisqu'elle va poursuivre avec les encadrements et la comparaison.

L'usage de la ressource pour la construction et la mise en œuvre des séances

Mme D semble ne pas avoir ressenti de changement de pratique induit par l'utilisation de la ressource, hormis pour la « manipulation », ce qui pourrait traduire une bonne adaptabilité de la ressource :

> « Les situations de groupe j'en fais, la manipulation j'en fais pas ou peu en tout cas en numération. […] Les situations qu'on a abordées ça ne m'a pas changé ma gestion de classe, du tout, parce que j'avais déjà l'habitude de travailler comme ça. Peut-être que j'étais moins frontale que pour d'autres situations plus classiques […] Je fonctionne tout le temps par affiche […] En fait moi je me suis servie de mes outils à moi. J'ai pas créé de nouveaux outils sauf le matériel parce que là j'avais pas le choix, c'était le contenu qui l'exigeait, sinon au niveau de la gestion de la classe j'ai fait comme j'ai l'habitude de faire. […] Les traces écrites, j'ai été influencée par les tiennes de manière à fournir quelque chose de didactique […] mais au niveau de la forme c'est moi qui ai choisi la forme pour essayer de m'adapter à cette classe d'âge. ».

Elle a trouvé la description des situations « claire ». Elle s'est posé des questions au niveau de la mise en œuvre parce que tout n'était pas détaillé. Cela lui permettait d' « affiner, de ne pas être coincée » pour la mise en œuvre. Cependant elle signale que cela est coûteux pour l'enseignant : « j'ai dû réfléchir pour savoir comment j'allais mettre en œuvre et cette réflexion t'as pas forcément ni le temps, ni l'envie de la faire ». D'un autre côté elle a conscience que cela lui permet une certaine liberté : « en même temps c'est ce qui fait l'intérêt du document parce que t'es pas obligé de calquer une méthode ». Elle nous propose de rajouter des fiches d'exercices toutes prêtes que l'enseignant pourrait modifier en fonction de sa classe.

Une remarque sur l'utilisation d'ERMEL par Mme D

Sur l'utilisation plus globale des ressources Mme D signale qu'elle utilise *ERMEL,* de temps en temps, quand elle se sent en difficulté :

> « le fichier ne m'allait pas du tout, donc j'ai cherché des trucs dans Ermel. Voilà ponctuellement quand moi-même je me sens en difficulté, tu vois, et que je ne sais pas faire passer […] quand ma pédagogie elle est tellement ras les pâquerettes, pour les situations de découverte j'ai Ermel ».

Le rôle que Mme D fait jouer à cette ressource est sur plusieurs points en adéquation avec notre projet. Ce qu'elle dit ici témoigne de l'intérêt de ce genre de ressource.
Nous allons maintenant décrire des ajustements apportés à la ressource, en tenant compte de ces analyses, afin de la proposer à une deuxième enseignante.

II.5 Quelques ajustements des situations et de la ressource pour la deuxième pré-expérimentation (version 0b de la ressource)

Partie introductive de la ressource 0b *: description des enjeux, des choix, …*

Le paragraphe « l'importance d'une bonne compréhension de la numération pour donner du sens aux techniques opératoires … » n'a pas été regardé en détail par l'enseignante. On peut faire l'hypothèse que c'est en particulier parce que les techniques opératoires citées ne sont pas celles qui sont travaillées principalement en CE2. La modification faite consiste donc à supprimer la technique de la division pour la remplacer par la multiplication.
Le paragraphe sur la séquence semble également ne pas avoir été regardé en détail par l'enseignante. Nous le modifions de façon à montrer une vue globale du canevas didactique proposé : les situations, types de tâches et de l'avancée vers une utilisation des unités de la numération (pour la décontextualisation) tout en montrant l'appui nécessaire sur le matériel pour de nombreuses situations. Nous n'évoquons pas ici la représentation schématique du matériel, qui n'apparaît pas comme une étape nécessaire et qui peut même amener des difficultés inutiles.

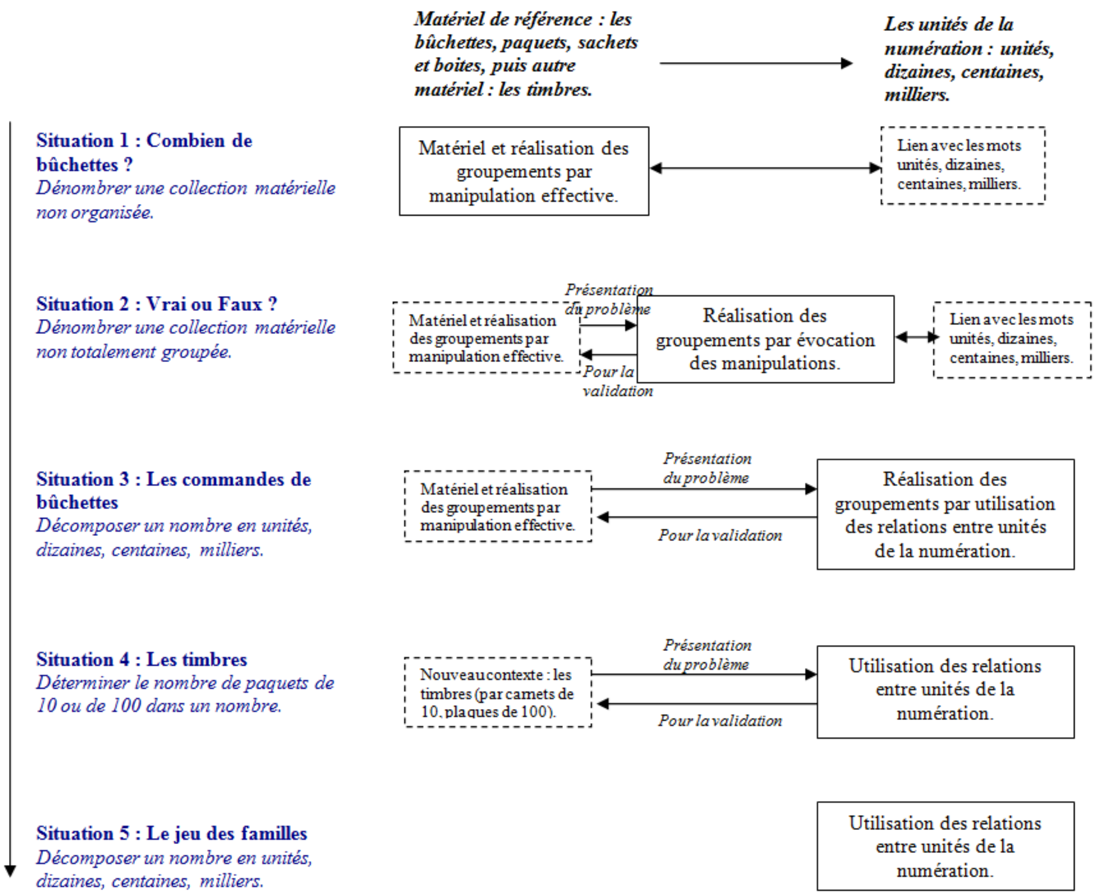


Figure 73 : schéma général de la séquence proposé dans la ressource 0b

Cette importance du passage aux unités de numération est aussi rappelée dans le paragraphe « Nos choix ». La difficulté des élèves qui consiste à faire une juxtaposition des nombres (sans prise en compte de la position) est mise en avant. Enfin le rôle du matériel comme point d'appui pour les élèves pour contrôler leurs résultats est souligné.

Partie « Les situations »

Description générale des situations

Pour alléger les descriptions des situations nous choisissons de ne pas donner le détail du contenu de l'institutionnalisation dans ces descriptions. En effet, cela fait une répétition par rapport à la partie introductive où les savoirs sont explicitement donnés. Le contenu des moments de synthèse est alors indiqué de manière très succincte. Comme l'a fait Mme D ici on peut penser que l'enseignant va s'appuyer sur la description proposée dans la première partie.

Des précisions ont été apportées concernant les phases de conclusion. Il est indiqué que :

- les élèves échangent et débattent sur la validité des solutions ;
- l'enseignant dispose du matériel ou du tableau (ou MCDU au-dessus du nombre) pour aider les élèves à vérifier par eux-mêmes leurs réponses.

Nous continuons de faire le choix de ne pas donner de fiches d'exercices toutes faites car cela nous permet de mieux étudier les choix de l'enseignant (en particulier pour les valeurs des variables didactiques) en lien avec ce qui est proposé dans la ressource.

En contrepartie des précisions sont apportées sur le lien entre les valeurs des variables didactiques, les savoirs en jeu et les erreurs des élèves. Par exemple pour dénombrer 1 millier + 12 dizaines + 2 unités il faut que l'enseignante comprenne qu'une juxtaposition des nombres permet de réussir et ne permet pas de s'assurer que l'élève a mis en jeu le savoir visé.

Les situations

La première situation est maintenant « découpée » en deux parties :

- une première partie de dénombrement d'une collection en vrac suivi d'un exercice de dénombrement de collections déjà groupées pour travailler le principe de position ;
- une deuxième partie dans laquelle on met en jeu les conversions entre unités à travers un « vrai ou faux ? » permettant des échanges autour des erreurs courantes (par exemple dues à une juxtaposition des nombres sans prise en compte de la position).

Le « vrai ou faux ? » semble avoir amené l'enseignante observée à davantage prendre en compte les erreurs des élèves dans la phase de conclusion. Cela sera-t-il confirmé avec la deuxième enseignante ?

Dans cette situation, nous préciserons également, dans les éléments de synthèse, un savoir qui n'avait pas été bien identifié précédemment dans la ressource *0a* : le fait de faire le maximum de groupements pour pouvoir utiliser le principe de position. Il faut, en effet, avoir des nombres compris entre 0 et 9 (à un chiffre) pour chaque ordre d'unité.

Une situation de « commandes » de bûchettes, plutôt que de « décomposition de nombres » est proposée après les situations de dénombrement de collections. Cela s'appuie sur une mise en scène des jeux 2 et 2' de la situation fondamentale pour lesquels il faut partir d'une EC et construire une collection. Ici on ne laisse pas à l'élève la possibilité de constituer effectivement cette collection (pour des raisons pratiques liées à la mise en œuvre dans une classe mais aussi pour rendre coûteux le comptage en unités simples). Ainsi l'élève doit produire une désignation de la quantité en EUN. La réalisation d'une collection ayant cette quantité d'objets peut être réalisée dans un second temps (éventuellement avec l'enseignant) et peut servir de vérification. Il s'agit donc d'une mise en scène du jeu 4. Nous parlons de situation de « commande », car nous donnons un nombre (EC) à l'élève et celui-ci

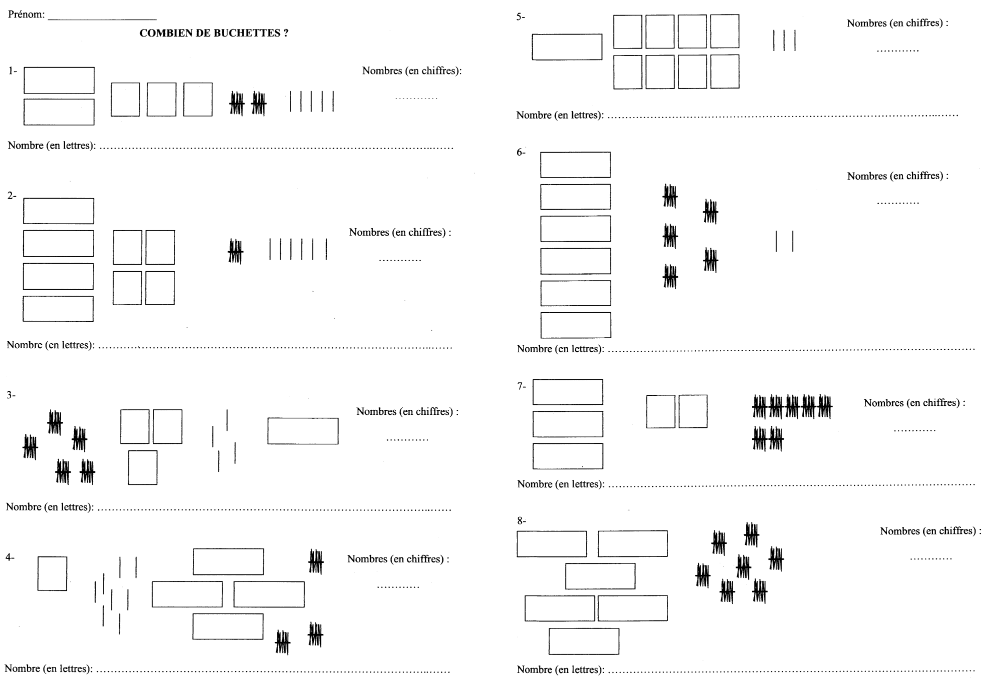
doit « commander » la quantité correspondante (en EUN) à un « marchand », qui dispose d'un « stock » à sa disposition. On trouve de telles situations dans les manuels[98] *Cap Maths* ou *ERMEL* (par exemple la situation des craies). En cas d'absence de groupements en milliers disponibles dans le stock, c'est la relation entre millier et centaines qui est en jeu puisque le problème est de faire des centaines à partir du nombre de milliers donné par l'EC (conversions à partir de l'équivalence 1 millier = 10 centaines).
La ressource ainsi modifiée va être mise à l'épreuve dans une deuxième classe.

III. Pré-expérimentation, classe de Mme C (version 0b)

III.1 L'enseignante, la classe, la séquence

Mme C est une enseignante qui a déjà participé à l'expérimentation de la partie I l'année précédente. Nous l'avons donc déjà présentée. Cette année, Mme C a encore une classe à double niveau CE1/CE2, composée cette fois de 10 élèves de CE2 (et 10 élèves de CE1).
Comme elle n'était pas totalement satisfaite de l'approche de la numération proposée par son manuel (« J'apprends les maths CE2 », cf. partie I) nous lui avons proposé de participer à cette pré-expérimentation. Pour nous, cela a l'avantage d'avoir déjà des informations sur sa façon d'enseigner la numération, ce qui peut nous permettre de repérer des éléments nouveaux apportés par l'usage de cette ressource, même si cette enseignante proposait déjà un travail mettant en jeu les deux principes de la numération en appui sur les activités de son manuel.
La séquence de Mme C se compose de 8 séances, dont 5 ont été observées. Elle sera suivie d'un travail sur la comparaison et les encadrements de nombres.
La première séance de dénombrement d'une collection en vrac n'a pas été observée. Les élèves ont effectué les groupements successifs par dix jusqu'aux milliers. C'est seulement dans la deuxième séance (observée) que, sous la responsabilité de l'enseignante, par un comptage en unités simples collectif, la classe trouve le nombre oralement puis l'écrit en chiffres. Des exercices de dénombrement de collections déjà groupées sont alors proposés. Les élèves doivent écrire le nombre à la fois en lettres et en chiffres. Nos observations ne nous permettent pas de connaître les procédures effectivement utilisées par les élèves. Passent-ils d'abord par l'oral qu'ils traduisent ensuite en chiffres ou l'inverse ?
Lors des phases collectives, le tableau de numération est proposé par l'enseignante, ce qui permet de mettre en évidence la position des différentes unités. Les groupements sont alors nommés avec les unités de numération (ce qui était aussi le cas l'année précédente lorsqu'elle utilisait son manuel). Les principales erreurs des élèves sont liées à la représentation utilisée qui crée une confusion chez les élèves avec le matériel utilisé dans le manuel de la classe (« J'apprends les maths CE2 ») où les dizaines sont représentées par une barre verticale, qui correspond ici aux unités. L'enseignante utilise un vocabulaire contextualisé pour parler des unités (bûchettes, paquets, …) tout en utilisant parfois les unités de numération. Cela permet d'engager une première décontextualisation mais aussi de faire le lien avec les savoirs construits précédemment sur les unités, dizaines, centaines.
Mme C termine la séance en donnant une fiche d'exercices reprenant le même exercice, que les élèves finiront au cours de l'après-midi.

[98] Cf. partie I, chapitre 3


Prénom: ________________
COMBIEN DE BUCHETTES ?

1- Nombres (en chiffres): ....
Nombre (en lettres): ....

2- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

3- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

4- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

5- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

6- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

7- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

8- Nombres (en chiffres) : ....
Nombre (en lettres): ....

Figure 74 : Fiche d'exercices proposée par Mme C

Il y a assez peu d'erreurs (5 élèves ne font aucune erreur). Aucune synthèse de fin de séance n'est proposée (alors que cela était indiqué dans la ressource).
Conformément aux ajustements réalisés pour la ressource, le travail est donc ici centré sur le principe de position de la numération. Ce découpage (proposé par Mme D) est apprécié par Mme C comme elle l'explique lors de l'entretien final :

> « Je pense que dans l'ensemble ils s'en sont bien tirés parce qu'on avait essayé de faire quelque chose d'évolutif par rapport aux difficultés. Quand le nombre était simple que tous les milliers les centaines étaient représentés, ça n'a pas posé de problème. Après quand on mélange, quand on bouleverse les positions des chiffres ça n'a pas semblé poser trop de problèmes non plus, une fois qu'on a redit bien ce que représentait chaque symbole. Tout a découlé. Le passage à des collections non finies[99] non plus. Comme on est resté appuyé quand même un moment sur la représentation, donc ça faisait référence à ce qu'ils avaient manipulé, j'ai trouvé que du coup jusque là ça a coulé sans problème. C'est plus les bons de commande qui ont posé plus de difficulté parce qu'il n'y avait plus de représentation ».

Nous avons choisi de faire l'analyse de la situation du « vrai ou faux » proposée lors de la troisième séance car il s'agit d'une situation qui doit permettre de faire émerger la nécessité des conversions pour le dénombrement d'une collection. Nous essaierons de pointer les éléments que nous avons observés dans d'autres séances et qui ne sont donc pas spécifiques à cette situation. Nous ferons également le lien avec nos observations de l'année précédente.

III.2 Analyse de la mise en œuvre d'une situation proposée dans la ressource *0b*

Mme C commence par faire un rappel de la séance précédente (« combien de bûchettes ») et des savoirs en jeu. La situation « vrai ou faux ? » est traitée collectivement en laissant les

[99] C'est-à-dire non totalement groupées.

élèves chercher sur ardoise. En fin de séance est organisée une phase de travail individuel sur fiche, pour permettre aux élèves de s'entraîner.

<u>Début de la séance 3 : rappel de la séance précédente, collectif. De 0' à 14'.</u>
L'enseignante commence par réactiver les relations entre les unités en s'appuyant sur le matériel qu'elle montre aux élèves : dans un groupe de mille il y a dix groupes de cent, dans un groupe de cent il y a dix groupes de dix (reformulé aussi avec les mots « boites », « sachets », … et « mille », « centaines », …). Ensuite elle dessine une collection au tableau (représentation schématique de 2 sachets, 4 boites, 4 fagots, 8 bûchettes) en s'attachant encore à faire le lien entre le dessin et les objets matériels (en particulier pour un élève qui était absent lors de la séance précédente).
Pour ce premier cas les groupements ne sont pas donnés du plus grand au plus petit, ce qui amène les élèves à dépasser une erreur due à une simple juxtaposition des nombres. Les élèves cherchent, puis l'enseignante envoie un élève au tableau (bonne réponse) et lui demande d'écrire le nombre puis de le lire. La technique utilisée par l'élève reste invisible. L'enseignante prend en charge la vérification, mais laisse l'élève effectuer le comptage (en unités simples) :

> E : qu'est-ce qui correspond aux paquets de mille sur le dessin ?
> *L'élève montre le rectangle.*
> E : alors on y va, on compte.
> e : cent, euh mille, deux-mille, trois-mille, quatre-mille.
> E : quatre mille, je suis d'accord, on compte bien quatre mille. Les paquets de cent ils sont où ?
> e : (*il montre le carré*) Deux-cent. Dix, vingt, trente, quarante.
> E : quatre-mille-deux-cent-quarante, et ?
> e : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit.
> E : quatre-mille-deux-cent-quarante-huit. Très bien.

Mme C dessine alors une deuxième collection (représentation schématique de 2 bûchettes, 3 boites, 5 sachets). Pour ce cas, les groupements ne sont donc pas donnés du plus grand au plus petit et il y a absence d'une unité. Cela amène les élèves à utiliser le 0 pour écrire l'absence de dizaines isolées. En effet si on en reste à la première variable, il suffit de ranger les unités de la plus grande à la plus petite et d'écrire les chiffres dans l'ordre correspondant. Ici, il devient nécessaire de prendre en compte la position des unités. Mme C envoie cette fois au tableau un élève qui a fait une erreur (Franck, élève absent à la séance précédente). Il écrit son nombre en chiffres : 35002. Elle lui demande d'expliquer. L'élève a bien vu qu'il y avait 5 centaines mais a traduit cinq-cent-deux en 5002. L'enseignante lui demande d'écrire « cinq-cent-deux en chiffres » : l'élève écrit 502. Elle demande alors à un élève qui a dessiné un tableau de numération sur son ardoise de le redessiner au tableau.
Mme C demande alors à Franck de replacer ses chiffres dans ce tableau : il écrit 3 dans la colonne des milliers, 5 dans la colonne des centaines et 2 dans la colonne des unités. Elle cherche alors à lui faire comprendre pourquoi il est inutile d'écrire les deux zéros pour faire cinq-cents :

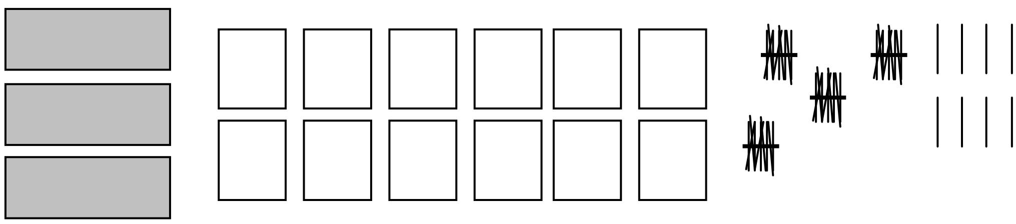
> E : comment on sait que le cinq il vaut cent là, grâce à quoi ?
> Une e : parce que y'a les petites boites.
> Franck : parce qu'il y a un c pour dire centaine
> E : et quand il n'y est pas le c comment tu sais le cinq quand il est là il vaut cent ?
> Franck : parce que là y'a les milliers
> E : d'abord le premier correspond aux unités, le deuxième ?
> Les e : les dizaines
> E : le troisième ce sont les paquets de cent. D'accord ? Donc inutile d'écrire cinq cent, on sait que le cinq il vaut cent, enfin cinq paquets de cent. D'accord ?

L'erreur commise par un élève permet à l'enseignante de rappeler le savoir en jeu (principe de position) qui n'était pas encore apparu du fait de l'utilisation du comptage. Elle utilise pour cela le tableau de numération qui permet de faire le lien entre la position et les unités de la numération, ce lien étant également formulé oralement par l'enseignante, sauf pour les milliers.
Ces deux cas de dénombrement permettent donc bien à l'enseignante de faire un rappel des techniques de dénombrement et du savoir en jeu. Pour cela elle enrichit le milieu lors de la deuxième phase collective par l'introduction d'une erreur d'un élève. Ce fonctionnement avait déjà été observé lors de la séance précédente où l'enseignante avait proposé un jeu sur les variables permettant d'amener progressivement vers une formulation du principe de position, en s'appuyant également sur les erreurs des élèves dans les phases collectives. Pour cela elle fait travailler les élèves sur leur ardoise et leur demande de la lever pour voir les différentes réponses. Nous l'avions déjà constaté lors des observations de l'année précédente. Elle prend toutefois, comme ici, une responsabilité importante dans les vérifications en proposant une technique de vérification mais en laissant l'élève l'exécuter. Tout comme dans la séance précédente elle s'appuie parfois sur un comptage, parfois sur le tableau de numération pour vérifier les réponses.
Elle passe ensuite à la situation du vrai ou faux.

Compléments sur l'analyse a priori *de la situation du « vrai ou faux ? » déjà effectuée précédemment : quels ajustements ?*

Suite à la pré-expérimentation dans la classe de Mme D, il avait été décidé de modifier les deux dernières « activités d'entraînement » (de la situation 1) en proposant une première activité de dénombrement de collections totalement groupées (entraînement de la situation 1) puis en proposant le « vrai ou faux » (dénombrement d'une collection partiellement groupée avec différentes propositions de nombres) en situation à part entière car il nous semblait que cette situation pouvait être une bonne introduction au travail sur le principe décimal, pour dépasser l'erreur due à une simple juxtaposition des nombres. Du coup sa description dans la ressource est davantage détaillée. Le choix des nombres en lien avec les erreurs possibles des élèves est mieux précisé :

Exemple de collection à dénombrer (une représentation de la collection ici) :



L'enseignant pourra par exemple proposer les nombres suivants qui prennent en compte les erreurs courantes des élèves :

- 31248 : juxtaposition des chiffres dans l'ordre,
- 3248 : juxtaposition des chiffres en supprimant les 10 sachets de 100 (sans les grouper en 1 boite),
- 3348 : juxtaposition des chiffres en ajoutant le 1 et le 2 pour le nombre de sachets de 100,
- 4248 : la bonne réponse.

Variables
On retrouve les mêmes variables que dans les exercices d'entraînement de la situation 1 : ordre

dans lequel les différents types de matériel sont donnés, absence d'un matériel de type donné (par exemple absence de sachet : cela amène à utiliser le 0).
Mais une variable importante ici est le nombre d'objets pour chaque type de matériel : on le choisira supérieur à 10 (pour amener les élèves à utiliser les relations entre les unités).
Enfin une dernière concerne l'écriture des nombres proposés qui prend en compte les difficultés courantes (juxtaposition des chiffres). Par exemple avec 2 boites, 15 sachets, 3 paquets, 4 bûchettes on proposera : 21534, 2532, 3534, 2634, etc.
Difficultés des élèves
Lorsque les élèves essaient de trouver directement l'écriture du nombre comme dans la situation précédente, certains ne prennent pas en compte le fait que les collections ici ne sont pas totalement groupées. Du coup ils juxtaposent les chiffres comme dans les nombres qui sont proposés ("pièges"). Un travail de groupe peut alors permettre aux élèves de confronter leurs réponses, sinon c'est le moment de mise en commun qui permettra cette confrontation.
De plus, lorsque les élèves essaient de passer par le dessin du matériel, certains se contentent parfois d'entourer 10 sachets sans les grouper dans une nouvelle boite. L'enseignant peut alors utiliser le matériel pour certains élèves pour s'assurer qu'ils font bien le lien entre les dessins et les manipulations réalisées avec le matériel dans la première situation.

Figure 75 : extrait de la description de la situation 2 (vrai ou faux)

Des éléments de synthèse sont également proposés pour l'institutionnalisation des savoirs en jeu dans la situation :

Synthèse
Elle porte sur le fait que si on veut dénombrer une collection, pour pouvoir associer chaque unité obtenue à sa position dans l'écriture en chiffres, **il faut d'abord avoir effectué tous les groupements successifs par 10**.
Pour faire cela il faut utiliser **les relations entre les unités** : 10 centaines se groupent en 1 millier, ... (on utilisera maintenant les unités de la numération pour formuler et institutionnaliser ces relations afin de préparer à la situation suivante).

Figure 76 : extrait de la description de la situation 2 (vrai ou faux)

Cependant la situation est la même et l'on pourra donc se référer à l'analyse *a priori* faite précédemment, dans laquelle nous avons mis en évidence la question des connaissances de comptage oral et de traduction oral/écrit qui ne sont peut-être pas suffisamment disponibles chez les élèves pour permettre d'avoir un contrôle de leur réponse. Des interventions de l'enseignant sont alors prévisibles.

Le dénombrement d'une collection partiellement groupée. Choix de Mme C. Quelles adaptations ?

Mme C explique qu'elle va faire des propositions et dit aux élèves qu'ils devront dire si c'est vrai ou faux et expliquer pourquoi.
Elle dessine au tableau une première collection (représentation schématique) : 2 boites, 12 sachets, 3 paquets[100] et 6 bûchettes et écrit les nombres suivants : 21236, 2236, 3236, 2336.
Elle laisse chercher les élèves sur leur ardoise puis organise une phase de conclusion.
Le déroulement est le même pour les autres cas :
- 1 boite, 7 sachets, 19 paquets, 5 bûchettes ainsi que les nombres : 1795, 2795, 17195, 1895 ;

[100] Mme C utilise le terme « paquet » ou « paquet de dix » pour les dizaines plutôt que « fagot », conformément à ce qui est proposé dans cette nouvelle ressource (lié aux difficultés rencontrées par les élèves de la première classe avec ce mot « fagot ») avec l'inconvénient toutefois que « paquets » et « sachets » sont très proches, ce qui peut entraîner des confusions.

- 5 sachets, 3 boites, 17 bûchettes et les nombres : 5317, 3507, 3517, 3607.

Le choix des collections et des nombres est donc proche de ce qui est proposé dans la ressource (le premier cas est même très proche de l'exemple proposé). Mme C propose toutefois différentes unités pour les conversions à réaliser : centaines puis dizaines puis unités. Il est intéressant de noter l'utilisation d'un cas où la simple juxtaposition des nombres fournit une réponse correcte (3517) mais comme il s'agit du dernier cas on peut penser que cette erreur pourrait ne pas apparaître. Ce qui rend alors intéressant ce cas est :

- le fait qu'il n'y a pas de nombre à 5 chiffres dans la liste car la simple juxtaposition donne un nombre à 4 chiffres,
- il y a une conversion à faire de 17 unités en dizaines et unités mais il n'y a pas de dizaine isolée au départ dans la collection.

L'adaptation principale de la situation redéfinie par Mme C concerne le support donné aux élèves. Rien n'était proposé dans la ressource à ce sujet. Elle choisit l'ardoise conformément à ses habitudes de travail. Cela permet aux élèves de redessiner la collection si besoin, d'effacer pour simuler des groupements et permet aussi à l'enseignante d'avoir une vue rapide de toutes les réponses des élèves lors de la phase de conclusion, voire de diffuser des techniques de groupements si l'élève s'est appuyé sur un dessin. Il y a donc une possibilité pour l'enseignante d'enrichir le milieu pour la validation.

Nos autres observations ont montré que Mme C propose très souvent des exercices d'échauffement avec alternance de recherches individuelles sur ardoises et corrections collectives. Cela lui permet de traiter plusieurs cas différents et de faire la correction de chaque cas avant de passer au suivant. C'est seulement ensuite qu'elle leur donne la fiche d'exercices avec le problème prévu. Nous pouvons peut faire l'hypothèse que ce fonctionnement est lié à sa façon de travailler avec son fichier et que c'est un moyen de réduire l'incertitude des élèves quand ils se retrouvent seuls devant leur fichier. En effet, dans le double niveau, lorsque les élèves se retrouvent devant le fichier, il faut qu'ils aient déjà tout compris ; il s'agit alors de s'entraîner à refaire ce qui a été fait avec la maîtresse. D'ailleurs elle parle de l'influence de ce fichier sur les déroulements au cours de l'entretien final (« Et en plus le fichier est fait comme ça : il y a souvent une partie de recherche et après des exercices de réinvestissement sur des choses qu'ils ont vues en amont » mais il semble que cette partie « recherche » doive se traiter collectivement pour elle). Elle dit aussi dans cet entretien que cette façon de travailler est habituelle chez elle et que cela ne concerne pas seulement les mathématiques :

> « C'est mon fonctionnement en général. Sauf quand c'est vraiment quelque chose qu'on a vu. Mais il y a souvent une petite phase où on repose les choses à plat avant de se relancer dans l'activité, mais dans tous les domaines en fait. »

Nous allons maintenant présenter le déroulement de cette situation.

Déroulement de l'extrait de la séance 3 choisi : « vrai ou faux ? » (de 14' à 39').

En annonçant aux élèves que maintenant elle va faire des propositions et qu'ils devront dire si c'est vrai ou faux et expliquer pourquoi, l'enseignante leur laisse penser qu'ils vont pouvoir utiliser les mêmes techniques. Elle ne cherche pas à éviter les erreurs, comme par exemple le faisait Mme D, en demandant aux élèves de faire attention ou de faire des transformations si besoin.

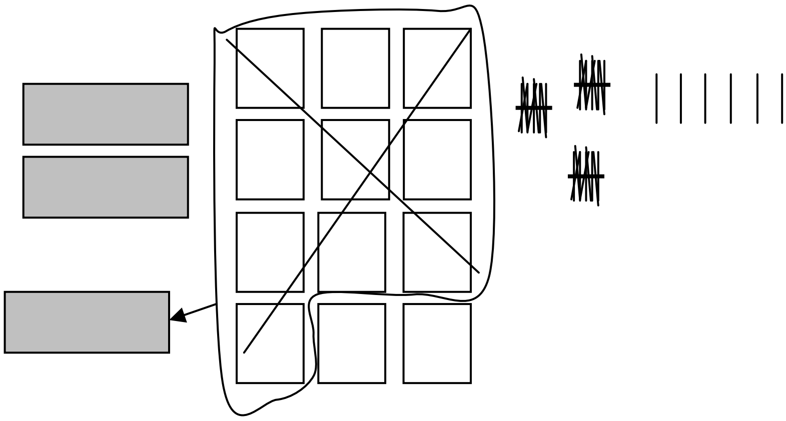
Elle dessine au tableau une première collection : 2 boites, 12 sachets, 3 paquets et 6 bûchettes et écrit les nombres suivants : 21236, 2236, 3236, 2336. Seuls trois élèves

trouvent la bonne réponse pendant la phase de recherche. Les autres font des erreurs dues à une juxtaposition des nombres avec suppression éventuelle du 1 des 12 centaines.
Après avoir laissé chercher les élèves elle recueille les différents résultats : 5 élèves pour 21236, 2 élèves pour 2236, 3 élèves pour 3236, et aucun pour 2336. Elle fait passer au tableau un élève qui s'est trompé (21236). L'enseignante fait placer le nombre dans le tableau de numération puis demande aux élèves « pourquoi ça déborde ». Ce qui amène un élève à expliquer que dix centaines se groupent en un millier. Il obtient alors 3236. La maîtresse fait le lien avec l'activité de groupement par dix successifs de la première séance, puis fait vérifier le nombre trouvé en faisant effectuer un comptage collectif. Elle dispose les chiffres dans le tableau de numération.
Nous donnons ici la transcription de cet épisode :

E : tout le monde est d'accord pour dire que celui-là est faux (2236). *L'enseignante entoure « faux ».*
E : alors comment on va faire pour vérifier ? Comment on peut faire pour vérifier. Quelle est ma question ?
Une e : comment fait-on pour expliquer ?
E : oui. Gaelle.
Ga : je sais qu'ici y'a un deux.
E : deux quoi ?
Ga : deux mille
E : vas-y
Ga : ici je sais qu'y en a douze. Ici je sais qu'y en a trois, donc trente. Et ici je sais qu'y en a six.
Elle écrit au fur et à mesure dans le tableau de numération : le premier 2 est à l'extérieur du tableau

	m	c	d	u
2	1	2	3	6

E : vous êtes d'accord ?
Des e : non
E : dans ceux qui ne pensaient pas que ce nombre était bon, qu'est-ce que vous en pensez ?
Des e : non
E : Quel est le problème d'après vous ?
Un e : ça peut pas être ça parce que normalement … *inaudible*
E : dans le nombre de Gaëlle normalement il faudrait combien de paquets de mille ?
Un e : *Inaudible*
E : tu m'as bien dit pourtant qu'il y avait deux paquets de mille. Pourquoi est-ce qu'on les voit pas les deux paquets de mille dans la colonne des mille ?
Une e : *Inaudible*
E : il est trop grand ?
Une e : oui
E : Mais pourtant si on n'a que deux paquets de mille ça doit passer y'a pas de problème. Pourquoi ça déborde ?
Une e : maîtresse parce que là y'en a douze et on peut faire un paquet de mille avec.
E : bah va nous montrer. Prends la chaise. Donc celui-là ça correspond pas.
L'enseignante entoure faux.
Un e : oh …
E : bah non. Tu vois bien.
L'élève au tableau entoure 10 sachets et dessine une nouvelle boite (cf. page suivante) :



E : Qu’est-ce qu’elle est en train de faire là ?
Un e : elle met avec les mille.
E : quand on avait des poches qu’est-ce qu’on a fait quand on avait plein de poches ? Gaelle. […] On les a laissées comme ça ? qu’est-ce qu’on a fait ?
Ga : on les a mis dans des paquets
E : on les a rassemblées dans des boites.
Ga : des paquets de … y’en avait neuf cent donc on rajoutait un paquet pour faire mille.
E : Donc, tout le monde a vu ce qu’elle a fait. Elle s’est dit y’a beaucoup de centaines, je vais faire un paquet de dix centaines. Du coup qu’est-ce qu’elle peut fabriquer ?
Une e : j’en ai fait dix.
E : un paquet de mille
Une e : et puis comme il m’en restait dans les centaines y’en a deux. Et puis dans les dizaines y’en a trois.
E : alors ça correspondrait à quel nombre alors ce que tu viens de nous faire ?
L’élève entoure vrai en face de 3236.
E : on vérifie ensemble.
L’enseignante montre les unités et les élèves comptent au fur et à mesure.
Les e : mille, deux-mille, trois-mille, … cent
E : trois-mille cent, trois-mille ?
Les e : deux-cents, trois-mille-deux-cent-dix, trois-mille-deux-cent-vingt, trois-mille-deux-trente-six.
E : trois-mille-deux-cent-trente-six. Tu le places pour voir. Trois paquets de mille, deux centaines, trois dizaines et six unités.
L’élève au tableau écrit les chiffres dans le tableau de numération.

m	c	d	u
3	2	3	6

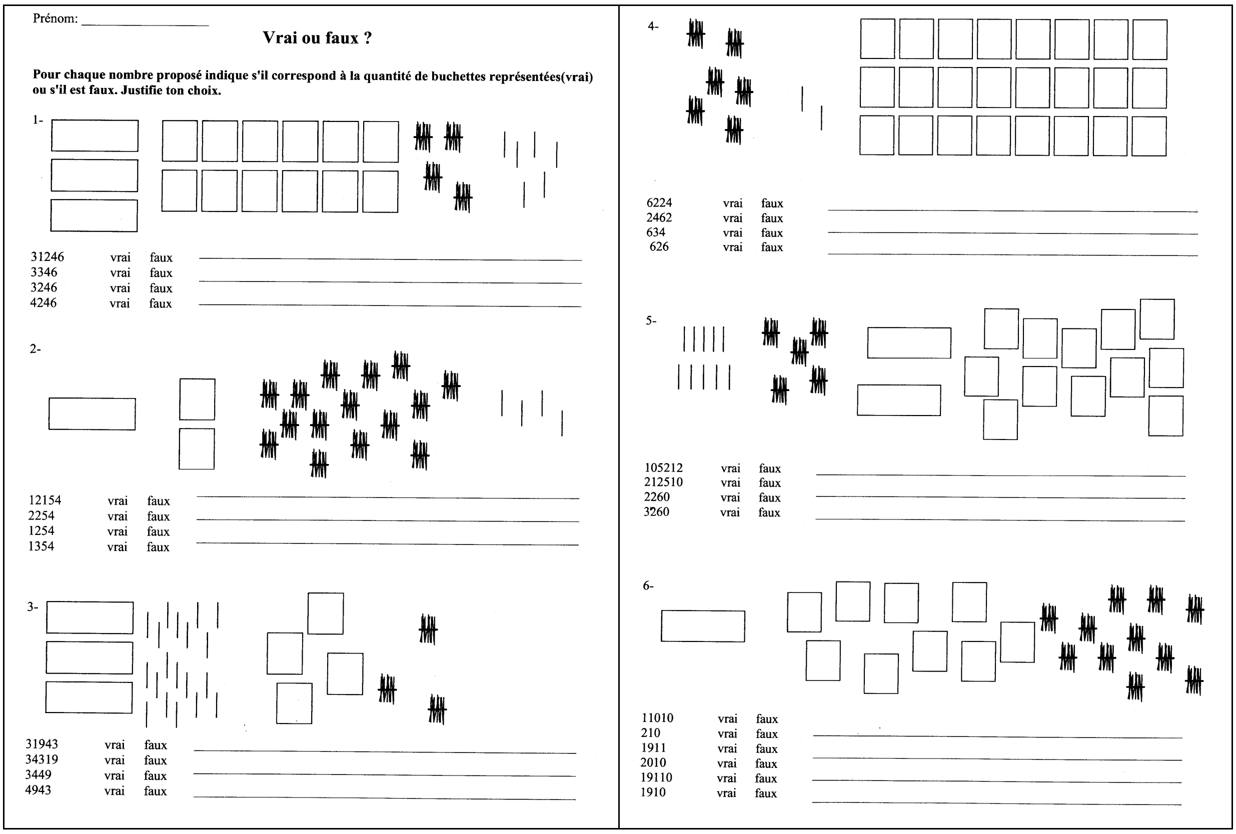
E : Est-ce que ça correspond ?
Les e : oui
E : d’accord ? Alors on va essayer avec un autre nombre. […] Alors est-ce que celui-ci était bon ? (*montre le 2336*)
Les e : non
E : Non parce qu’attention, on a pu fabriquer un nouveau paquet de mille. Donc il n’y avait pas deux paquets de mille on en a fabriqué un nouveau donc c’était pas le bon.
Une e : maîtresse, moi je croyais que les mille on pouvait pas euh …
E : tu te souviens quand on a rangé les bûchettes ? On a d’abord fait des petits paquets de dix. Des paquets de dix comme y’en avait beaucoup on avait dit ? Comme y’avait plein de petits paquets de dix on s’est dit ?
Une e : qu’on allait fabriquer des paquets de cent.
E : qu’on allait fabriquer des paquets de cent, donc on a pris dix paquets de dix pour fabriquer cent. Et après comme y’avait encore beaucoup de poches, on avait dit qu’on allait rassembler les poches en paquets de dix pour faire une boite de mille. Et là on fait pareil. Imaginez que les

rangements ne sont pas finis. D'accord ? Donc c'est à vous de finir les rangements. D'être sûr que les rangements soient finis en tout cas. D'accord ? Alors un autre.

L'enseignante propose ensuite une nouvelle collection : 1 boite, 7 sachets, 19 fagots, 5 bûchettes ainsi que les nombres : 1795, 2795, 17195, 1895. Tous les élèves trouvent la bonne réponse. Une élève vient expliquer au tableau en faisant les dessins : elle entoure 10 paquets de 10 et dessine un nouveau sachet de 100.

L'enseignante propose un autre nombre : 5 sachets, 3 boites, 17 bûchettes et les nombres : 5317, 3507, 3517, 3607. Pour ce dernier nombre elle l'écrit après avoir observé le résultat d'un élève qui avait écrit le nombre sur son ardoise. Il s'avère que presque tous les élèves ont trouvé ce nombre (7 sur 10). Aucun n'a trouvé 5317, 2 ont trouvé 3507 et 1 a trouvé la bonne réponse 3517. Après avoir recueilli ces réponses, l'enseignante fait venir un élève au tableau qui vient expliquer pour 3507 (erreur) puis un autre pour 3607. Cet élève écrit tout d'abord les 3 milliers et 5 centaines dans le tableau de numération puis dessine le groupement de 10 bûchettes en 1 sachet de 100, ce qui est invalidé par l'enseignante qui ressort un paquet de dix bûchettes (matériel) et rappelle que quand on a « dix bûchettes on les rassemble pour faire un paquet ». Cela permet à l'élève d'écrire la bonne réponse dans le tableau de numération en reportant le nombre de dizaines et unités. Elle explique l'erreur commise par les élèves qui ont trouvé 3607 : « vous avez transformé dix bûchettes directement en un paquet de cent ». Enfin elle demande à un élève de lire ce nombre.

Elle distribue ensuite une feuille d'exercices d'entraînement avec différentes collections à dénombrer en jouant sur le nombre d'éléments de chaque groupement (toujours supérieur à dix pour au moins un type de groupement) mais aussi sur l'ordre de présentation des différents groupements (pas toujours du plus grand au plus petit) :


Prénom: ________________

Vrai ou faux ?

Pour chaque nombre proposé indique s'il correspond à la quantité de buchettes représentées(vrai) ou s'il est faux. Justifie ton choix.

1-

31246 vrai faux
3346 vrai faux
3246 vrai faux
4246 vrai faux

2-

12154 vrai faux
2254 vrai faux
1254 vrai faux
1354 vrai faux

3-

31943 vrai faux
34319 vrai faux
3449 vrai faux
4943 vrai faux

4-

6224 vrai faux
2462 vrai faux
634 vrai faux
626 vrai faux

5-

105212 vrai faux
212510 vrai faux
2260 vrai faux
3260 vrai faux

6-

11010 vrai faux
210 vrai faux
1911 vrai faux
2010 vrai faux
19110 vrai faux
1910 vrai faux

Figure 77 : fiche d'exercices d'entraînement construite par Mme C

Huit élèves (sur dix) entourent dès qu'il y a dix unités d'un même ordre puis dessinent l'unité d'ordre supérieur comme Nelwann (ci-dessous). Certains font des erreurs de groupement en dessinant par exemple, pour le troisième cas, 1 boite pour 10 bûchettes du fait que les boites sont dessinées immédiatement à gauche des bûchettes (dans les deux cas précédents les unités étaient données dans l'ordre de l'EC). Une élève (Angèle, ci-dessous) écrit directement le nombre. Elles utilisent toutes les deux un tableau de numération en guise de justification.

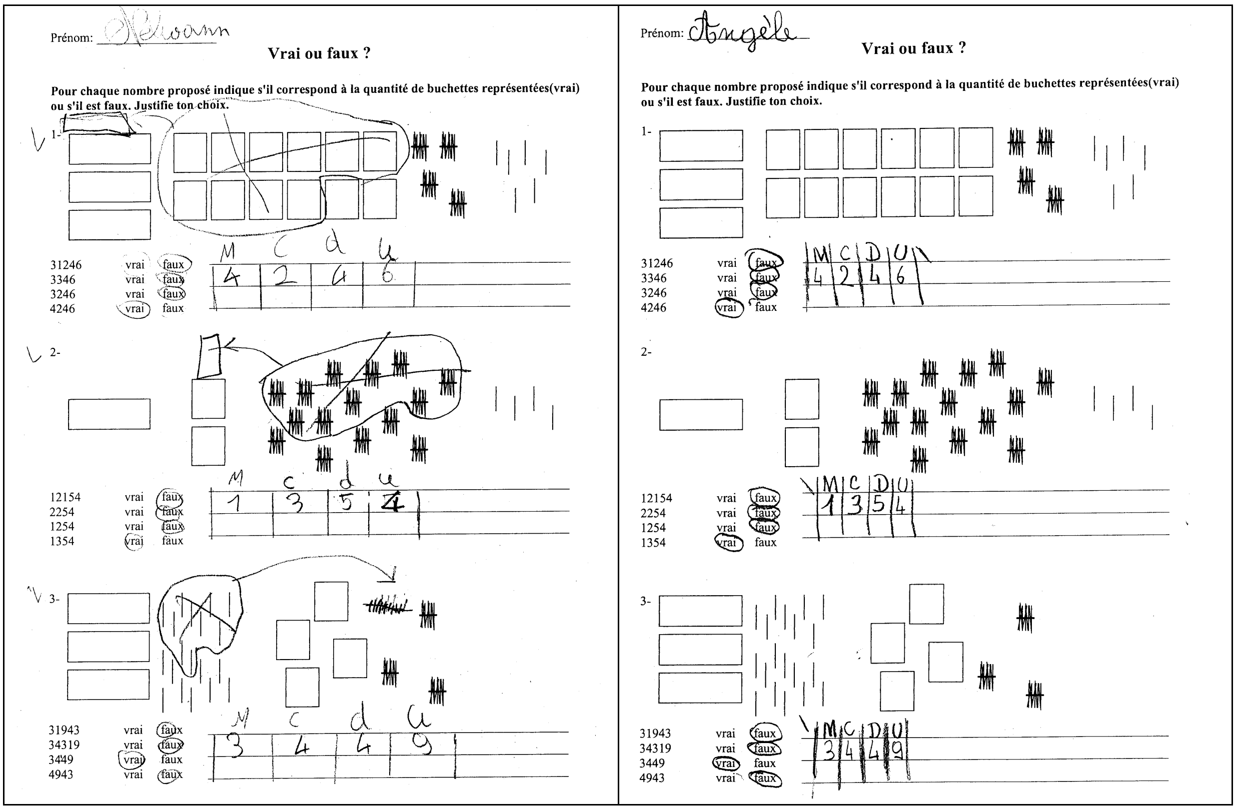


Figure 78 : fiche d'exercices d'entraînement complétée par deux élèves (première page)

Analyse a posteriori *de cet extrait de la séance 3 (« vrai ou faux ? »)*

<u>Du côté des élèves : les erreurs, les techniques</u>

Pour la première collection, la plupart des élèves font les erreurs que l'on pouvait attendre à ce moment de la séquence, c'est-à-dire liées à une juxtaposition des nombres. Pour la deuxième collection ils semblent utiliser la technique montrée par l'enseignante au tableau lors de la correction précédente (dessin d'un groupement supplémentaire et utilisation du tableau de numération). Par contre pour la troisième collection, une erreur non prévue apparaît : les élèves groupent les dix unités en une centaine car il n'y a pas de dizaine isolée dans la collection. Cela pourrait être un effet de l'usage de représentations schématiques : les élèves ont pensé qu'il fallait entourer les dix unités et les transformer en l'unité supérieure située à sa gauche, puisque c'est toujours le cas dans les représentations utilisées par l'enseignante. Cette erreur se retrouvera dans la fiche d'entraînement qui suit dans plusieurs productions d'élèves comme celle-ci[101] (page suivante) :

[101] Pour le n°3, cette élève avait trouvé 4943, ce qui correspond à ses dessins, puis a corrigé pour écrire 3449.

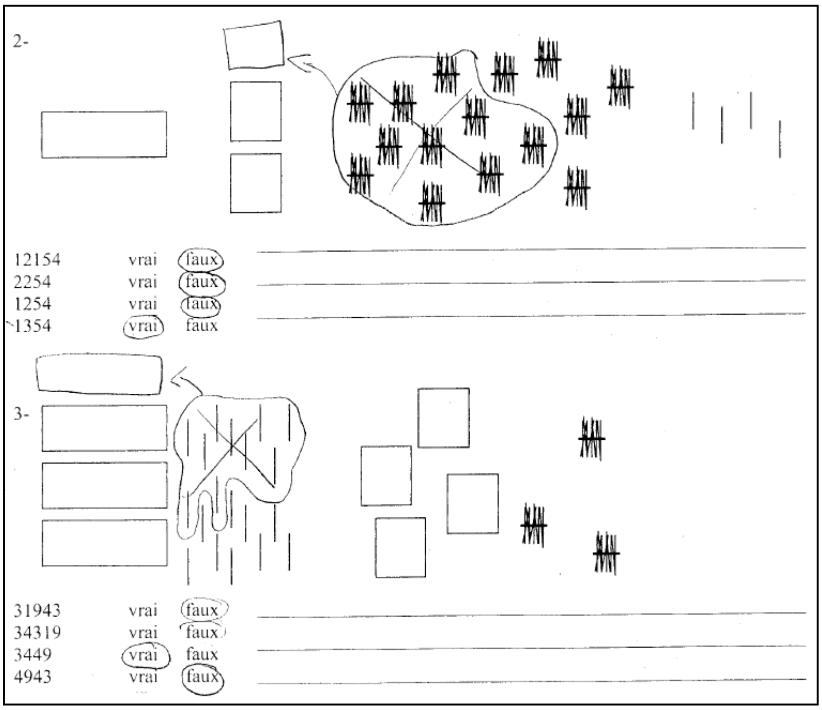


Figure 79 : Production d'une élève pour les cas 2 et 3 de la fiche d'entraînement

Il est donc important, comme l'a fait l'enseignante ici, de varier l'ordre de présentation des unités, même pour les cas mettant en jeu le principe décimal. Comme dans la classe de Mme D, on retrouve ici des erreurs spécifiques dues à cette représentation des collections et qui sont un frein à l'avancée du processus.

Cette situation a donc bien permis aux élèves de mobiliser des connaissances liées au principe décimal, même si elles peuvent encore rester très contextualisées au matériel utilisé et même à son dessin. La phase collective de conclusion du premier cas permet de faire émerger ces connaissances. Même si l'enjeu de validation n'est pas sous la responsabilité de tous les élèves, certains ont eu à expliquer leur technique lors des phases collectives. C'est l'erreur faite au troisième cas qui nous permet de constater que, pour une bonne partie d'entre eux, ils se sont construit une technique qui est très liée à la représentation particulière utilisée (dessin de la collection) et ne voient peut-être pas encore ce qui est général et qui sera réutilisable dans un autre contexte. Ce ne sont pas les transformations sur le dessin qui seront à généraliser : c'est seulement une des manières, dans ce registre, de faire des conversions. L'important est de savoir faire des conversions entre unités de numération. Le passage par ce registre, qui nous semblait *a priori* important pour se passer du matériel, est-il alors nécessaire ? Ne pourrait-on pas finalement utiliser directement les unités de numération et ainsi faire des conversions avec ces unités en s'appuyant sur les relations entre les unités ?

Il est possible d'envisager comme modification de cette situation le fait de ne pas faire dessiner la collection par l'enseignant mais juste de montrer le matériel et d'écrire au tableau le nombre d'objets de chaque unité : 12 centaines, 2 milliers, etc. De plus, cela a l'avantage de rendre le comptage plus coûteux car il faut passer par un dessin (ou une réalisation de la collection) pour le rendre possible. On pourra quand même se servir du matériel lors d'une vérification par comptage par exemple ou par réalisation effective des groupements.

Du côté de l'enseignante : gestion des erreurs des élèves, institutionnalisation des savoirs en jeu

Pour commencer, signalons que dans le cas de Mme C comme de Mme D, il semble que cette situation amène l'enseignant à prendre en compte les erreurs des élèves. Pour Mme C cela était déjà le cas lors de la séance précédente mais pas toujours dans les séances observées l'année précédente. En effet il y avait beaucoup moins de prise en compte des erreurs des élèves même quand il y avait de nombreuses difficultés. En fait, les phases collectives étaient davantage centrées sur comment il fallait faire et pourquoi. La deuxième année il semble que l'enseignante prenne davantage en compte les erreurs, et pas seulement dans la situation du vrai ou faux. Les savoirs apparaissent en réponse aux erreurs des élèves, comme permettant de les dépasser[102]. On peut faire l'hypothèse que la situation du « vrai ou faux ? » joue un rôle important dans ce phénomène car elle amène à sensibiliser les enseignants à ces erreurs pour construire leur séance (choix des nombres à proposer). En étant ainsi mieux préparés à ces erreurs ils sont plus à même de les prendre en compte.

Pour la première collection, lors de la phase collective de conclusion, Mme C commence par laisser les élèves appliquer la technique connue jusqu'à présent (utilisation du tableau de numération, en écrivant le nombre d'unités de chaque ordre dans la colonne correspondante) puis écrit le nombre obtenu dans un tableau de numération, en écrivant un chiffre par colonne ce qui donne un 2 à l'extérieur du tableau. Elle aurait ici pu écrire aussi un 12 dans la colonne des centaines. Elle utilise donc déjà implicitement le fait qu'il faut écrire un chiffre par colonne, qui est finalement un enjeu de cette phase de conclusion. Mme C montre alors que la technique utilisée par les élèves (simple juxtaposition des nombres) ne fonctionne pas ici par la comparaison du nombre écrit dans le tableau et de la collection : le 2 ne se retrouve pas dans la colonne des milliers alors que la collection compte deux milliers (« ça déborde » du tableau). L'introduction du tableau de numération dans le milieu, à ce moment, apparaît finalement comme une perturbation relativement aux enjeux de savoir, puisqu'il déporte les raisons vers l'outil tableau, au lieu d'expliciter qu'on ne peut écrire que des nombres à un chiffre à chaque rang de l'EC (un chiffre pour les unités, le plus à droite puis un chiffre pour les dizaines …).

La contradiction pointée par l'enseignante amène un élève à expliquer la nécessité de faire un groupement de dix centaines en un millier, ce qui donne un millier supplémentaire. Pour expliquer cette opération, l'enseignante s'appuie sur l'évocation de l'activité de groupement du matériel des bûchettes. Cela permet à l'élève d'écrire le nombre 3236 dans le tableau de numération. Cette réponse est vérifiée à la demande de l'enseignante par un comptage en unités simples, mais en s'appuyant sur la nouvelle collection (obtenue après groupement, c'est-à-dire avec les 3 milliers). Ainsi c'est l'écriture dans le tableau qui fait l'objet de cette vérification, plus que le groupement (pour lequel on aurait effectué un comptage à partir de la collection initiale).

[102] Pour illustrer cela on peut considérer l'exemple de la 2ème séance de l'année précédente où l'enseignante interrogeait davantage des élèves qui n'avaient pas fait d'erreur. Au cours des trois séances observées, nous avions constaté que l'enseignante avait rendu publiques seulement 6 erreurs. Or lors de la séquence étudiée la deuxième année, sans compter la séance du « vrai ou faux » on observe déjà 11 erreurs rendues publiques (donc beaucoup plus en tout) et 3 erreurs amenées par l'enseignante pour engager une discussion collective sur sa validité. Ce type de comparaison est à prendre avec précautions car les situations proposées ne sont pas les mêmes, mais l'usage de la ressource pourrait avoir permis à l'enseignante de mieux comprendre les erreurs des élèves et de les prendre davantage en compte, et, ce faisant, de faire émerger les savoirs visés lors des phases de conclusion.

Mme C conclut cet épisode par un rappel du lien avec les groupements de la collection et une indication pour les cas suivants :

> « Imaginez que les rangements ne sont pas finis. D'accord ? Donc c'est à vous de finir les rangements. D'être sûr que les rangements soient finis en tout cas. »

Tout comme dans la classe de Mme D, il y a ici une connaissance qui reste implicite : le fait que pour pouvoir utiliser le principe de position (écrire le nombre d'unités au premier rang, etc.), il faut s'assurer qu'il n'y a que des nombres inférieurs ou égaux à 9 pour chaque unité, pour n'avoir que des nombres à un chiffre à chaque rang. Ce savoir est utilisé ici à travers la nécessité de faire des groupements, comme dans l'activité de dénombrement initiale. Du coup la raison pour laquelle on fait ces groupements reste invisible.

Cependant la raison d'être des groupements avec matériel (« comme y'avait encore beaucoup de poches, on avait dit qu'on allait rassembler les poches en paquets de dix pour faire une boite de mille ») n'avait pas été expliquée au moment de la réalisation de ces groupements. C'est bien ici que cette raison d'être pourrait apparaître à partir de l'erreur d'un élève (dans juxtaposition des nombres), mise en avant par l'enseignante. On fait des groupements par dix au maximum pour n'avoir que des nombres à un chiffre d'unités de chaque ordre à écrire à chaque rang de l'EC. Si tel n'était pas le cas il pourrait y avoir plusieurs EC d'un même nombre (par exemple 35 pourrait aussi s'écrire 2 15), ce qui n'est pas possible. C'est cela qui doit permettre de justifier les groupements. Dans la ressource ce savoir n'est pas explicite (plutôt formulé en termes de nécessité de groupements). L'ambiguïté de l'EC produite pourrait émerger dans une situation de communication entre élèves où un élève récepteur aurait à faire une interprétation de l'EC d'un élève émetteur, même si cela pourrait être difficile à mettre en place dans une classe ordinaire.

Lors de la mise en œuvre de cette séance (ainsi que des autres) et comme nous l'avions observé l'année précédente, Mme C ne propose pas de phase d'institutionnalisation des savoirs malgré la présence, dans la ressource, d'une proposition de « synthèse » en fin de séance. D'ailleurs cela est confirmé par l'enseignante au cours de l'entretien final : « je ne l'institutionnalise pas franchement, je ne fais pas une leçon là-dessus dans les cahiers ». L'explicitation des savoirs et savoir-faire proposée dans la ressource n'est donc pas un point d'appui, pour Mme C, pour organiser une phase de bilan et/ou pour créer une trace écrite. Cependant il y a de nombreuses institutionnalisations locales[103] lors des phases de rappel de début de séances et lors des phases collectives de conclusion. Les savoirs apparaissent ainsi comme des savoirs pratiques, pour l'action, avec toutefois le risque de rester attachés aux personnes qui les ont formulées et au contexte qui leur a permis d'émerger (pas de dépersonnalisation, ni de décontextualisation).

Description rapide de la fin de la séquence

La quatrième séance n'a pas été observée. Elle a permis de finir de corriger la feuille d'exercices. Dans la cinquième séance, Mme C fait une reprise du « vrai ou faux ? » ainsi que

[103] Nous reprenons ce terme au sens de Douady (1994) : « Après tout le travail de la classe sur le problème, il revient à l'enseignant de sélectionner ce qui a pris sens du côté des élèves, qui est mathématiquement intéressant et réinvestissable et qui fait partie soit directement de ses objets d'enseignement, soit en est un préalable, soit une pratique du champ des objets du programme. En faisant cela l'enseignant organise explicitement le savoir de la classe. Si ce savoir est attaché à la classe, je parle d'institutionnalisation locale. S'il est relativement décontextualisé et dépersonnalisé, donc susceptible d'être communiqué et compris à l'extérieur sans connaître l'histoire de sa production, les connaissances en jeu ont plutôt un statut d'objet et je parle d'institutionnalisation. Pour résumer, je dirai que l'enseignant va faire cours. »

du dénombrement de collections mais en représentant les collections avec les unités de numération, comme par exemple :

4 Milliers
2 Centaines
18 Dizaines
9 Unités

Pendant la recherche beaucoup d'élèves repassent par le dessin pour faire leurs groupements, ce qui est montré par un élève dans la correction collective. L'enseignante fait remarquer que certains élèves ont trouvé sans faire le dessin et leur demande d'expliquer, ce qui permet à Mme C d'institutionnaliser la technique sans dessin (« donc directement dans leur tête, elles se sont dit dix-huit ça fait trop donc je peux faire une centaine de plus et elles l'ont rajouté »). L'enseignante produit même au tableau des transformations d'écritures s'appuyant sur les unités (les EUN sont utilisées sous leur valence instrumentale pour les conversions) :

4 milliers + 2 centaines + 18 dizaines + 9 unités

1 centaine <- 10 dizaines + 8 dizaines

3 centaines

Ensuite Mme C pose le problème des commandes. Elle propose le nombre 2531, ce qui ne pose pas de difficultés aux élèves, puis annonce qu'il n'y a plus de millier. Cinq élèves trouvent 25c3d1u, un élève trouve 15c3d1u et deux autres n'ont rien écrit sur leur ardoise. La vérification se fait par le dessin de collections correspondant aux écritures des élèves et leur dénombrement sous la conduite de l'enseignante. Tout comme Mme D, cette vérification, mettant en jeu la tâche inverse, ne s'accompagne pas d'une formulation des techniques directes utilisées par les élèves.
Mme C distribue ensuite une fiche d'exercices aux élèves et passe aider ceux qui ont des difficultés. Certains cas proposés sont assez complexes. Par exemple elle donne une commande de 4574 bûchettes sachant que le marchand a déjà fournit 32 dizaines de bûchettes, ce qui apparaît dans le bon de commande avec un 32 déjà écrit pour le nombre de dizaines : 4574 : … milliers, … centaines, 32 dizaines, … bûchettes seules. Ces cas donnent lieu à de nombreuses erreurs alors que les trois premiers cas sont réussis par tous les élèves (par exemple commande de 3612 bûchettes, le marchand possède 1 millier de bûchettes).
La sixième séance permet à Mme C de reprendre tout ce qui a été fait depuis le début dans des exercices de dénombrement et de commandes (toujours dans le contexte des bûchettes).
Enfin en septième séance, Mme C propose le problème des commandes de timbres. Elle nous avait confié à la fin de la cinquième séance qu'elle ne voulait pas changer de contexte trop tôt et qu'elle préférait d'abord s'assurer d'une bonne compréhension des élèves. D'ailleurs dans un entretien elle met en doute l'intérêt de cette situation car cela déstabilise les connaissances des élèves :

> « Par contre les timbres je ne sais pas si je le referais. Enfin on va voir demain comment ça va se passer demain. Quand on change de matériel, le matériel timbres, ça leur pose énormément problème. Enfin dans les problèmes, puisqu'il y en a dans Picbille, quand on parle des timbres, carnets de dix, alors aussitôt carnet ils ne savent plus que ça veut dire paquet, ça n'a pas de sens. »

Dans cette séance, après présentation des différents groupements de timbres (carnets de 10, plaques de 100), le même problème est posé. Beaucoup d'élèves font des erreurs, ce qui amène Mme C à utiliser le tableau de numération (pour le principe de position) et à ressortir le matériel des bûchettes (pour les relations entre unités) lors de la phase de conclusion. Elle propose ensuite des cas décontextualisés (combien de centaines dans 1513 ?) et cherche à systématiser la technique de lecture directe du nombre de centaines par troncature. Elle poursuivra les commandes de timbres lors de la séance suivante (non observée).

Quelques éléments qui ressortent de l'observation des différentes séances.

Une certaine liberté dans l'usage de la ressource

Dans la séance 5 où le type de tâche est différent (car il s'agit maintenant de partir de l'écriture du nombre pour passer une commande en milliers, centaines …), l'enseignante cherche à amener progressivement les bons de commande avec un type de tâche connu : à partir d'une commande de bûchettes utilisant le bon de commande il faut trouver le nombre de bûchettes au total (situation qui n'existe pas dans la ressource). De plus elle utilise plusieurs fois le même nombre au cours de ce travail ce qui l'amène à montrer aux élèves qu'il existe différentes décompositions d'un même nombre. Cela n'apparaissait pas dans la ressource et montre que l'enseignante s'autorise à mettre à sa main les propositions de la ressource.

Dans l'entretien final l'enseignante nous dit que lors des mises en œuvre elle savait où il fallait amener les élèves mais qu'après, le déroulement se faisait au « feeling ». Voilà ce qu'elle dit concernant cette séance 5 sur les bons de commandes :

> « Ça c'était pas forcément prévu. Je voulais juste faire une petite révision, une petite manipulation mais pas forcément l'amener, après je voulais l'amener pour que l'on joue avec. Disons qu'à un moment je me suis dit et si on le mettait maintenant et si on l'utilisait maintenant, pour faire le lien avec ce que l'on avait vu avant. »

Cela est un exemple où une bonne appropriation des enjeux permet à l'enseignant une meilleure réactivité, une improvisation à chaud dans la classe.

Un usage du matériel des bûchettes s'appuyant sur les besoins des élèves

Nous avons vu dans la séance analysée (séance 3) que le matériel n'est pas utilisé pour le dénombrement de la première partie de la séance (rappel) mais il est par contre utilisé pour la situation du « vrai ou faux » lorsque les conversions apparaissent.

En fait les observations des différentes séances montrent que Mme C adapte son utilisation du matériel aux savoirs mathématiques en jeu. En effet, il nous semble qu'il est davantage utilisé quand c'est le principe décimal qui est en jeu. Elle semble l''utiliser aussi en fonction des difficultés rencontrées par les élèves : quand la difficulté semble facilement surmontable il peut être seulement évoqué mais face à une difficulté plus importante l'enseignante le fait utiliser aux élèves. En effet, le matériel n'est pas utilisé dans la deuxième séance où c'est principalement le principe de position qui est en jeu. Dans les 3$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$ séances il est évoqué pour rappeler les relations entre unités. Dans la 5$^{\text{ème}}$ séance, il sert à vérifier les réponses des élèves (dans un cas difficile) et à montrer que dans une centaine il y a dix dizaines (ce qui n'avait pas été vu encore dans ce sens là dans la séquence). Enfin dans la 7$^{\text{ème}}$ séance le matériel est largement utilisé par l'enseignante pour faire retrouver les relations entre unités aux élèves (face aux difficultés rencontrées dans le changement de contexte). Cela est confirmé par les entretiens : l'enseignante nous dit, au début de la séquence, que l'utilisation du matériel pour valider alourdit, alors que quand le principe décimal est en jeu, l'utilisation du matériel permet de relancer les élèves :

> « tu vois là le matériel pour le groupe qui était devant, ils avaient oublié, ne visualisaient plus paquets de mille, paquets de cent, enfin ça n'avait plus de sens mais aussitôt le passage au matériel c'est reparti, ça a fait tilt ».

Mme C s'appuie sur le rôle que joue le matériel au niveau de l'ordre de grandeur : voir la boite de mille permet aux élèves de se rappeler que c'est dix paquets de cent et non dix paquets de dix par exemple.

<u>Une remontée dans le niveau technologique par la prise en compte des erreurs des élèves</u>
Dans toutes les séances on peut voir que l'enseignante essaie de prendre en compte toutes les réponses trouvées par les élèves ou interroge un élève qui a fait une erreur. Cela l'amène alors à proposer d'autres techniques pour vérifier la réponse comme par exemple un comptage ou l'utilisation du tableau de numération. Le choix de cette technique est très souvent sous la responsabilité de l'enseignante. Elle laisse peu d'autonomie aux élèves dans la vérification.
La prise en compte des erreurs permet à l'enseignante de revenir parfois sur les savoirs en jeu. Par exemple dans la dernière séance observée, quand un élève trouve 51 dizaines dans 1513 en écrivant 1 $\boxed{5\ 1}$ 3, et qu'une élève dit qu'il faut partir du début, l'enseignante ne se contente pas de cette réponse et lui demande alors pourquoi elle n'entoure pas $\boxed{1\ 5\ 1}$ 3. Ce type d'enrichissement du milieu lui permet en général de rappeler les savoirs en jeu pour construire des techniques fortes. Cependant devant la difficulté des élèves à proposer des justifications c'est souvent l'enseignante qui explique.
Dans le cas d'un résultat correct, on peut voir qu'elle demande également souvent à l'élève d'expliquer sa technique. En fait ce n'est pas le cas quand c'est uniquement la position qui est en jeu (cf. deuxième séance par exemple ou les techniques sont invisibles) mais plutôt quand c'est le principe décimal qui est en jeu.
Cet enjeu de justification amené par l'enseignante est confirmé par l'entretien final : « Le but c'est ça, c'est que eux arrivent à se justifier et du coup à construire ce que veut dire le sens du nombre ». Ceci est également évoqué quand elle parle de l'intérêt du travail par groupes de deux : « Le travail à deux a été plus constructif : le fait d'expliquer à l'autre. Quand on faisait des corrections l'après midi, ils savaient justifier, ils savaient expliquer. »
L'entretien final montre aussi que la description des procédures possibles et des difficultés des élèves dans la ressource a pu aider l'enseignante dans leur prise en compte ensuite en classe, puisqu'elle signale que les erreurs indiquées dans la ressource se retrouvent ensuite effectivement en classe :

> « Toutes les difficultés qu'on avait vues on les retrouve à un moment ou à un autre. De ce point de vue là c'était intéressant. Et j'ai trouvé ça très bien de les amener à s'interroger sur pourquoi la difficulté là. ».

Cela semble donc être un point important dans les ajustements réalisés pour la version *0b* de la ressource.

III.3 Interprétation des résultats des évaluations initiales et finales

On trouvera les résultats des deux évaluations de la classe de Mme C en annexe II.3.
Concernant la traduction numération parlée/numération écrite les résultats restent élevés. Les erreurs se trouvent principalement dans les cas avec des 0. Cela doit être pris en compte dans le choix des nombres à proposer dans la ressource.

Pour les recompositions canoniques, les résultats sont constants même si un cas pose plus de difficultés que prévu : « 1 centaine + 9 milliers + 3 unités + 5 dizaines = … », moins réussi (6 sur 11) que les cas avec des zéros par exemple.

Pour la comparaison les résultats sont en légère baisse, ce qui peut être lié au fait que les nombres sont plus grands et que cette tâche n'a pas été travaillée dans la séquence.

Pour les recompositions qui mettent en jeu des conversions, les résultats sont en hausse assez nette. C'est le principal type de tâche travaillé au cours de la séquence. Cela semble donc avoir eu des effets sur les apprentissages.

Concernant les conversions entre unités, les résultats sont constants. Ce type de tâche n'est pas travaillé spécifiquement dans la séquence même si les relations entre unités sont énoncées par l'enseignante.

Pour la tâche « nombre de » en contexte les résultats restent faibles, en baisse pour le premier problème et stagnent pour le deuxième problème. Il n'y a donc pas d'amélioration malgré une situation très proche dans la séquence (« les timbres »).

Enfin l'absence d'évaluation pour le type de tâche *nombre de* hors contexte ne nous permet pas d'avoir des renseignements à ce sujet alors que cela a fait l'objet d'une partie importante de la séquence (la fin).

Nous allons maintenant faire le bilan de cette pré-expérimentation en revenant sur nos choix de départ et en proposant des modifications pour la version 1 de la ressource.

Conclusion de la partie II

Dans cette conclusion, nous revenons sur les choix que nous avons effectués pour la version 0 de la ressource à la lumière de la pré-expérimentation et nous indiquons alors les modifications à effectuer et des questions pour la version 1 de la ressource.

Retour sur les choix généraux de la ressource

Rappelons que nous souhaitons proposer une ressource à destination des enseignants, en leur donnant une certaine responsabilité pour la mise en œuvre des séances de classe et de la séquence. Nous ne proposons donc pas de fiches directement utilisables par les élèves. Nous tentons de décrire clairement les situations mais sans trop de détails pour tenir compte des contraintes de temps de préparation des enseignants : seuls les éléments qui nous paraissent essentiels pour une mise en œuvre adaptée sont écrits. Cela laisse une certaine marge de manœuvre aux enseignants. Les savoirs et savoir-faire mathématiques visés dans ces situations sont explicités ainsi que le canevas didactique général (articulation des situations en lien avec la construction des savoirs). Des apports généraux sont également proposés : ils doivent permettre d'expliciter l'intérêt de l'usage de la ressource, de motiver son usage par les enseignants à partir du constat de manque du travail autour du principe décimal de la numération dans les programmes et manuels actuels et des difficultés que cela implique pour les élèves. Nous y intégrons des questions liées à la nécessité des savoirs de numération dans d'autres thèmes mathématiques. Ces choix ont commencé à être éprouvés dans la pré-expérimentation.
Nous n'avons pas ressenti, lors des observations et des entretiens, de résistance dans la mise en œuvre de situations particulières ou même de refus d'utilisation de la ressource sur un point précis. Au contraire il nous semble que la ressource (et les situations proposées) ont été bien acceptées par les deux enseignantes. Toutes les deux nous ont signalé dans les entretiens qu'elles ont fait les séances comme elles faisaient d'habitude, ce qui tend à montrer une bonne adaptabilité des situations proposées. L'absence de descriptions trop

fines de l'organisation des situations (comme par exemple le fait de prescrire un travail de groupes, ou de préciser dans le détail le déroulement des différentes phases de la séance, etc.) semble favoriser l'appropriation des situations par les enseignants qui gardent une certaine liberté d'organisation de la classe pour mettre les situations à leur main. Cela aussi a été apprécié, comme nous le signalent les enseignantes lors des entretiens, même si l'une d'elles nous indique que cela peut être coûteux en temps de préparation.
Cette pré-expérimentation ne remet donc pas en cause les choix généraux effectués pour la ressource. Nous les conservons pour la version 1, mais nous regarderons les effets liés au changement de support (utilisation d'un support numérique).

Retour sur le canevas didactique général

Nous avons organisé le canevas didactique selon les deux principaux jeux de la situation fondamentale : jeu de production d'une EC à partir d'une collection (jeu 1) ou de désignation de sa quantité en EUN (jeu 3) et jeux inverses (jeux 2 et 4).
Le point de départ est donné par le problème de dénombrement (mise en scène du jeu 1 de la SF) d'une grande collection en vrac à partir de laquelle il est possible de travailler différentes variantes par un jeu sur les variables didactiques. Cette pré-expérimentation nous a amené à proposer, dans un premier temps, des collections totalement groupées afin de construire la technique de position dans ce cas particulier (et dépasser le comptage en unités simples) avant de proposer des collections partiellement groupées mettant en jeu des conversions.
Dans un deuxième temps nous avons choisi de mettre en scène le jeu 4 de la SF pour travailler le problème inverse (passer d'une EC à une désignation en EUN) mais il nous a semblé plus pertinent de commencer par une situation de commande d'une quantité à partir d'une EC (mise en scène du jeu 2' de la SF) qui permet de donner un sens aux décompositions de nombres.
Lors de la pré-expérimentation, les deux enseignantes ont testé toutes les situations proposées dans la ressource, ce qui pourrait témoigner d'un contrat implicite d'expérimentation détournant les enseignants d'une utilisation ordinaire de la ressource. Cela confirme l'intérêt pour l'expérimentation de prévoir un groupe d'enseignants utilisant plus librement la ressource. Nous préciserons clairement dans la version 1 de la ressource que l'enseignant a la responsabilité de la construction de sa séquence (conception d'exercices, de traces écrites, d'évaluations, …). Nous pourrons alors étudier les choix effectués par les enseignants pour ce travail.
Nous allons maintenant revenir plus en détail sur chaque situation. Pour la situation de dénombrement, nous effectuons un retour en deux fois : d'abord le dénombrement d'une collection totalement groupée puis partiellement groupée. Nous terminerons par la situation de décomposition de nombres.

Retour sur le dénombrement de collections en vrac puis totalement groupées

Notons tout d'abord que l'usage du matériel est la principale (voire la seule) nouveauté évoquée par les deux enseignantes. C'est d'ailleurs son utilisation qui ressort dans les entretiens comme le point le plus positif de l'expérimentation. Ce matériel semble bien adapté aux conditions de travail dans des classes ordinaires, du fait de la facilité à se le procurer et de son moindre coût. Cela reste toutefois à confirmer avec un plus grand nombre d'enseignants.

Il a été difficile d'observer les connaissances construites par les élèves dans les situations car les techniques ne laissent pas toujours de traces mais aussi parce que les enseignants ne laissent pas toujours aux élèves l'occasion de les formuler au cours des phases collectives (cf. première pré-expérimentation). En effet, dans les deux classes, nous avons observé que dans les phases collectives de conclusion le topos des élèves est réduit. Leur activité se limite parfois à l'exécution d'une technique indiquée par l'enseignant voire à écouter la technique produite par l'enseignant.
Cependant nous avons pu observer la mise en place par les élèves, sous la conduite de l'enseignant, de techniques qui s'appuient sur une juxtaposition de nombres. Les variables didactiques que nous avions identifiées (ordre de présentation des unités, absence d'unités isolées à certains ordres) sont apparues fondamentales pour la compréhension de la position de chaque unité dans l'EC et du rôle du chiffre 0. Le jeu sur ces variables a été bien intégré par les enseignantes des deux classes.
Dans la première situation (intitulée « combien de bûchettes ») l'activité mathématique des élèves est assez limitée puisqu'ils passent beaucoup de temps à réaliser les groupements successifs par dix, mais elle marque le questionnement de départ du processus et permet aux élèves de faire l'expérience des groupements réitérés, ce qui est un point d'appui important pour la suite de la séquence, notamment lorsque le principe décimal est en jeu. Les élèves peuvent commencer à comprendre ici que le millier est composé de 10 centaines, mais aussi de 100 dizaines ou de 1000 unités. Il semble prématuré d'institutionnaliser la technique d'obtention directe du nombre par le principe de position (technique de juxtaposition) car elle va émerger lorsqu'il y aura plusieurs collections déjà groupées à dénombrer (elle apparaîtra alors comme plus efficace car plus rapide que le comptage en unités simples).
La deuxième situation, intitulée « comptes de bûchettes » (qui fait partie de la même situation générale) est décrite comme une situation à part entière, puisque la technique de juxtaposition (en passant éventuellement par l'oral) devrait y émerger comme cela a été le cas dans la classe de Mme C, avec prise en compte des deux premières conditions $\theta_{CondRang}$ de respect du rang de chaque unité dans et $\theta_{CondUnité}$ de présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'EC. Cette technique est le moyen le plus efficace pour dénombrer rapidement une collection totalement groupée, notamment lorsque cette collection compte beaucoup d'unités à chaque ordre. Il est donc possible d'indiquer dans la ressource que la variable temps peut permettre aux élèves de faire évoluer leur procédure pour abandonner le comptage en unités simples.
Conformément à ce qu'ont fait les deux enseignantes nous proposerons également de travailler la tâche de traduction oral/écrit qui s'appuie sur le même savoir (lien entre mille, millier et la position dans l'écriture en chiffres).

Retour sur le dénombrement de collections partiellement groupées

Conformément à nos prévisions, lorsque les élèves ont à dénombrer une collection partiellement groupée (comme 2M 12C 3D 6U), l'erreur due à une simple juxtaposition des nombres, sans prise en compte de la nécessité d'avoir des nombres d'unités inférieurs à 9 pour chaque position, apparaît. Cela permet de mettre en évidence la nécessité d'avoir un nombre d'unités compris entre 0 et 9 (condition $\theta_{CondChiffre}$ pour la technique de position : présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres). Cependant la raison pour laquelle il faut un seul chiffre n'apparaît ni dans la ressource, ni dans les classes. Elle pourrait apparaître si, à partir des erreurs, par exemple 21236 pour 2M 12C 3D 6U, il était demandé aux élèves de réaliser la collection correspondante. Dans la classe de Mme C, cette question a été balayée par l'utilisation du tableau de numération, pour lequel l'enseignante utilise déjà implicitement le fait qu'il ne faut écrire qu'un chiffre par colonne. Cette utilisation du tableau laisse implicites les savoirs en jeu, la raison de mettre un chiffre par colonne reste invisible. Cependant la nécessité de finir les groupements émerge quand même de la discussion collective (ce qui n'est pas un effet de la ressource).

Dans les deux classes la situation du « vrai ou faux ? », dont l'enjeu est de justifier la nécessité des conversions, a amené les deux enseignantes à attendre des justifications et pas seulement un résultat de la part des élèves (comme dans les situations d'action précédentes, en particulier dans la classe de Mme D). L'appui sur les erreurs a alors permis de faire émerger les savoirs visés, même s'ils peuvent encore rester très contextualisés au matériel utilisé (bûchettes). Il faudrait donc inclure une décontextualisation plus explicite dans la description des savoirs en jeu de la ressource, ce qui pourrait passer par une description des savoirs davantage en lien avec chaque situation (ou variante) plutôt que dans la partie introductive de la ressource.

L'appellation « Vrai ou faux ? » n'est pas tout à fait adaptée pour cette situation car l'enjeu est plutôt de déterminer laquelle, parmi toutes les propositions, est correcte. Le « vrai ou faux » devient donc le « jeu des paris »[104]. Après la recherche du problème, les élèves doivent faire un pari sur une des propositions et auront la possibilité de le modifier après discussion collective sur la validité des propositions. Lors de cette discussion le recours au matériel n'est pas possible. Cela permet de donner un enjeu plus fort à cette phase de conclusion, du point de vue de l'élève : le travail ne s'arrête pas après avoir proposé un nombre (donc suite à la situation d'action) grâce à la possibilité de changer de pari, il motive la recherche de justification.

L'utilisation des dessins de collections dans cette situation a permis aux élèves de s'approprier la réalisation de « groupements » dans ce registre, c'est-à-dire en entourant les unités d'un certain ordre par paquets de dix et en dessinant une unité du rang immédiatement supérieur. Cependant cela nous interroge sur l'intérêt de cette technique pour une compréhension plus générale des conversions entre unités de numération. Nous avons même vu que cela pouvait créer des difficultés spécifiques à ce registre comme le fait de dessiner, après groupement, une unité de rang situé immédiatement à gauche ou bien, dans le cas de l'absence d'unité isolée de rang immédiatement supérieur, le groupement en l'unité d'un ordre supérieur représenté (par exemple : 3M 12D = 4M 2D). Le fait de représenter le matériel semble également amener les enseignants à raisonner uniquement sur cette représentation qui se substitue aux actions réalisées avec le matériel.

Le passage aux unités de numération n'est pas immédiat pour les élèves et nécessite, pour certains, des allers-retours avec la collection matérielle ou au moins une évocation de l'activité de groupement initiale. De plus, l'utilisation des unités de numération pourrait encourager les élèves à utiliser la technique de juxtaposition. Une modification envisagée pour cette situation consiste à utiliser les unités de numération pour décrire la collection (plutôt qu'une représentation schématique).

De plus, nous choisirons pour la version 1 d'amener les collections partiellement groupées par des réunions de collections, ce qui leur donne une raison d'être.

Concernant le choix des nombres d'unités de chaque ordre après réunion, nous avons vu qu'il ne faut pas proposer que des collections pour lesquelles les élèves peuvent réussir par

[104] Nous nos inspirons d'une proposition de Guy Brousseau dans « Le cas de Gaël revisité (1999-2009) » (2009) disponible en ligne : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/58/26/20/PDF/Le_cas_de_GaA_l_1999-2009.pdf (consulté le 21/05/2013).

simple juxtaposition, comme 3M 12D 5U. Il peut être intéressant de proposer des collections du type 3M 12C 5U car la juxtaposition donne un nombre à 4 chiffres. En effet, quand on obtient un nombre à 5 chiffres, celui-ci peut être écarté rapidement par des effets de contrat. Ces collections (par exemple 3M 12C 5U) peuvent permettre d'engager une vérification par réalisation de la collection et comparaison avec la collection initiale puis un débat sur les raisons des conversions de centaines en milliers.

Retour sur les commandes de collections et les décompositions de nombres

Suite à la séquence proposée par Mme D, nous avions choisi de mettre en scène le jeu 2' de la SF avec une situation de « commande » d'une quantité à un marchand. Ce problème motive l'étude qui va suivre, entraînant les questions de décompositions et de recherche du *nombre de*. Elle doit permettre d'utiliser et donc de renforcer les connaissances précédentes qui servent à vérifier les réponses à condition que l'enseignant laisse cette possibilité aux élèves. Il nous a semblé que Mme C ne cherchait pas tout de suite à institutionnaliser la technique visée mais au contraire laissait de la place à une vérification par un dénombrement de la collection proposée par l'élève, ce qui n'était pas indiqué dans la ressource. Cela permet de ne pas tuer le problème et de relancer les élèves dans une nouvelle recherche. Ce changement de posture dans la phase de conclusion pour cette situation sera-t-il aussi observé dans d'autres classes de l'expérimentation ?

Dans les deux classes, nous avons constaté que, même quand les élèves ont construit des connaissances dans les problèmes précédents (en particulier ceux de la deuxième classe), leur utilisation dans un contexte différent reste problématique pour beaucoup d'entre eux. Les connaissances sont donc ancrées dans un contexte et l'utilisation faite des unités de numération n'a pas permis la décontextualisation attendue. Les difficultés rencontrées par les élèves dans l'évaluation finale pour la tâche *nombre de* dans un contexte différent n'y sont sans doute pas étrangères. Pour des raisons de temps à accorder à cette séquence, Mme D n'a pas pu proposer de travailler dans d'autres contextes. Mme C, elle, a cherché à repousser le changement de contexte en s'assurant d'abord une bonne compréhension des élèves. Elle met même en doute l'intérêt du problème dans le contexte des timbres car il déstabilise les connaissances des élèves.

Mais, le processus d'institutionnalisation passe par de nombreux cycles contextualisation/ décontextualisation (Perrin-Glorian 1993, 1994), ce qui nécessite de varier les contextes plus tôt dans la séquence. Cela permet aux élèves d'identifier (avec l'aide de l'enseignant) ce qui a un caractère général dans les connaissances construites[105].

---

[105] Cela rejoint ce que dit Perrin-Glorian (1993, 1994) dans son travail sur les classes « faibles ». Nous en citons un extrait (1994) :

« *Je pense donc que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :*

> -institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet.
>
> -réinvestissement d'un contexte dans un autre: institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes,
>
> -cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre

Cela est peut-être aussi un effet de la séquence proposée dans les deux versions de la ressource *0*, qui repousse à la dernière situation ce changement de contexte. La ressource se doit donc de prendre mieux en charge cette question par des apports pour l'enseignant pour l'aider à comprendre l'intérêt de l'introduction plus précoce de contextes variés. L'expérimentation doit alors permettre d'étudier la façon dont les enseignants prennent en compte la question de la décontextualisation des connaissances des élèves, et plus généralement l'institutionnalisation des savoirs, au fur et à mesure de la séquence.

chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique. » (1994, p.21-22)

Partie III

L'expérimentation

L'OM de référence et la situation fondamentale du chapitre 1, sont des points d'appui pour concevoir une suite de situations, mises en scènes de la SF, permettant de mettre en jeu des savoirs et savoir-faire que nous avons pointés comme essentiels dans l'étude de la numération et qui ne sont pas toujours pris en compte dans les manuels actuels. À partir des résultats de la pré-expérimentation, nous avons mis au point une version 1 de la ressource en tenant compte de questions liées à la fois au contenu (les situations et les savoirs) et à la forme (organisation en parties, choix du support, éléments à décrire aux enseignants, ...). Nous nous appuyons également sur les principes généraux établis en partie II (chapitre 6). L'objectif de cette expérimentation est de mettre cette ressource à l'épreuve de la classe afin d'étudier :

- son potentiel pour faire apprendre aux élèves les savoirs visés et dépasser les difficultés identifiées dans la partie I ;
- son utilisation par les enseignants pour la construction d'une séquence (projet) et la mise en œuvre des séances dans la classe en appui sur les situations proposées, malgré certaines contraintes institutionnelles pointées dans la partie I ;
- son ergonomie.

Pour cette expérimentation nous avons souhaité avoir un nombre suffisant d'enseignants afin de comparer différentes mises en œuvre des situations, d'avoir des retours variés sur l'utilisation de la ressource et un nombre assez conséquent d'élèves pour que les résultats des évaluations soient significatifs.

Nous commençons dans le chapitre 8 par décrire le dispositif expérimental mis en place et présenter les enseignants ayant participé à l'expérimentation. Nous décrivons ensuite les choix généraux d'ergonomie de la ressource (le support, les différentes parties), de mise en scène de la situation fondamentale et nous précisons les questions et la méthodologie d'analyse.

Les chapitres 9 et 10 seront consacrés à l'étude des deux situations proposées dans la ressource (dénombrement d'une collection et commande d'une collection) et de leur mise en œuvre dans la classe.

Le chapitre 11 permet de revenir sur les séquences construites par les enseignants, les résultats des élèves aux évaluations et de faire des propositions de modifications de la ressource en vue de la conception d'une version 2.

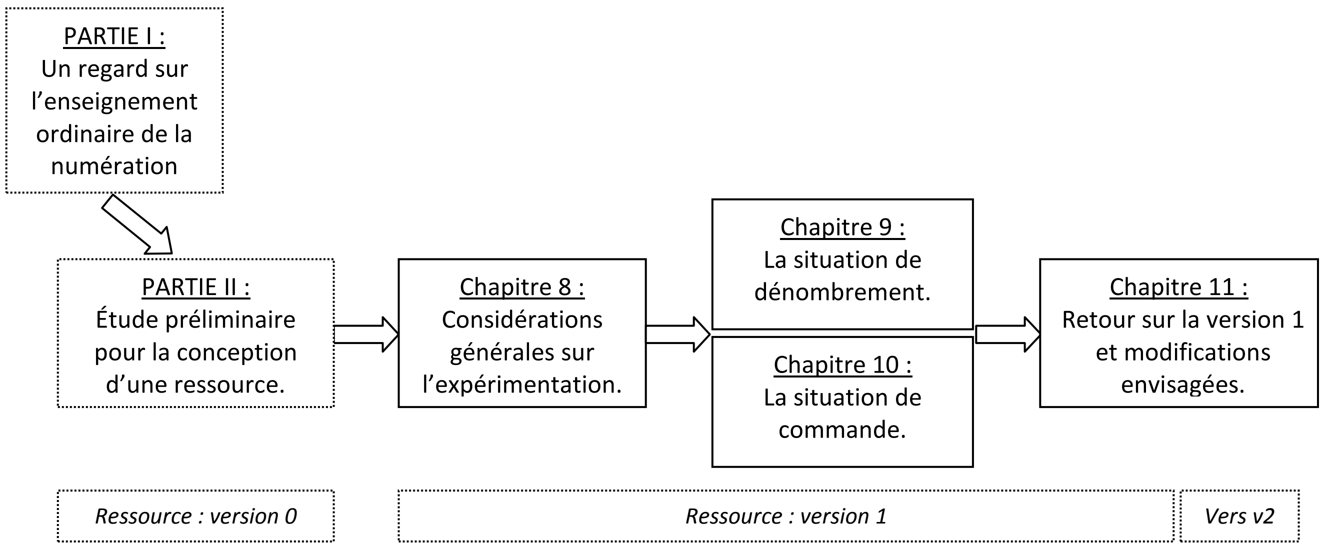


Figure 80 : schéma du plan de la partie III

Voici le sommaire de la partie III :

Chapitre 8

Considérations générales sur l'expérimentation

Pour concevoir la version 1 de la ressource nous avons été amené à faire des choix tant au niveau du fond que de la forme (ergonomie) en tenant compte de la pré-expérimentation. Avant de faire une étude de la mise en œuvre des situations dans les classes (chapitres 9 et 10), dans ce chapitre nous présentons le dispositif expérimental (§I), les enseignants (§II) et les choix généraux d'ergonomie (§III). Nous terminons (§IV) en apportant des précisions sur la méthodologie utilisée pour l'étude des situations et du canevas didactique proposés dans la ressource (pour les chapitres 9, 10 et 11).

I. Le dispositif expérimental de l'expérimentation

Le choix du support

Nous avons choisi d'utiliser un support numérique pour la version 1 de la ressource. Cela pourrait poser des problèmes d'acceptabilité et d'utilisabilité spécifiques, voire même d'accessibilité : les enseignants pourraient ne pas avoir la possibilité de consulter le site en classe (nous prévoyons toutefois la possibilité d'imprimer les pages du site). Mais notre choix est principalement lié aux facilités de diffusion (un objectif à moyen terme étant une diffusion plus large dans l'enseignement ordinaire) ainsi qu'aux possibilités de proposer une

quantité importante d'informations par une organisation en menus et liens hypertextes, liberté étant laissée aux enseignants d'y accéder ou pas.
Pour réserver l'utilisation du site aux enseignants participant à l'expérimentation nous avons choisi de rendre l'identification obligatoire. Cela présente aussi l'intérêt d'avoir des données statistiques personnelles sur l'usage du site, même si nous ne les avons pas exploitées dans le cadre de la thèse.

Les deux groupes d'enseignants

Pour cette expérimentation nous avons constitué deux groupes d'enseignants volontaires[106].
Le premier (dit *groupe de travail*) participe à la conception de la ressource lors de réunions avec le chercheur et nous observons des séances de classe. Ce groupe est constitué de quatre enseignants. Le deuxième (dit *groupe libre*) utilise la ressource mais aucune observation de classe n'est effectuée. Ce groupe est constitué initialement de quatre enseignants, mais une enseignante n'a pas testé la ressource finalement (car elle ne voulait pas s'inscrire sur le site).
Pour tous les enseignants nous réalisons deux entretiens individuels et nous leur donnons deux évaluations à faire passer à leurs élèves.
Voici les différents temps de l'expérimentation.

Groupe de travail (GT)	***Groupe libre (GL)***
Entretiens individuels avec les enseignants	
Evaluations initiales des élèves	
Première réunion de travail (groupe)	
Observations de séances de classe	
Evaluations finales des élèves	
Entretiens individuels avec les enseignants	
Deuxième réunion de travail (groupe)	

Tableau : les différents temps de l'expérimentation

Une charte d'expérimentation est envoyée aux enseignants avant l'expérimentation. Elle précise le contrat entre enseignants et chercheur ainsi qu'un calendrier (annexe III.1).
Nous allons maintenant décrire le contenu des entretiens.

Les entretiens individuels avec les enseignants

<u>L'entretien initial</u>
L'objectif de ce premier entretien est de prendre des informations sur le projet habituel des enseignants sur la numération (sur les nombres inférieurs à mille en particulier) et de présenter l'évaluation initiale à faire passer aux élèves ainsi que le site (très rapidement).
Nous demandons à l'enseignant de photocopier dans un cahier d'élève (et fichier éventuellement) toutes les pages qui concernent la numération afin de recueillir des informations sur les types de problèmes, d'exercices, de traces écrites et d'évaluations qui ont été effectués qui peuvent servir de base à la discussion.

[106] Nous avons contacté des enseignants de CE2 d'un même département à partir d'une liste de noms proposée par un inspecteur de circonscription à qui nous avions présenté notre projet en lui précisant que nous cherchions des enseignants sans formation spécifique en mathématique ou didactique mais susceptibles d'être volontaires pour participer à notre projet. Quand nous avons contacté les enseignants, pour ceux qui étaient intéressés nous leur avons laissé le choix du groupe dans lequel ils souhaitaient s'inscrire.

Au cours de l'entretien, nous essayons d'une part de faire expliciter ce que l'enseignant a fait sur la numération en début d'année sur les nombres inférieurs à mille, ce qui lui semble vraiment important, les difficultés qu'il a repérées chez les élèves et ce en quoi l'apprentissage de la numération lui semble important, d'autre part ce qu'il attend d'une ressource pour enseigner la numération (ou un autre domaine …).
Enfin l'entretien se termine par une présentation de :

- l'évaluation en précisant qu'il s'agit de tâches qui ne sont pas souvent évaluées dans les évaluations « classiques » (pour relativiser les éventuelles difficultés qu'ils pourraient observer). Elle ne remplace donc pas l'évaluation prévue par l'enseignant sur les nombres à trois chiffres. Il est indiqué de ne pas donner d'indication (même si les élèves font beaucoup d'erreurs) et de faire l'évaluation en deux fois (2x20min environ).
- la ressource (le site internet) : explication de la procédure d'inscription, présentation des différents menus du site et explication des différences avec un manuel ou un guide de l'enseignant telles que des aides (importantes) pour identifier les savoirs en jeu. Nous précisons qu'il existe une certaine marge de manœuvre pour l'enseignant dans la mise en œuvre des situations et dans la construction de sa séquence (exercices d'entraînement, traces écrites, évaluations, remédiations éventuelles ...).

<u>L'entretien final</u>
Dans cet entretien nous posons un contrat de conception de ressource. Nous commençons par exemple la discussion comme ceci : « nous allons revenir sur chaque situation et discuter de ce que ça a donné dans ta classe, ce qu'il te semble important de conserver dans les situations, ce qui au contraire n'est pas utile voire ce qui serait à modifier pour une meilleure efficacité ».
Il est également demandé à l'enseignant de nous montrer des cahiers d'élèves (au moins pour un élève) pour voir des traces de ce qui a été fait dans la classe (fiches d'exercices, traces écrites de leçons, évaluations …). Cela constitue également une base pour la discussion avec l'enseignant.
On peut résumer le déroulement de cet entretien ainsi :

- le « contrat » : le site est un objet non définitif qui est à questionner, modifier, … ;
- bilan de l'enseignant sur sa séquence et sur son utilisation du site ;
- retour sur chaque situation en appui sur un cahier d'élève, discussions sur la mise en œuvre des situations, sur les techniques et difficultés des élèves, sur l'utilisation du site au fur et à mesure de la séquence et sur les modifications éventuelles à apporter (aux situations, à la ressource) ;
- bilan sur les apports pour l'enseignant : est-ce que la mise en œuvre de cette séquence a changé sa façon d'enseigner la numération ? Comment il envisage cette séquence l'année prochaine ? Est-ce que le travail réalisé dans cette séquence sera réutilisé dans ce qu'il fera ensuite cette année en mathématiques ?

Ces éléments ne seront pas tous l'objet d'analyses par la suite.

Les évaluations proposées aux élèves

Dans les deux groupes il est prévu de faire passer deux évaluations aux élèves : une avant et une autre après la séquence, comme lors de la pré-expérimentation. La plupart des exercices ont été conservés. Voici les petites modifications effectuées.

Un seul problème mettant en jeu la tâche « nombre de » est proposé. Le deuxième a été remplacé par un problème mettant en jeu une addition posée afin de permettre d'identifier des liens éventuels entre les connaissances en numération et ce type de calcul (alignement des chiffres, retenue). Le voici : « Le directeur de l'école a fait une commande pour l'école : une télé à 560 euros, un ordinateur à 229 euros et une imprimante à 75 euros. Quel est le montant total de ces achats ? ».
Enfin un exercice décontextualisé sur le « nombre de » a été ajouté, ce qui peut permettre de comparer la réussite avec le problème mettant lui aussi en jeu ce type de tâches.
L'évaluation a été séparée en deux parties pour laisser davantage aux élèves le temps de faire les problèmes. Les mêmes exercices sont proposés dans l'évaluation finale (afin de faire une comparaison entre les deux) mais avec des nombres à quatre chiffres. On trouvera ces évaluations en annexes III.4 et III.5.

Les réunions entre enseignants et chercheur dans le groupe de travail

Nous organisons deux réunions avec les enseignants du groupe de travail, dont les objectifs sont :

- La mise au point de la séquence pour le premier qui a lieu avant la séquence. La discussion porte principalement sur les adaptations possibles dans le contexte de chaque classe et école, des programmes, etc. La seule chose qui ne sera pas remise en cause c'est le point de départ : travailler des situations mettant en jeu le principe décimal de la numération.
- Le bilan des séquences pour le second qui a lieu après la séquence, avec également un travail d'adaptation de la ressource pour d'autres collègues.

Les observations de classe dans le groupe de travail

Lorsque cela est possible nous prévoyons d'aller observer les enseignants sur plusieurs séances afin de faire ensuite une comparaison des redéfinitions et des mises en œuvre des situations. Nous enregistrons les séances à l'aide d'un dictaphone et nous prenons des notes de ce qui se passe dans la classe (ce qui est écrit au tableau, l'utilisation éventuelle d'un matériel, etc.). Nous observons, dans la mesure du possible, les techniques utilisées par les élèves en circulant dans la classe lors des moments de recherche. Nous prévoyons également, si possible, un court entretien après la séance pour revenir avec l'enseignant sur la séance, afin de comprendre si elle s'est déroulée comme il l'avait prévu ou bien s'il a été amené à faire des adaptations à son projet.

II. Les enseignants

Dans ce paragraphe nous allons présenter les enseignants avec lesquels nous avons travaillé en nous appuyant sur les entretiens individuels initiaux.

II.1 Les enseignants du groupe de travail : Mme A, M. B, Mme E et Mme F

Ce groupe est constitué de Mme A, M. B, Mme E et Mme F.
Mme A et M. B ont un double niveau CE1/CE2 en milieu rural. Nous les avons déjà présentés dans la partie I (chapitre 4, §I). Nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails. Depuis cette

première observation ils n'ont pas changé d'école ni de niveau de classe. Nous n'avons donc pas réalisé d'entretien initial avec eux.

Mme E

Mme E enseigne dans une classe de CE2 (simple niveau) dans une école de milieu rural. Elle a environ vingt années d'expérience professionnelle. Elle a commencé sa carrière avec une classe de CM1/CM2 en région parisienne avant de venir en Charente où elle a effectué deux années dans l'enseignement spécialisé puis dix années en maternelle où elle a eu tous les niveaux. Elle enseigne depuis cinq ans en CE2 dans cette école.
Lors de sa première année en CE2 (donc après ses années en maternelle) elle a utilisé *ERMEL* afin de se mettre à jour d'un point de vue « théorique » :

> « quand je suis arrivée là […] je suis allée voir spontanément dans ERMEL, voir la théorie mathématique […] moi ça m'a aidée à voir les enjeux qui étaient derrière dans l'apprentissage, où étaient les blocages, ce qui était important et moins important »

Ensuite elle a utilisé le manuel *J'apprends les maths* (éditions Retz) qu'elle avait vu utiliser en région parisienne en début de carrière dans une expérimentation. Elle s'est aussi au début « plongée » dans le guide pour l'enseignant. Elle n'a pas utilisé le manuel élève pendant ses deux premières années de CE2 mais comme la deuxième année elle s'est beaucoup appuyée sur le manuel *J'apprends les maths*, à partir de sa troisième année elle l'a commandé pour ses élèves.
L'entretien initial a permis de constater l'influence très importante de ce manuel dans la description de son projet. D'ailleurs, pour parler de ce qu'elle fait, elle s'appuie sur le manuel qui est posé sur la table et qu'elle feuillette. Elle attache de l'importance au type de tâches écrire/nommer ainsi qu'à d'autres mettant en jeu le principe décimal de la numération comme décomposer 128 en 12 groupes de 10 et 8 unités. Pour Mme E, « la numération est un outil pour le calcul ». « Faire de la numération pour faire de la numération » ne lui semble pas efficace, « ce n'est pas une fin en soi ».

Mme F

Mme F a commencé sa carrière d'enseignante en tant que remplaçante avant de faire une année de formation en IUFM. Elle a ensuite eu ce poste, il y a cinq ans, avec une classe à trois niveaux CE2/CM1/CM2 (une année elle n'a eu que deux niveaux : CM1/CM2), en milieu rural.
Elle a commencé à travailler avec le manuel « Cap Maths » (éditions Hatier) pour ses trois niveaux : « les séances de découverte étaient très riches mais sur trois niveaux c'est impossible à gérer ». Du coup elle utilise des manuels qui lui paraissent plus faciles à utiliser[107] et qui lui permettent de faire fonctionner ses trois niveaux :

> « Moi le manuel c'est quelque chose de rassurant qui me permet de faire fonctionner mes trois niveaux. Je préférerais mille fois me réfugier dans du ERMEL ou mon cap maths que j'aimais mais je ne peux pas. »

Mme F se présente comme « pas scientifique du tout » et ayant plus « d'affinités avec la langue française ». En mathématiques elle nous dit avoir « des problèmes pour faire passer certaines notions », pour que les élèves réussissent.

[107] Pour les élèves de CE2 elle utilise le manuel « Maths + » aux éditions Sed.

Mme F évoque une difficulté principale pour l'enseignement de la numération : la distinction entre « chiffre des » et « nombre de ». Elle évoque déjà la difficulté de repérer que dans 732 il y a 73 dizaines. Elle explique que du coup elle ne s'attarde pas là-dessus. Ce qui est pointé comme important au niveau de la numération est :

> « Qu'ils aient une représentation mentale du nombre : le nombre c'est le reflet d'une quantité. […] En numération c'est ça mon objectif : quand je leur dis « dix » il faut qu'il y ait quelque chose qui se passe ici (*montre sa tête*). »

Voilà comment elle résume sa séquence sur les nombres inférieurs à mille :

> « D'abord, je les mets en confiance avec le nombre : passer d'une écriture chiffre à une écriture littérale, dessiner des quantités. En fait sur le nombre de, je n'insiste pas. […] Moi la numération au CE2 c'est apprendre à écrire un nombre, savoir le lire, l'écrire et après ordonner, ranger. Et ordonner, ranger, ça ne leur pose aucune difficulté. Ils font quelques erreurs au départ mais rien. La principale difficulté c'est qu'ils aient une représentation des nombres et cette différence entre *chiffre de* et *nombre de*, que je ne sais pas enseigner. J'ai pas mes marques. J'ai pas encore trouvé ce qui me permettra d'être à l'aise pour faire passer la notion. […] Au départ je voulais vraiment qu'ils comprennent ce *chiffre de/nombre de*. Puis après je me suis dit : est-ce que c'est réellement un frein à l'apprentissage ? Ce n'est pas que je laisse tomber mais je ne suis pas intransigeante. Par exemple je l'évalue très rarement dans les évaluations données aux familles. »

L'OM mise en place est centrée sur les types de tâches suivants :

- Ecrire/nommer
- Décomposer, *chiffre des* et *nombre de*
- Comparer et ranger

Cela correspond aux types de tâches travaillés dans son manuel.

II.2 Les enseignants du groupe libre : Mme G, Mme H, Mme J

Mme G

Mme G enseigne dans une classe à un seul niveau (CE2) dans une école comportant plusieurs classes de cycle 3, en milieu urbain.

Mme G a environ vingt ans d'expérience d'enseignement (uniquement en école élémentaire). Elle enseigne depuis six ans dans cette école en CE2. Elle avait eu une autre classe de CE2 avant pendant trois ans dans une autre école. Elle a aussi enseigné en CP (un an), en CE1 et en CM2.

Elle utilise un manuel de CE2 qui lui sert à « piocher » des exercices. Elle prend aussi des fiches d'exercices sur internet. Ce qu'elle attend d'une nouvelle ressource : des exercices, des problèmes inédits, différents de ceux que l'on trouve dans les manuels.

Elle travaille les types de tâches : comparer, écrire/nommer, décomposer/recomposer. Elle nous dit qu'elle fait aussi un travail sur *chiffre des* et *nombre de*, comme cela est proposé dans son manuel. Elle fait aussi des dénombrements de collections.

Elle considère la numération comme quelque chose d'essentiel car « quand on fait du calcul on sait ce qu'on fait ». Elle trouve que les élèves ont des difficultés avec *chiffre des* et *nombre de*, mais que pour le reste : « au bout d'un moment, ça va pour tous les élèves ».

Mme H

Mme H enseigne depuis onze ans dans une école en milieu urbain socialement défavorisé (classée RAR[108]). Elle a toujours eu des CE2, mais parfois en double-niveau avec des CM1. Elle a enseigné un an dans une autre école avant celle-ci, en milieu rural. Elle avait une classe de CE2/CM1/CM2.

Elle utilise l'ouvrage *ERMEL* (« pour les jeux ») et le manuel *Cap Maths* (« je vais piocher des exercices » et « les situations de départ de *Cap Maths* sont intéressantes »). Voici ce qu'elle attend d'une nouvelle ressource :

> « J'attends qu'on propose des situations de recherche au départ de chaque apprentissage qui soient stimulantes, soit parce qu'elles sont ludiques soit parce qu'elles ont l'aspect de défis et surtout qui rendent tous les élèves actifs. Par contre elles ne doivent pas être trop exigeantes en préparation matérielle ou si tel est le cas la ressource doit la prendre en charge en fournissant du matériel photocopiable par exemple. J'attends également qu'on propose des activités de différenciation soit par un aménagement des situations proposées, soit si c'est nécessaire en prévoyant des activités de remédiation, pour mettre en place une aide particulière à des élèves qui en auraient besoin. J'attends aussi qu'à l'inverse on propose des activités pour aller plus loin destinées aux élèves plus performants en lien avec les programmes du niveau de classe suivant ».

Le travail de numération sur les nombres à trois chiffres a pour point de départ une situation de dénombrement d'une collection de bouchons pour laquelle les enfants vont réaliser les groupements successifs par dix. A partir de là l'enseignante fait des activités ritualisées sur le dénombrement et le nombre de (combien d'enveloppes de 10 dans un nombre à trois chiffres d'enveloppes ?). Des activités d'échanges entre unités sont réalisées (jeu de l'oie). Le travail sur les groupements est aussi revu avec la technique opératoire de l'addition (retenue). Enfin des tâches de recomposition avec plus de 10 unités à certains ordres sont travaillées ainsi que des tâches de conversions entre unités (prises dans le manuel Cap Maths). Par contre elle ne travaille pas trop les décompositions canoniques qui sont trop « mécaniques » et qui « n'apportent pas vraiment une meilleure compréhension ». Elle signale qu'elle passe un temps très important à travailler la numération, (« déjà, ça me prend les trois quarts de l'année »). Elle évoque comme principale difficulté des élèves le passage de la manipulation aux écritures mathématiques.

Mme J

Mme J enseigne dans une classe de CE2 dans une école en milieu urbain socialement défavorisé (classée RAR). Elle a une classe de 18 élèves.

Mme J a dix ans d'ancienneté. Elle a déjà eu une classe de CE1, une de CE2/CM1, une de CM1/CM2 et une de CM2. Elle a des CE2 dans cette école depuis six ans (avec parfois un cours double CE2/CM1).

Le manuel de la classe est le manuel « Pour comprendre les maths CE2 » (édition Hachette). Mais Mme J utilise aussi ERMEL et Cap Maths (éditions Hatier) ainsi que Maths Elem (Belin).

Sur les nombres à trois chiffres elle travaille les types de tâches courants : écrire/nommer, décomposer/recomposer, écrire des suites de 10 en 10, comparer/ranger … mais elle fait aussi un travail sur différentes décompositions ainsi qu'un jeu avec des « échanges » du type 1 dizaine = 10 unités, etc. (jeu de l'oie de Cap Maths). Avec sa collègue de CM1 elles ont

[108] RAR : Réseau Ambition Réussite

pointé le travail sur les différents types de décomposition comme un axe à travailler particulièrement, ce qui pose des difficultés aux élèves. Elle évoque aussi la difficulté dans la différence entre *chiffre des* et *nombre de*.
Ses attentes pour une ressource sont justement en lien avec les difficultés des élèves mais aussi avec le besoin de renouvellement et de variété (« qui me permettent de varier un peu plus ou de trouver autre chose qui apporte un petit plus pour que ce soit plus efficace auprès des élèves »).

II.3 Des remarques sur les séquences des enseignants sur les nombres à trois chiffres

Les entretiens avec les enseignants permettent de renforcer les constats faits lors de la partie I (chapitre 3) concernant les contraintes institutionnelles. Le travail sur les nombres à trois chiffres est centré sur les types de tâches qui apparaissent dans les programmes récents.
Cependant des enseignants indiquent toutefois travailler des types de tâches pouvant mettre en jeu le principe décimal comme les conversions entre unités, les recompositions avec plus de dix unités à un ordre (Mme H), les différentes décompositions d'un nombre (Mme E et Mme J).
Les cinq enseignantes interrogées travaillent le type de tâches *nombre de* pour les nombres inférieurs à mille. Trois d'entre elle l'évoquent en parlant de la « différence entre *chiffre des* et *nombre de* ». Des enseignantes soulignent la difficulté que cela pose comme le seul point difficile pour les élèves sur la numération. Une enseignante (Mme F) a presque abandonné ce travail à cause de ces difficultés, peut-être parce qu'elle ne voit pas l'utilité de cette connaissance pour les élèves.
Comme nous avons étudié seulement les séquences des manuels sur les nombres à quatre chiffres, il est possible que les types de tâches mettant en jeu le principe décimal soient davantage travaillés dans les séquences sur les nombres inférieurs à mille. Mais le type de tâches de conversion entre unités de numération (T_{Ceun}) n'est traité que par une seule enseignante (Mme H, à partir d'une activité du manuel *Cap Maths*). Quand nous avons présenté ce type de tâches à Mme G dans l'entretien initial, voici ce qu'elle nous dit :

> « J'avais jamais vu ça. Ça, ça me plait beaucoup. Et c'est idiot hein de ne pas avoir eu cette idée là ! Trouver la correspondance entre 80 unités et combien de dizaines, j'ai rarement vu ça ».

C'est est une conséquence de la quasi absence de visibilité de ce type de tâches que nous avons relevé dans l'étude des manuels et programmes récents.

III. Choix généraux d'ergonomie pour la version 1 de la ressource

Nous nous sommes appuyés sur les résultats de la pré-expérimentation pour les principaux choix généraux effectués concernant l'ergonomie de la version 1 de la ressource : le support, les différentes parties et leur organisation. On trouvera en annexe (CD-ROM) la version 1 de la ressource (copies d'écran de chaque page du site internet). Voici une partie de la page d'accueil permettant de voir les différents menus (page suivante) :

Figure 81 : les différents menus de la page d'accueil du site

Nous découpons l'étude de ces choix selon les trois parties du site : *la numération décimale* (apports généraux sur la numération), *les situations*, *la séquence* (pour ce dernier aspect on trouve aussi des éléments dans la deuxième partie du site).

Les apports généraux sur la numération (première partie du site)

Dans une première partie, intitulée « La numération décimale », nous proposons des apports sur : les deux principes de la numération (position et décimalité), l'usage du matériel, les unités de numération, un constat sur ce que l'on trouve habituellement dans les manuels, les difficultés des élèves, le lien avec les techniques opératoires. Nous avons ajouté le lien entre numération et mesures de grandeurs, en particulier les conversions de mesures (pour les grandeurs du système métrique).

Les entretiens de la pré-expérimentation ont apporté des informations quant à l'utilisabilité des apports pour l'enseignant. L'intérêt de mettre en évidence les principes de la numération dans une première partie de la ressource a été souligné par Mme C. En effet ce sont les principaux éléments qu'elle a véritablement lus, le reste de la première partie ayant été survolé du fait de sa familiarité justement avec ces savoirs (influence de son manuel actuel). Ce n'était pas le cas de Mme D qui, elle, s'est davantage attardée sur la première partie excepté le lien entre numération et techniques de calcul posé. La description de la séquence proposée dans la version 0b (qui avait été modifiée entre les deux observations) n'a pas été regardée car jugée trop complexe (à cause des « flèches » semble-t-il). Cela pourrait plutôt témoigner d'une moins grande préoccupation de l'enseignante pour ces questions d'organisation mathématique (et didactique) de la séquence. Nous avons donc choisi de laisser dans une première partie du site les apports généraux pour l'enseignant et nous avons constitué cette fois une partie spécifique concernant la construction d'une séquence à partir des situations proposées (troisième partie).

Les situations (deuxième partie du site)

Dans une deuxième partie nous décrivons les situations. Nous avons découpé les deux situations principales (dénombrement et commande) en cinq « situations-clés » qui sont le cœur de la séquence à construire et qui en constituent le fil directeur. Nous proposons également des « situations complémentaires » dans d'autres contextes ou hors de tout contexte.
La description d'une situation est découpée en quatre sous-parties :

- Les *savoirs en jeu* : il s'agit d'une description de l'organisation mathématique ponctuelle visant à permettre à l'enseignant d'avoir immédiatement un regard sur les mathématiques en jeu. Elle est appuyée sur d'autres contextualisations (que celle de la situation) pour bien montrer que ce qui importe ce sont les mathématiques et pas le matériel en lui-même.
- La *situation* : description des enjeux, du matériel, de la situation avec des exemples, des variables didactiques et des éléments du milieu pour la phase de conclusion collective.
- Des *éléments de synthèse* : pour aider l'enseignant à faire une synthèse mais aussi à gérer la situation en prenant en compte les savoirs, savoir-faire, erreurs, … pointés dans cette synthèse. En appui ici encore sur l'organisation mathématique ponctuelle mais avec des éléments contextualisés à la situation.
- Des *compléments* éventuels qui peuvent porter sur la mise en œuvre de la situation, des variantes, des prolongements …

Suite à la pré-expérimentation nous sommes amené à davantage mettre en évidence dans notre ressource tout ce qui peut permettre à la fois la dévolution et la régulation d'une situation (description du milieu de la situation, des variables didactiques …) mais aussi l'institutionnalisation des savoirs en jeu, c'est-à-dire ce qu'il faudra retenir, l'organisation mathématique visée. Cette partie de description des enjeux mathématiques n'est pas une synthèse et/ou trace écrite prête à l'emploi mais bien une proposition pour permettre à l'enseignant de concevoir sa propre synthèse et/ou trace écrite mais aussi de bien s'approprier les savoirs en jeu dans la situation pour mieux conduire sa séance.
Dans la description de « la situation » il est apparu important de garder la description des variables didactiques avec des exemples car cela peut provoquer une étude de ces variables par l'enseignant (qui semble chercher à proposer une progressivité dans la difficulté). Mais aussi de continuer de laisser l'enseignant construire ces fiches si cela peut lui permettre une meilleure appropriation des enjeux. Pour chaque situation la ressource propose une même phrase décrivant succinctement la modalité de la phase de conclusion du type : « L'enseignant recense au tableau les différents résultats trouvés par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité ». Ainsi nous pourrons mieux étudier les différences entre les phases de conclusion des différentes situations.
Pour amener les enseignants à proposer une synthèse en fin de séance, nous avons d'indiqué[109] à la fin de la description de la situation : « Synthèse : qu'avez-vous appris aujourd'hui ? ». Cela est très court et identique pour toutes les séances ce qui peut favoriser son appropriation par les enseignants. Les réponses des élèves, peuvent être parfois surprenantes (relativement aux savoirs visés) et ainsi permettre à l'enseignant de se rendre compte de la nécessité de pointer avec les élèves ce qu'il faut retenir de la séance.
Nous présentons plus en détail chacune de ces situations dans les chapitres 9 et 10.

[109] Sur une idée de Cécile Allard, dont le travail de thèse (en cours) porte sur l'institutionnalisation.

Les éléments pour la construction d'une séquence par l'enseignant

Un *mode d'emploi* est proposé dans la ressource pour préciser ce qui reste à la charge de l'enseignant dans la construction de la séquence. Voici ce qui est indiqué :

La construction de la séquence est à la charge de l'enseignant
Des situations-clés ...
L'enseignant aura une certaine marge de manœuvre dans la mise en œuvre des situations mais il devra cependant respecter le **passage obligé par les situations proposées qui sont au cœur de la progression**. En particulier ces situations s'appuieront sur des problèmes de **dénombrement** et de **commandes**.
L'enseignant devra **respecter l'ordre des situations proposées** : d'abord "combien de bûchettes ?" puis "comptes de bûchettes", etc.
... qui seront à compléter par l'enseignant par d'autres situations, exercices, traces écrites, évaluations, etc.
Nous n'avons **pas prévu de situations spécifiques** sur l'écriture de nombres en chiffres ou en lettres, sur la comparaison, sur la productions de suites écrites, sur la conversion entre unités etc. **Cela reste à la charge de l'enseignant.**
Ces types de tâches pourront être cependant travaillés **à partir des situations-clés**.
Par exemple, on pourra travailler l'écriture de nombres en chiffres ou en lettres (écrire le résultat du dénombrement en lettres ...) ou la comparaison (comparer le nombre d'éléments de deux collections) à partir des situations de dénombrement.
Il reste aussi à la charge de l'enseignant, dans la mise en œuvre de sa séquence, de **proposer des exercices d'entraînement, des traces écrites, des évaluations** ...

Figure 82 : le « mode d'emploi de la séquence » proposé dans le site

Le canevas didactique qui est proposé dans la ressource est constitué de la suite des cinq situations-clés. Les quatre premières situations sont données dans un même contexte ce qui présente l'intérêt de montrer l'évolution au niveau des savoirs (et non pas des contextes) mais pose des questions pour la décontextualisation des connaissances. C'est seulement dans la cinquième situation qu'un autre contexte est introduit.
Ainsi il a semblé nécessaire de proposer des « situations complémentaires » permettant de retravailler les connaissances construites dans les situations principales dans des contextes variés ou hors contexte.
Un tableau général des situations est proposé dans le site (partie « Les situations ») pour donner une vue générale des situations proposées et permettre un accès direct par lien hypertexte. Les cinq situations principales apparaissent en gras. Les autres sont les situations complémentaires.

Tâches	*Contexte des bûchettes*	*Autres contextes*	*Décontextualisé*
Réciter la comptine orale des nombres			Jeu du furet (à faire **AVANT** de proposer les situations clés et éventuellement pendant la séquence également).
Dénombrer une collection	**1.Combien de bûchettes ?** (avec collection de bûchettes "en vrac") **2.Comptes de bûchettes** (avec collection de bûchettes déjà groupées) **3.Le jeu des paris** (réunion de deux collections, avec unités de numération)	Combien de carreaux ? (papier millimétré) Combien de trombones ?	
Passer une commande (décomposer un nombre ou convertir)	**4.Marchand de bûchettes** (avec unités de numération)	**5.Commande de timbres** (avec unités de numération)	Le jeu des familles (décomposer/recomposer)
Nombre de		La tombola Combien de rubans ?	
Comparer		Qui a le plus de timbres ?	
Compléter la suite écrite des nombres			La calculatrice (aspect algorithmique)
Passer de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres	*Ne met pas en jeu l'aspect décimal de la numération.*		

Figure 83 : Tableau des situations proposées dans la ressource

La troisième partie du site, intitulée « La séquence » propose des éléments pour aider l'enseignant à construire une séquence complète. Un rappel des programmes de 2008 est proposé ainsi que le lien avec les cinq situations principales. Les autres types de tâches présentés sont :

- Écrire un nombre en chiffres ou en lettres
- Convertir
- Comparer, ranger
- Compléter une suite de nombres.

Un exemple d'exercice est proposé pour chacune. Par exemple convertir 30 centaines en milliers ou 3 milliers en centaines.

Notre hypothèse est que l'enseignant peut commencer à prévoir des exercices d'entraînement, des moments de synthèse, des moments d'évaluation, etc. en s'appuyant sur cette partie de la ressource.

Enfin, dans le site, des pistes sont avancées concernant les liens entre numération et calcul posé d'une part, conversions de mesures du système métrique d'autre part. Cela est évoqué :

- dans une sous-partie des apports pour l'enseignant « numération décimale » intitulée « lien avec d'autres notions » : pour chaque technique de calcul posé il est expliqué comment interviennent les savoirs de numération. Un exercice de conversions de longueurs faisant le lien avec les unités de numération est donné en exemple ;
- dans une sous-partie de « la séquence » intitulée « Place dans la programmation » où ce lien avec les précédentes notions est rappelé.

Nous ferons une évaluation de ces choix généraux d'ergonomie de la ressource dans le chapitre 11 à partir des entretiens avec les enseignants.

IV. Choix de mise en scène de la situation fondamentale pour le canevas didactique

En tenant compte de la pré-expérimentation nous avons fait certains choix de mise en scène de la situation fondamentale. En voici les grandes lignes.

Le canevas didactique général se compose de deux situations correspondant aux deux « sens » de la situation fondamentale : de la collection (ou la description de sa quantité en EUN) vers l'EC, appelée *situation de dénombrement (S_D)*, et réciproquement de l'EC vers la collection (ou la description de sa quantité en EUN), appelée *situation de commande (S_C)*.

La situation de dénombrement est une mise en scène des jeux 1, 1' et 3 de la SF. Nous partons d'un problème de dénombrement d'une collection matérielle en vrac ou totalement groupée (variantes S_{Dv1} et S_{Dv2}) pour construire le millier comme dix centaines et y associer le rang de l'EC. Dans ce travail le jeu sur les variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « présence/absence d'unités » doit permettre de mettre en jeu les deux premières conditions de la technique de juxtaposition : respect du rang de chaque unité et présence de chaque unité dans l'EC (avec rôle du zéro). Pour rendre nécessaire le recours à la troisième condition, nombres d'unités à un seul chiffre dans l'EC, nous proposons une variante de dénombrement d'une réunion de collections (variante S_{Dv3}). Cela doit amener les élèves à faire des conversions entre unités (principalement de centaines en milliers).

La situation de commande est une mise en scène des jeux 2, 2' et 4 de la SF. Elle vise un réinvestissement des connaissances construites dans la situation précédente et met en jeu

des conversions dans le sens inverse (principalement des milliers en centaines). Le jeu sur le stock du « marchand » doit permettre de faire faire des décompositions variées (variante S_{Cv1}) en EUN. La technique de troncature apparaît alors comme un cas particulier de méthode de conversion (à partir de l'EC) et permet de résoudre des problèmes en contexte (variante S_{Cv2}).
Tous ces choix, ainsi que ceux faits pour la description des situations dans la ressource, seront présentés plus en détails dans l'analyse *a priori* des situations.

V. Précisions sur les questions et la méthodologie

Pour étudier la validité des choix de mise en scène de la situation fondamentale, nous allons analyser la mise en œuvre des situations en classe, selon un double questionnement :

- permettent-elles de produire les connaissances prévues ? Y'a-t-il des difficultés résistantes ?
- quelles sont les adaptations réalisées par les enseignants dans la mise en œuvre des situations en classe ? Y'a-t-il certaines résistances ?

Ces deux points de vue ne sont bien sûr pas indépendants puisque c'est à partir des mises en œuvre des situations par les enseignants que nous étudions les apprentissages possibles des élèves.
Mais se posent aussi des questions au niveau des séquences construites par les enseignants à partir des situations proposées dans la ressource : lesquelles utilisent-ils (situations-clés, situations complémentaires, …) ? Que construisent-ils comme exercices d'entraînement, comme traces écrites de synthèse, comme évaluations, …. ?
Enfin, la comparaison des mises en œuvre des séances par différents enseignants peut aussi nous apporter des informations sur les pratiques des enseignants.
Nous allons maintenant préciser notre méthodologie pour l'étude de ces questions. Nous découpons les analyses des deux situations en deux chapitres (chapitres 9 pour le dénombrement et chapitre 10 pour les commandes). À l'intérieur de chacun de ces chapitres la méthodologie utilisée ainsi que le plan sont les mêmes.

Analyse a priori *des situations*

Nous commençons par faire une analyse *a priori* des situations (ou des éléments de situation) proposées dans la ressource, c'est-à-dire des mises en scène de la situation fondamentale. Pour chaque situation (à usage didactique) nous présentons le problème proposé et l'enjeu de la situation (les savoirs et savoir-faire en appui sur la notion d'organisation mathématique ponctuelle). Nous étudions le milieu, les variables didactiques, les actions possibles des élèves (techniques, erreurs). Nous posons également certaines questions pour la mise en œuvre par l'enseignant en lien avec cette analyse.
Des éléments de description de la situation telle qu'elle est proposée dans la ressource sont mêlés à l'analyse *a priori*. Par exemple lorsque nous étudierons les variables didactiques d'une situation nous indiquerons comment elles sont décrites dans la ressource.

Analyse de la mise en œuvre des situations dans les classes pour le groupe de travail

Un découpage de l'analyse de la mise en œuvre en classe par type de situation
Comme le canevas didactique de la ressource se compose de deux situations principales inverses l'une de l'autre, nous décomposons la séquence construite par les enseignants en deux parties correspondant au travail sur chacune de ces situations. L'analyse de la mise en œuvre sera donc découpée elle aussi en deux parties : la situation de dénombrement puis la situation de commande.
Ainsi, pour chaque enseignant, nous faisons une analyse de la mise en œuvre de chaque situation avec ses différentes variantes (donc plusieurs séances). Une fois cela réalisé pour tous les enseignants, nous faisons un bilan de la mise en œuvre de chaque situation en pointant les modifications éventuelles à apporter à la situation et à sa description dans la ressource.

Analyse des séances de classe
Pour l'analyse des séances de classe, à partir de nos observations, nous effectuons d'abord une description du déroulement de la séance (dans les annexes III.2 et III.3). Ensuite nous réalisons une analyse de la séance. Nous commençons par décrire les choix réalisés par l'enseignant, en lien avec l'analyse *a priori* de la situation que nous avons effectuée. Nous étudierons principalement le milieu installé par l'enseignant, les valeurs des variables didactiques et nous déterminerons des modifications éventuelles que ces choix peuvent avoir sur l'analyse *a priori* de la situation. Nous poursuivons avec un tableau récapitulatif du déroulement et de l'organisation mathématique construite dans la séance dont voici les différentes colonnes :

Temps	Tâches	Phases et organisation	Techniques et éléments technologiques

Pour ce tableau, un premier découpage est réalisé en fonction de la *tâche* mathématique travaillée (en précisant les valeurs numériques) dans la deuxième colonne du tableau. Pour chacune des tâches, un deuxième découpage est effectué par *phases*[110], dans la troisième colonne : rappel, présentation du problème, recherche, conclusion[111], synthèse, … ainsi que par types d'organisation (individuel, groupes, collectif). Dans la dernière colonne nous indiquons les techniques et éléments technologiques formulés dans la classe (formulés directement par l'enseignante ou reformulés à partir d'une proposition d'élève)[112]. Nous soulignons les éléments technologiques pour les distinguer des techniques.
Ensuite, nous faisons une analyse du déroulement de la séance, en appui sur les notions de milieu et de contrat didactique. Nous étudions en particulier les modifications du milieu effectuées par l'enseignante au cours de la séance ainsi que la négociation du contrat didactique, le partage des responsabilités entre enseignant et élèves dans l'introduction des techniques et des éléments technologiques. Nous prendrons en compte l'utilisation des

[110] Selon Margolinas (1993), « une phase est un moment du déroulement effectif des actions du maître ou de l'élève. Dans une perspective « d'observation » une phase n'est pas en général analysable *a priori*, mais elle l'est *a posteriori*. L'existence de *phases* peut être prévue par une analyse a priori. On pourra distinguer *a priori* les phases *possibles* et les phases *nécessaires* dans le déroulement d'une situation. Mais ce n'est qu'*a posteriori* qu'on pourra analyser le déroulement effectif de ces phases, et déterminer quelle aura été leur nature » (p.75).
[111] Selon Margolinas (1993), une phase de conclusion est une phase « *au cours de laquelle l'élève accède à une information sur la validité de son travail. Cette information doit être pertinente du point de vue du savoir en jeu* » (p.29). Elle peut être gérée par le maître comme une phase d'évaluation ou de validation.
[112] Dans certaines séances où aucune formulation (ou reformulation) de technique de la part de l'enseignant n'apparaît alors que des élèves ont formulé une technique au tableau devant les autres, nous écrivons cette technique en italique.

ostensifs par les élèves et l'enseignant. Nous étudions les techniques voire les éléments technologiques effectivement utilisés par les élèves ainsi que les difficultés et erreurs rencontrées. Nous explicitons aussi les savoirs et savoir-faire institutionnalisés dans la classe.

<u>Récapitulatif de la mise en œuvre de chacune des situations principales par l'enseignant</u>
Les séquences des enseignants du groupe de travail sont découpées selon les deux situations principales, ce qui permettra de faire un retour sur chacune de ces situations. Pour cela nous faisons un tableau récapitulatif dans lequel nous indiquons les différentes activités proposées par l'enseignant. Nous précisons si elles sont ou non extraites de la ressource, le type de tâches travaillé (et le contexte dans lequel il est proposé) ainsi que les principaux éléments de savoirs (techniques et éléments technologiques) institutionnalisés (pour les séances observées) :

Activités proposées : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**

Nous nous appuyons sur nos observations de séances et leur analyse faite juste avant. Pour les séances non observées nous prenons en compte ce que l'enseignant nous a dit de sa séquence lors de l'entretien final. Nous tenons également compte des techniques, erreurs et difficultés effectivement observées chez les élèves et de leur évolution sur l'ensemble des séances.
L'analyse s'appuie toujours sur les concepts de dévolution et d'institutionnalisation, mais ici considérés comme des processus d'ensemble.

<u>Le retour sur l'analyse *a priori* de la situation et de sa description dans la ressource</u>
La comparaison des mises en œuvre par les différents enseignants nous permet de faire un bilan de la situation en revenant sur l'analyse a priori, la description de la situation dans la ressource et en envisageant des modifications possibles.

Bilan de la version 1 de la ressource et propositions de modifications

Dans le chapitre 11, nous faisons le bilan de l'usage de la ressource en revenant sur la mise en scène de la SF et sa description de la ressource à deux niveaux : celui du canevas didactique général et celui des situations. Nous revenons aussi sur certains aspects généraux liés à la description des situations, les séquences des enseignants et les résultats des évaluations des élèves. Des modifications peuvent alors être envisagées pour une prochaine version de la ressource.

Chapitre 9

La situation de dénombrement d'une collection et sa mise en œuvre

Nous nous appuyons sur la méthodologie présentée dans le chapitre 8 : nous commençons par une analyse *a priori* de la situation de dénombrement tout en indiquant des éléments de description de cette situation dans la ressource (§I). Puis, nous effectuons une analyse des déroulements dans chacune des classes des enseignants du groupe de travail (§II). Nous terminons en revenant sur la situation et sa description dans la ressource en tenant compte de nos analyses des classes. Cela permet d'envisager des modifications possibles pour la mise en scène de la SF ou sa description dans la ressource (§III).

I. Analyse *a priori* de la situation S_D de dénombrement de collections et éléments de description de cette situation dans la ressource

Cette situation (à usage didactique) est une mise en scène des jeux 1 et 3 de la situation fondamentale. Le problème initial est le dénombrement d'une collection matérielle mais, au fur et à mesure des variantes, se posent des problèmes de traductions d'écritures (EUN vers EC ou inversement) puisque les quantités des collections sont alors décrites en unités de numération.

Nous proposons cette situation de dénombrement avant celle des commandes pour amener les élèves à faire un travail de conversion entre unités de numération en lien avec les groupements servant à dénombrer une collection. Ainsi, dans cette première partie de la séquence, le dénombrement amène les conversions entre unités quand la collection n'est pas totalement organisée ou bien quand plusieurs collections sont réunies. Dans la situation de commande d'une collection, il s'agira de réinvestir les conversions pour produire des écritures différentes d'un même nombre en unités de numération.

Connaissances (anciennes) supposées des élèves

Il est possible de supposer chez les élèves des connaissances sur les nombres inférieurs à mille liées au dénombrement, à l'association nom/écriture, aux conversions ... C'est l'adaptation de ces connaissances prenant en compte la nouvelle unité, le millier, qui est visée. Mais suite à notre étude des connaissances des élèves sur les nombres inférieurs à mille (cf. partie I) nous pouvons nous attendre à des difficultés importantes concernant le principe de position dans le cas où les unités ne sont pas données dans l'ordre conventionnel, dans le cas de l'absence d'unité isolée à certains ordres ainsi que pour les conversions entre unités. Par contre l'association nom/écriture pourrait être bien maîtrisée et donc fournir un moyen de contrôle des réponses (critère de validité).

Une variable didactique essentielle : l'organisation de la collection

Comme nous l'avons vu dans la situation fondamentale, la collection à dénombrer peut être soit « en vrac », soit partiellement ou totalement groupée (on ne travaille qu'avec des groupements successifs par dix). Dans ces derniers cas, le nombre d'unités de chaque ordre devient une variable didactique essentielle :

- pas d'unité isolée à un certain ordre ou à plusieurs ;
- des unités en nombre strictement inférieur à dix à tous les ordres ;
- des unités en nombre supérieur ou égal à dix à un ou plusieurs ordres.

Le dernier cas peut se produire lors de la réunion de plusieurs collections totalement groupées. C'est pourquoi nous avons choisi de découper la situation de dénombrement en trois variantes :

- S_{Dv1} : dénombrement d'une collection « en vrac » ;
- S_{Dv2} : dénombrement d'une collection totalement groupée ;
- S_{Dv3} : dénombrement d'une réunion de collections.

Le choix d'intercaler la variante S_{Dv2} correspond à l'approche suggérée par les enseignantes de la pré-expérimentation. Cela permet de renforcer les connaissances liées au principe de position dans la deuxième variante avant de mettre en jeu les conversions entre unités liées à la réunion de collections. Une autre raison de ce choix vient du fait que, pour que les élèves comprennent l'intérêt de faire des conversions pour dénombrer une réunion de collections (ou une collection partiellement groupée) il faut qu'ils connaissent la technique directe de dénombrement de collections totalement groupées (par juxtaposition des nombres). Ils chercheront ensuite comment l'adapter aux cas où des conversions sont en jeu (pour augmenter sa portée). En proposant trop tôt le dénombrement d'une réunion de collections, les élèves pourraient rester sur des techniques de comptage oral ne mettant pas en jeu les conversions ou sur des additions.

Analyse a priori de la variante S_{Dv1} : « combien de bûchettes ? »

Cette variante est le point de départ du canevas didactique proposé dans la ressource. L'enjeu est le dénombrement d'une collection « en vrac » mais aussi la constitution des groupements successifs d'une collection qui permet de construire le milieu des variantes qui suivent. Nous en faisons une analyse *a priori* très succincte car l'enjeu de l'écriture chiffrée se situe selon nous davantage dans les deux variantes qui suivent.
On peut penser que les élèves ont déjà été confrontés au dénombrement de collections en vrac pour des quantités moins grandes et ont donc déjà appris l'intérêt de grouper par dix. Dans la dialectique ancien/nouveau le nouveau ne concerne pas les groupements en dizaines et centaines, mais le fait de poursuivre le principe des groupements pour constituer une nouvelle unité, le millier, égale à dix centaines. Les élèves peuvent inférer ce nouveau groupement par itération des mêmes types de groupements que pour les ordres inférieurs. La situation ne peut apporter de rétroaction en cas d'erreur. C'est l'enseignant qui est le garant de la validité des types de groupements effectués.
De plus si les élèves ne font pas le groupement en milliers ils peuvent obtenir une réponse correcte par simple juxtaposition des nombres correspondant aux différents groupements (sans prise en compte de la position de ces groupements dans l'écriture en chiffres). Par exemple s'ils obtiennent 24 paquets de cent, 3 paquets de dix et 5 bûchettes seules, une juxtaposition des nombres 24, 3 et 5 donne la bonne écriture.
Dans la ressource, une fois les groupements réalisés (en paquets de dix, sachets de cent et boites de mille) il est proposé de poser aux élèves le problème : « combien de bûchettes dans une boite ? » avant de demander « combien de bûchettes en tout ? ».
Pour le premier problème les élèves doivent d'abord chercher le nombre de bûchettes dans un « sachet » (sauf si cela a déjà été formulé au cours de la constitution des sachets) à partir du nombre de bûchettes dans un « paquet ». Dix paquets de dix c'est cent (par définition ou bien comptage oral ou encore calcul). Puis, si les élèves ont le matériel à disposition (sinon ils peuvent le dessiner) ils peuvent effectuer un comptage de cent en cent. Il faut alors savoir qu'après « neuf-cents » c'est « mille », ce qui s'écrit « 1000 ». Les élèves peuvent aussi faire un calcul pour trouver l'EC (10×100=1000 par une généralisation de la « règle des zéros » ou 100 + 100 + … 100 = 1000 par une addition posée ou comptage).
Pour dénombrer la collection entière de bûchettes en utilisant leurs connaissances, les élèves peuvent essayer de faire un comptage en unités simples ou un calcul (addition posée). Il est possible que la technique de juxtaposition n'apparaisse pas encore, même si elle est connue pour les nombres plus petits. Il est du ressort de l'enseignant de dire que les milliers s'écrivent à gauche des centaines. Cependant, les élèves ne peuvent pas encore percevoir ici l'intérêt de cette technique par rapport aux autres. Cela ne pourra se faire que lorsqu'ils seront confrontés au dénombrement de plusieurs collections, voire de réunions de collections, ce qui sera le cas dans les autres variantes.
Des interventions de l'enseignant sont prévisibles dans cette situation pour s'assurer que les élèves choisissent les bons groupements et nécessaires pour faire des apports sur le lien oral/écrit.
Dans cette première variante on vise principalement les relations entre unités. C'est seulement par la suite que nous chercherons à ce que les élèves s'approprient réellement le lien entre cette façon de grouper successivement par dix et l'écriture du nombre.

Analyse a priori de la variante S_{Dv2} : « comptes de bûchettes »

L'enjeu de cette variante est de permettre aux élèves de s'entraîner à dénombrer des collections totalement groupées, dans des cas variés. Cela devrait permettre de faire émerger la technique de juxtaposition tout en dépassant la simple juxtaposition des nombres que l'on peut inférer lorsque l'on est confronté à certaines collections. En particulier il faut amener les élèves à prendre en compte la condition de présence de chaque unité dans l'EC, ce qui amène à écrire le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées à certains ordres.
Le milieu de la situation contient la collection à dénombrer (qui est totalement groupée) mais elle n'est pas à disposition des élèves pendant la recherche. Dans la ressource il est proposé qu'elle soit montrée aux élèves par l'enseignant (qui peut aussi en donner une description orale) ou bien dessinée au tableau. Dans ce dernier cas l'élève doit savoir que le rectangle allongé représente une « boite » de bûchettes c'est-à-dire un « millier » de bûchettes ou « mille » bûchettes, etc. L'élève a à sa disposition de quoi écrire.
Les élèves ont déjà des connaissances sur les nombres inférieurs à mille : comptage de un en un, dix en dix, cent en cent, association entre une collection de moins de mille éléments et son écriture chiffrée (avec utilisation éventuelle des EUN), association entre le nom du nombre et son écriture chiffrée. Il est aussi possible que l'élève sache effectuer un comptage oral de mille en mille. Dans la ressource, il est proposé de travailler cela avant la séquence (dans une interprétation purement ordinale, sans savoir que mille c'est dix fois cent). Les élèves ont aussi des connaissances relatives aux groupements successifs par dix des collections présentées ici car elles ont permis l'organisation de la collection dans la séance précédente.
Les connaissances nouvelles à construire concernent la nouvelle unité, le millier : son lien avec l'écriture en chiffres (rang) ainsi qu'avec le mot « mille » dans le nom du nombre et le fait qu'un millier vaut dix centaines, même si, pour le moment les relations entre unités peuvent rester transparentes.
Voici des exemples de collections à dénombrer telles qu'elles sont proposées dans la ressource.

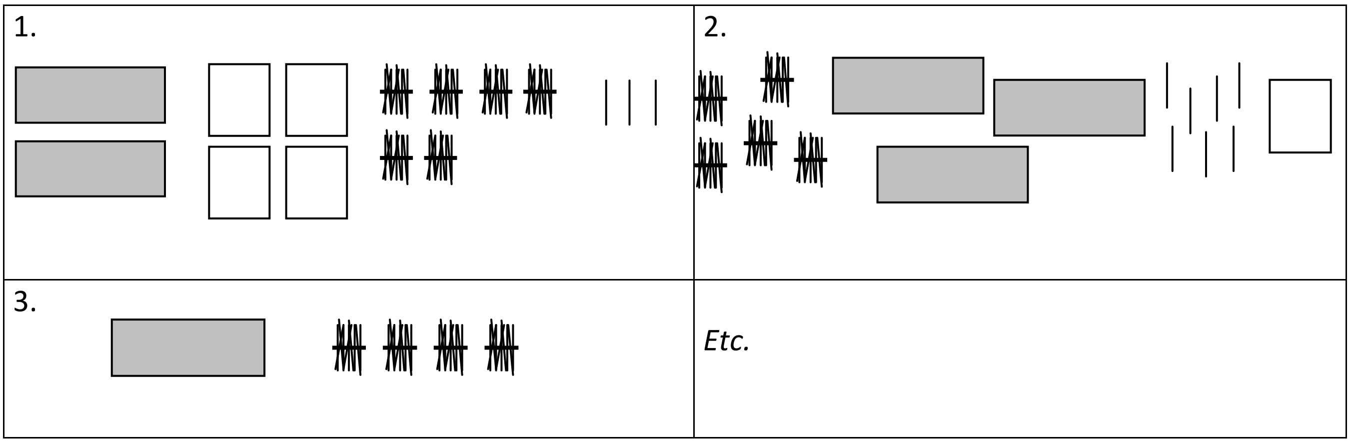


Figure 84 : exemples de dessins de collections à dénombrer proposés dans la ressource

Choix des valeurs des variables didactiques de la situation :
L'ordre dans lequel les différents groupements sont proposés (par exemple 1 boite, 6 sachets, 2 paquets et 3 bûchettes ou 2 paquets, 1 boite, 3 bûchettes et 6 sachets). Proposer toujours les groupements dans l'ordre décroissant (où même croissant) de leur valeur peut amener les élèves à inférer une simple juxtaposition des nombres de la gauche vers la droite

(ou l'inverse) sans prise en compte de la position des unités correspondantes. Il pourrait donc y avoir un obstacle didactique lié à ce choix de présentation des différents groupements.

Le nombre d'objets pour chaque groupement : ici il est toujours inférieur à 9 car il a été choisi de travailler avec des collections totalement groupées. On peut également ajouter que plus le nombre d'objets de chaque groupement est grand, plus le comptage oral peut être source d'erreurs (difficulté de mémorisation dans la suite des mots à énoncer, difficulté de la coordination de cette énonciation avec l'énumération de la collection, etc.). La **présence/absence d'unités isolées à un certain ordre** relève de cette variable didactique. Par exemple absence d'objets groupés par centaine : cela amène à utiliser le 0 et à utiliser la position pour marquer le rang des chiffres situés à sa gauche. On peut noter que l'ordre de l'unité à laquelle il n'y a pas d'unité isolée est aussi une variable. Dénombrer une collection de 3M 2C 5U permet de traiter la question du zéro en appui sur des connaissances anciennes (3M et 205U donc 3205) alors que 3M 2D 5U pourrait amener à écrire 325 (pour 3M et 25U).

Ces premières variables didactiques sont précisées dans la description de la situation de la ressource. Ce n'est pas le cas des deux suivantes.

- Le temps de présentation des collections : plus on doit aller vite plus la technique de juxtaposition est efficace. Dans la ressource, cela est indiqué dans les compléments de la situation.
- Dans le cas d'une collection représentée, l'organisation des objets d'un même groupement. En effet, si les centaines par exemple sont organisées en un alignement de 5 centaines et 2 centaines en-dessous ou bien en reproduisant l'organisation spatiale des constellations du dé (cinq et deux), cela peut permettre une reconnaissance immédiate du nombre de centaines (si les élèves connaissent cette configuration spatiale du 7).

Nous allons maintenant présenter différentes <u>techniques possibles</u> en commençant par le cas où il y a absence d'une unité à un ordre. Les élèves ayant des connaissances sur le dénombrement de collections de moins de mille éléments, nous pouvons penser qu'ils vont s'engager dans les techniques que nous présentons, pour lesquelles nous donnons les éléments nouveaux à construire pour les adapter au cas des nombres supérieurs à mille.

Nous allons considérer, par exemple, une collection constituée de trois milliers, cinq dizaines et sept unités. Voici une description des techniques possibles, éléments technologiques en jeu et erreurs associées.

	Comptage oral en unités simples et traduction oral/écrit	**Ecriture en EAC et règle de calcul**	**Comptage en unités de numération et principe de position (technique de juxtaposition)**
Techniques	Mille, deux mille, etc. (connaissance de la suite orale) « Trois-mille-cinquante-sept » s'écrit 3057 (les élèves savent déjà écrire « cinquante-sept » en chiffres).	On commence avec soit comptage pour chaque unité soit directement 3 paquets de mille c'est « trois mille » ce qui s'écrit 3000. Ensuite on pose l'addition : 3000 + 50 + 7 = 3057.	Les milliers : un, deux, trois. Pas de centaine isolée. Les dizaines : … Donc 3057.

Éléments technologiques	Comptine orale et lien écrit/oral (les « mille » s'écrivent au 4ème rang).	Comptine orale ou lien oral/écrit (les « mille » s'écrivent avec 3 zéros à droite) puis la technique de l'addition posée.	Principe de position (les unités s'écrivent au premier rang, les dizaines au deuxième, etc.).
Erreurs possibles	Tout se qui se dit avant « mille » s'écrit à gauche du nombre à trois chiffres qui reste. On obtient 357.	Difficultés pour écrire trois mille, difficultés liées à l'alignement des chiffres pour l'addition posée.	Simple juxtaposition des nombres : 357. Ne sait pas marquer l'absence de centaine.

Les techniques observées dans les classes risquent d'être des mélanges de ces techniques théoriques. Dans la pratique, il pourrait être difficile de les distinguer.
Des connaissances sur le lien entre chaque groupement matériel et les mots correspondants (en unités de numération ou mots de la numération parlée) sont nécessaires pour toutes ces techniques. Concernant les mots utilisés, il n'y a pas de raison avec des collections totalement groupées d'utiliser les unités de numération (millier, …) plutôt que les mots de la numération parlée (mille, …) sauf si c'est une habitude de le faire. C'est seulement quand il y aura des conversions entre unités qu'il sera nécessaire d'utiliser les EUN.
Il est possible que l'élève commence par chercher le nom du nombre (techniques des deux premières colonnes) et associe au nombre dit son écriture en chiffres. S'il obtient un nombre à 3 chiffres (par exemple 357 pour 3M 5D 7U), une fois ce nombre écrit, des rétroactions liées à cette écriture ou bien à sa lecture peuvent intervenir à condition de mobiliser certaines connaissances :

- Si l'élève sait lire ce nombre (« trois-cent-cinquante-sept ») il peut se rendre compte qu'il n'entend pas « mille », alors que dans la collection on avait des boites de « mille ». La lecture des nombres inférieurs à mille apparaît donc comme un critère de validité.
- Si l'élève sait que quand on a une collection contenant des boites de mille, on doit avoir au moins quatre chiffres. Cette dernière connaissance est liée au savoir visé (les milliers s'écrivent au quatrième rang). Mais il est aussi possible que l'élève invalide de lui-même sa réponse par effet de contrat (on doit obtenir un nombre à quatre chiffres car c'est ce que l'on est en train de travailler).

En utilisant ses connaissances, l'élève peut prendre conscience du fait que le 3 des milliers ne peut pas se placer au troisième rang puisque dans ce cas il représente des centaines. Par extension des savoirs de la numération des nombres inférieurs à mille il peut alors utiliser le 0 pour marquer cette absence de centaine. Ainsi le 3 se retrouve au 4ème rang. C'est cette extension des règles de numération au cas du millier qui est en jeu.
Dans le cas de l'obtention d'un nombre à quatre chiffres (erreurs de comptage, etc.), le milieu n'apporte pas de rétroaction sauf s'il y a une confrontation avec les réponses d'autres élèves.
De même, dans le cas d'une collection avec présence d'unités isolées à chaque ordre, on retrouve les mêmes techniques et erreurs possibles, mais ces erreurs donnent alors lieu à un résultat correct. Par exemple pour une collection constituée de trois milliers, une centaine, cinq dizaines et sept unités, si l'élève écrit ce qu'il entend avant le nombre à trois chiffres (donc ici le « trois » de « trois mille ») il obtient bien le nombre 3157. De même s'il juxtapose les nombres 3, 1, 5 et 7.

<u>Apports de la ressource et discussion sur la mise en œuvre par l'enseignant</u>
Quelles sont les <u>interventions possibles de l'enseignant</u> selon les techniques utilisées par les élèves ? Si les élèves mettent en œuvre une technique de comptage par unités simples, l'enseignant peut jouer deux variables : le nombre d'objets par unité et le temps (plus il y a

d'objets, plus le temps est court et plus les élèves sont amenés à faire l'association directe collection/écriture chiffrée). Cela n'est pas proposé dans la ressource.

Nous avons mis en évidence l'importance du jeu sur présence/absence d'unités à certains ordres pour amener les élèves à prendre conscience du lien entre le nombre de milliers de la collection et le rang dans l'écriture en chiffres. Pour cette prise de conscience l'enseignant doit avoir un rôle à jouer : une fois le nombre trouvé, la confrontation du nombre total écrit en chiffres et du nombre d'unités de chaque ordre de la collection (qui se fait lorsque la réponse est affichée au tableau par exemple) peut permettre à l'élève de constater le lien entre le nombre de milliers et le 4ème rang à partir de la droite, etc. Il pourrait donc y avoir une certaine part d'ostension nécessaire dans la mise en œuvre de cette situation, notamment pour montrer l'association directe entre collection et écriture chiffrée sans utiliser le nom du nombre.

Des questions se posent sur <u>l'organisation des phases de recherche et de conclusion</u>.

Plusieurs cas de figures sont possibles :

- donner une liste de cas à chercher et organiser une phase de conclusion à la fin. Cela ne favorise pas l'évolution des techniques vers la prise en compte du lien entre nombre écrit en chiffres et nombre d'unités de chaque ordre de la collection pour les élèves qui feraient un comptage car le milieu est peu rétroactif ;
- donner un seul cas, laisser chercher les élèves, organiser une phase de conclusion (qui peut se limiter à une simple vérification par comptage avec le matériel ou une évaluation) puis proposer un autre cas, etc. ; cela peut favoriser le lien entre le nombre de milliers et l'écriture en chiffres, mais sous certaines conditions de mise en œuvre par l'enseignant (écriture au tableau, …). Cela pourrait avoir l'inconvénient d'une institutionnalisation dès le premier cas où le savoir n'est pas encore nécessaire.
- donner deux ou trois cas à chercher en jouant sur l'ordre des unités et l'absence de certaines d'entre elles, avant d'organiser une phase de conclusion. Cela pourrait permettre d'éviter les inconvénients des deux autres cas.

Une autre variable d'organisation concerne le fait de laisser chercher les élèves individuellement ou en groupe. Le travail de groupes peut permettre aux élèves de confronter leur réponse et peut ainsi amener des rétroactions du milieu.

Dans la ressource, les variables d'organisation (alternance entre recherche et mise en commun des réponses pour conclusion) ne sont pas fixées : cela est de la responsabilité de l'enseignant.

Une « phase de validation[113] » est évoquée dans la ressource où « l'enseignant recense au tableau les différents résultats trouvés par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité ». Le comptage oral en unités simples, en utilisant le matériel, est mis en évidence comme moyen de contrôle avec possibilité de le remplacer par le tableau de numération une fois qu'il aura été institutionnalisé.

Enfin <u>pour l'institutionnalisation</u>, l'enseignant pourra amorcer une décontextualisation des connaissances en utilisant les unités de numération. Le tableau de numération peut permettre d'institutionnaliser les savoirs en jeu en expliquant que les milliers s'écrivent au 4ème rang à partir de la droite (prolongement du tableau déjà connu par les élèves). Cependant ce tableau risque d'éviter une formulation orale ou en texte de ce savoir puisque la position est prise en charge par le tableau.

---

[113] « Phase de conclusion » aurait été plus approprié.

Dans la ressource, il est proposé de faire une synthèse de fin de séance en demandant aux élèves ce qu'ils ont appris. Un contenu possible d'institutionnalisation est proposé dans lequel l'utilisation des unités de numération est mise en avant. Une description de la technique de juxtaposition (et du principe de position qui la justifie) est faite à travers l'association de chaque unité à son rang dans un pseudo-tableau de numération (lignes et colonnes non matérialisées) :

Nous avons vu qu'il existe un moyen rapide de **trouver directement** l'écriture du nombre en chiffres : il y a 2 milliers de bûchettes, 6 centaines de bûchettes, 2 dizaines de bûchettes et 1 bûchette seule, ce qui peut s'écrire :

Milliers de bûchettes	Centaines de bûchettes	Dizaines de bûchettes	Bûchettes à l'unité
2	6	2	1

Il y a donc **2621 bûchettes en tout.**

Figure 85 : principe de position dans les « éléments de synthèse » (ressource)

Analyse a priori de la variante S_{Dv3} : « le jeu des paris »

Dans S_{Dv1} les élèves peuvent réussir sans prendre en compte la relation entre les unités, c'est-à-dire le lien entre les groupements successifs. Nous proposons dans cette troisième variante d'étendre la portée de la technique de dénombrement de collections totalement groupées au cas où il y a plus de dix unités isolées à certains ordres afin de rendre coûteux le passage par la technique de comptage oral en unités simples et donc nécessaires les conversions entre unités. Le problème proposé est de dénombrer une réunion de collections. Les collections sont toujours présentes dans la classe sans être à disposition des élèves dans la phase de recherche. Elles ne sont plus décrites par un dessin mais leur quantité est donnée avec les unités de numération (milliers de bûchettes, etc.). Cette variante est une mise en scène du jeu 3 de la situation fondamentale.
Voici l'exemple de la ressource :

Nous avons une collection de 2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules. Nous avons reçu un lot de 4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules. Nous avons réuni ces deux collections.
Maintenant, combien y a-t-il de bûchettes en tout ?
31215 ?
3215 ?
3315 ?
4215 ?

Figure 86 : description du problème dans la ressource

Une nouvelle <u>variable didactique</u> est liée aux réponses possibles proposées par l'enseignant, que nous appellerons les *nombres-paris*. Un de ces nombres est la désignation correcte de la quantité à obtenir et les autres sont obtenus par anticipation des réponses erronées d'élèves :

- 31215 : juxtaposition des nombres dans l'ordre,
- 3215 : juxtaposition des nombres en supprimant les dix centaines (sans les grouper en un millier),

- 3315 : juxtaposition des nombres en ajoutant le 1 et le 2 pour le nombre de centaines,
- 4215 : la bonne réponse (juxtaposition tenant compte des trois conditions $\theta_{CondRang}$, $\theta_{CondUnité}$, $\theta_{CondChiffre}$).

Les nombres-paris permettent alors de mettre dans le milieu, pour un travail en groupes ou en collectif, ces différentes erreurs. Il y aura alors une possibilité d'un enjeu de validation.
Les élèves peuvent utiliser deux types de stratégies dans la phase d'action.

a) Dénombrer chaque collection séparément puis effectuer une addition posée.

Comme la collection est désignée avec les unités de numération, l'élève peut en faire un dessin pour se ramener aux techniques décrites dans la variante précédente. Il peut aussi associer directement la désignation en unités à la désignation en chiffres. Cette technique est la plus rapide. Une fois l'écriture chiffrée des deux quantités obtenue il termine par une addition posée. La technique n'a pas été encore travaillée pour ces nombres mais il peut faire une extension de la technique connue pour les nombres inférieurs à mille.
Il peut être aussi possible d'utiliser une technique de calcul en ligne, étendue au cas des nombres supérieurs à mille, en passant éventuellement par des décompositions en EAC.
Enfin l'élève peut effectuer une addition posée pour les nombres à trois chiffres de chaque collection, ce qui permet d'obtenir un nombre à quatre chiffres, même si la conversion de centaines en milliers n'est pas forcément questionnée ici. Ensuite il peut ajouter les milliers des deux collections au nombre de milliers obtenu au quatrième rang de son résultat d'addition.
Il est possible que dans l'extension de toutes ces techniques de calcul les savoirs concernant le lien entre centaine et millier restent transparents pour l'élève.

b) Dénombrer la réunion des deux collections.

L'élève peut alors utiliser un dessin de la collection ou faire des conversions directement à partir des unités de numération.
S'il fait un dessin de la collection, il peut soit faire un comptage oral en unités simples soit réaliser des groupements (en entourant par exemple) à partir de cette collection dessinée. Le passage par un dessin pourrait être plus coûteux que de faire directement les conversions pour les unités pour lesquelles il y a plus de dix unités et d'utiliser ensuite la technique de juxtaposition (qui est la technique visée). Par exemple pour les collections constituées de 2M 8C 1D 3U et 4C 1M 2U, on obtient 3M 12C 1D 5U. La conversion de 12C en 1M 2C permet d'obtenir 4M 2C 1D 5U et donc 4215. Cette dernière technique met en jeu le savoir visé puisqu'elle permet l'articulation des deux principes de numération.
Enfin, il est aussi possible à l'élève de partir des nombres-paris et de chercher à les associer à la collection. Il pourrait alors être amené à n'étudier par exemple que le nombre de millier en ajoutant les centaines et milliers des deux collections, ce qui revient à mettre en œuvre en partie la deuxième stratégie.
Nous allons maintenant nous intéresser aux difficultés et erreurs prévisibles.
Dans le premier type de stratégie des erreurs peuvent intervenir dans le dénombrement d'une des deux collections, comme celles que nous avons citées dans la variante précédente : le nombre obtenu pourrait alors ne pas se trouver dans la liste, ce qui permet d'avoir une rétroaction du milieu. Dans le calcul (addition posée ou en ligne) des erreurs peuvent être liées à la conversion des unités en unités d'ordre supérieur (retenue). Il obtient alors un nombre faisant partie de la liste, il n'y a donc pas de rétroaction du milieu. Pour les erreurs liées au calcul des additions successives, le nombre obtenu ne fera certainement pas partie de la liste donnée, ce qui permet une rétroaction du milieu.

Dans le deuxième type de stratégie, si l'élève effectue un comptage, des erreurs liées à ce comptage peuvent apparaître (énumération, récitation de la suite orale, …). Le milieu apporte des rétroactions car le nombre obtenu a peu de chance de se trouver dans la liste donnée. Par contre si, après obtention de la quantité de 3M 12C 1D 5U il effectue une simple juxtaposition des nombres il obtient le nombre 31215. Il peut aussi prendre en compte le fait que le nombre cherché doit avoir quatre chiffres (effet de contrat) et supprimer alors le 1 des 12 centaines (3215) ou l'ajouter avec le 2 des centaines (3315). Les nombres obtenus sont dans la liste donnée.
Dans le cas où l'élève part des nombres-paris et cherche à les associer à la collection il peut n'ajouter que les nombre de millier de chaque collection sans tenir compte des centaines. Il doit alors choisir entre les nombres ayant un 3 au rang des milliers, ce qui peut l'amener à prendre en compte les nombre de centaines …
Finalement il n'y a donc pas de rétroaction concernant les erreurs liées directement aux conversions, ce qui est cohérent avec le milieu que nous souhaitons constituer pour la phase suivante concernant la validité des techniques. Cela donne à l'enseignant une possibilité de gérer cette phase comme une phase de validation.
L'enjeu des paris est justement de permettre à l'enseignant d'organiser une phase de conclusion ayant un enjeu de validation. C'est la possibilité qu'ont les élèves de changer de pari qui permet d'avoir un enjeu de validation : les élèves doivent donner des arguments pour convaincre les autres de la validité de leur résultat et les amener éventuellement à changer leur pari. Rappelons qu'ils n'ont pas accès à la collection. Ils peuvent formuler les techniques citées ci-dessus en les justifiant par des arguments plus ou moins mathématiques (relations entre unités, nombre de chiffres …). C'est ce que nous allons étudier maintenant.
Pour le premier type de stratégie, l'utilisation de la technique de l'addition posée pourrait apparaître comme un moyen sûr de trouver la réponse (elle prend alors le rôle de critère de validité). Pour le deuxième type de stratégie, c'est la référence aux groupements matériels ou aux relations entre unités qui est en jeu.
Mais dans cette phase de validation l'enseignant peut aussi questionner les erreurs des élèves (qui sont dans le milieu grâce aux nombres-paris erronés). Par exemple pour l'erreur « 31215 », il est possible de rejeter ce nombre par l'argument du nombre de chiffres (contrat) ou bien par le fait que le nombre de milliers s'écrit au quatrième rang (quand il inférieur ou égal à neuf) alors qu'ici il se retrouve au cinquième rang et que dans ce nombre il y a 1 millier isolé. Cela peut permettre de faire émerger la nécessité d'écrire un chiffre par rang et donc de faire des conversions pour les unités pour lesquelles on a plus de dix unités isolées (condition de présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'EC).
D'autres arguments peuvent invalider les autres nombres-paris erronés. En particulier il est possible de comparer le nombre écrit et la réunion de collections. Par exemple pour 3315 on a 3 milliers, 3 centaines … alors que dans la collection réunie il y a 3 milliers 12 centaines … donc ce n'est pas la même quantité. De même pour 3215.
Finalement c'est le travail sur les erreurs et les stratégies de deuxième type qui permet de mettre en jeu les savoirs visés. Pour le premier type de stratégie ces savoirs risquent de rester transparents à la fois lors de la recherche et de la validation.

Apports de la ressource et discussion sur la mise en œuvre par l'enseignant

La ressource propose de commencer par faire dénombrer une unique collection avec les unités de numération pour que les élèves s'approprient cette nouvelle façon de représenter la collection (en traitant des cas variés : unités dans le désordre, absence d'unités isolées à certains rangs).

Pour permettre à l'enseignant de s'approprier le nouveau problème, un exemple est proposé dans la ressource et les variables sont expliquées en lien avec les savoirs visés.
Une difficulté pour la mise en œuvre de cette situation concerne la <u>phase de discussion autour des paris</u>. La ressource propose de faire une phase collective, mais cela pourrait aussi se faire en groupes avant la discussion collective. La possibilité pour les élèves de changer de pari permet de donner un enjeu à la phase de validation. La discussion qui doit permettre de faire émerger les conversions entre unités. Si l'enseignant gère cette phase en évaluant les réponses des élèves, cela enlève tout intérêt aux paris.
Une fois les paris définitifs choisis par les élèves, il est possible de vérifier la réponse avec le matériel pour s'assurer de la validité du nombre obtenu.
Ces trois moments sont précisés dans la ressource : discussion collective sur la validité, changements éventuels de pari et vérification avec matériel.
<u>Pour l'institutionnalisation</u>, les deux principes de la numération sont rappelés dans la ressource. Deux techniques sont indiquées : la réunion des collections avec conversion puis dénombrement de la collection par la technique de juxtaposition (stratégie de dénombrement de la réunion de collection) puis le dénombrement de chaque collection suivi de l'addition posée (stratégie de dénombrement de chaque collection). L'équivalence du point de vue des savoirs en jeu est expliquée (retenue de l'addition/conversion de centaines en milliers).
En particulier les conversions entre unités (le nouveau) sont mises en évidence à travers :

- le groupement qu'il est possible d'effectuer avec la collection ;
- la conversion de 12 centaines en 1 millier et 2 centaines ;
- la retenue dans l'addition posée ;
- et un tableau récapitulatif des différentes relations entre unités (ci-dessous).

			
1 unité	**1 dizaine de bûchettes**	**1 centaine de bûchettes**	**1 millier de bûchettes**
1 unité	**1 dizaine = 10 unités**	**1 centaine = 10 dizaines** **1 centaine = 100 unités**	**1 millier = 10 centaines** **1 millier = 100 dizaines** **1 millier = 1000 unités**

Figure 87 : tableau de synthèse des relations entre unités proposé dans la ressource

Pour l'analyse de la mise en œuvre de cette situation des questions se posent sur le lien entre les savoirs de la numération et les techniques utilisées par les élèves. Nous faisons l'hypothèse que c'est la discussion autour d'erreurs de juxtapositions qui est susceptible de rendre nécessaire le recours à ces savoirs. Si les élèves utilisent la technique de l'addition posée ils peuvent l'étendre naturellement aux nombres supérieurs à mille sans questionner les savoirs en jeu. Le rôle de l'enseignant sera alors de demander de justifier la technique utilisée par les élèves et donc de faire expliciter les conversions.
Nous allons maintenant passer à l'analyse de la mise en œuvre de cette situation dans les classes de chacun des enseignants du groupe de travail.

II. Analyse des mises en œuvre de la situation de dénombrement

II.1 Analyse de la mise en œuvre de la situation de dénombrement de collections dans la classe de Mme A

Variante S_{Dv1} : « Combien de bûchettes ? »

Nous avons observé la mise en œuvre de cette première variante dans cette seule classe. Il s'agit de la première séance observée (et la première de la séquence) dans la classe de Mme A. Elle travaille la même situation avec ses élèves de CE1 et de CE2, en adaptant la taille des nombres à chaque niveau (quantité comprise entre cent et mille pour les CE1 et entre mille et dix-mille pour les CE2).

Description du déroulement de la séance
En annexe III.2.

Les choix de Mme A
Le problème de dénombrer une grande collection en vrac est posé en tout début de séance. Le milieu est constitué de la collection en vrac placée sur une table devant l'enseignante (une collection pour les CE1, une autre pour les CE2). Les élèves proposent de faire des groupements en référence aux activités de dénombrement déjà réalisées (au CP).
Une fois ces premiers groupements réalisés le milieu contient une collection groupée en centaines (plus de dix), dizaines et unités. Le problème de dénombrement est alors à nouveau posé collectivement. Les élèves peuvent alors utiliser un comptage oral en unités simples ou bien finir les groupements. C'est cette dernière méthode qui est choisie sous la conduite de l'enseignante (les élèves avaient, eux, commencé par faire un comptage en unités simples).
Une fois les groupements totalement réalisés (boites de dix sachets), le nombre n'est pas obtenu collectivement : l'enseignante repose le problème de dénombrement de façon individuelle. Nous pouvons penser que ce problème est l'enjeu didactique principal de la séance mais il aurait aussi été possible à l'enseignante de dire ici comment obtenir l'écriture chiffrée. Le milieu contient une collection totalement groupée, constituée de trois boites de mille, quatre sachets de cent, trois paquets de dix et une bûchette seule. Les élèves doivent écrire le nombre en chiffres sur leur ardoise. Le mot « mille » est dans le milieu à la fois à travers le nom du groupement (« boite de mille ») et le comptage oral effectué juste avant (jusqu'à trois-mille-quatre-cent). La recherche du nom du nombre en est facilitée mais il reste à l'écrire en chiffres.
La juxtaposition de « 3 » (de « trois » mille) et du nombre à trois chiffres apporte une bonne réponse ici (l'enseignante ne contrôle pas le nombre d'unités de chaque ordre après groupements : elle donne juste une très grande collection au départ). Des erreurs peuvent être liées à un comptage des différentes unités ou bien à l'écriture en chiffres. Le milieu n'est pas rétroactif : rien ne permet aux élèves de prendre conscience d'une erreur éventuelle.

Tableau synoptique du déroulement de la séance
Cette séance étant longue nous avons choisi de mettre le tableau synoptique en annexe III.2.

Analyse du déroulement
Du côté des élèves.

Après quelques minutes de discussion (grouper par dix, par vingt …) une méthode est proposée par un élève de CE2 pour s'organiser pour le dénombrement : trois élèves font des paquets de dix, trois autres mettent les élastiques, trois autres font les paquets de cent et les trois derniers calculent. Pour le moment les élèves ne cherchent pas à réaliser de boite de mille pour poursuivre les groupements au maximum. D'ailleurs cela n'est pas nécessaire puisqu'il est possible ici d'effectuer un comptage oral en unités. C'est ce que fait un élève dans la phase collective (sans rencontrer de difficultés pour gérer le passage de neuf-cent à mille puis continuer le comptage au-delà de mille), mais avant qu'il ait le temps de finir il est interrompu par l'enseignante qui va les amener à faire des groupements.
Voici les productions des élèves lors de la recherche individuelle du problème de dénombrement de la collection totalement groupée :

- écriture directe de 3431 (5 élèves).
- 3000 + 400 + 30 + 1 (3 élèves) puis 3431.
- 3000 + 400 + 30 + 1 mais erreurs pour écrire le nombre en chiffres (2 élèves) : une élève écrit 3000 400 30 1 et un autre 3000 + 400 + 30 + 1 = 9 + 31 (avec un arbre : 9 en-dessous de 3000 + 400 et 31 en-dessous de 30+1).
- 3331 (directement).
- un élève n'a rien écrit.

Deux erreurs sont liées à une difficulté d'écriture en chiffres. Il semble que ces deux élèves cherchent à associer directement l'écriture en EAC à celle en chiffres. La première élève le fait par juxtaposition des nombres correspond à différentes unités. La deuxième recompose correctement les chiffres des dizaines et unités mais a des difficultés pour gérer les centaines et milliers.

Du côté de l'enseignante

Lors du dénombrement de la collection partiellement groupée obtenue après les groupements jusqu'aux centaines, l'enseignante bloque la technique de comptage en unités simples en interrompant l'élève qui compte, même si cette technique pourrait permettre d'obtenir le nom du nombre (à partir duquel il serait possible de chercher l'écriture en chiffres). Mais ce n'est pas ce qu'elle vise. Elle amène les élèves à se perdre dans ce comptage (« on en est à combien ? Vous ne savez plus ? ») pour montrer l'intérêt de faire des groupements, ce que nous interprétons comme étant lié au fait que le milieu ne permet pas de faire émerger l'intérêt de grouper les centaines par dix. L'intérêt des groupements qui est montré ici implicitement par l'enseignante est celui lié au risque d'erreur dans le comptage[114].
Ensuite, suite à la recherche individuelle des élèves (dénombrement de la collection totalement groupée) l'enseignante fait une institutionnalisation locale du rang correspondant à chaque groupement (donc unités) dans l'écriture en chiffres. Pour cela elle commence par expliquer pourquoi « trois-mille » s'écrit 3000 en appui sur le tableau de numération : « après les centaines il y a les milliers, ce qui explique pourquoi on a quatre chiffres ». Pour dénombrer la collection, elle institutionnalise l'utilisation du tableau de numération :

Milliers	c	d	u
3	4	3	1

[114] Rappelons que la réalisation de groupements successifs permet en effet à la fois de limiter ce risque d'erreur et aussi de pouvoir dénombrer à nouveau facilement la collection pour vérifier.

C'est le seul moment où elle utilise les unités de numération. Cet ostensif sert donc, pour le moment, uniquement à décrire les rangs de l'EC.
Les relations entre les différents groupements, mis en œuvre dans l'action de grouper, sont ensuite l'enjeu d'un exercice en fin de séance. La technique institutionnalisée ne sera entraînée que lors de la séance suivante.

Conclusion
En s'appuyant sur les connaissances des élèves pour le dénombrement de collections en vrac, l'enseignante les amène à constituer des groupements successifs par dix jusqu'aux centaines. Puis, elle les amène à poursuivre les groupements jusqu'aux milliers. Cela lui permet de faire dénombrer par les élèves une collection totalement groupée. Puis elle institutionnalise l'utilisation du tableau de numération et la position des chiffres correspondant aux différents groupements (non exprimés pour le moment en unités de numération). Comme la collection proposée possède un nombre non nul d'unités isolées à chaque ordre, la juxtaposition des nombres permet d'obtenir l'écriture correcte par dénombrement de la quantité inférieure à mille (sachets, paquets et bûchettes isolées) suivi d'une juxtaposition, à gauche, du chiffre des milliers.
Cette situation a permis, comme cela était prévu, de faire faire l'expérience des groupements aux élèves. Il sera alors possible d'y faire référence si besoin dans les situations suivantes, notamment lorsque les conversions seront en jeu.

Variante S_{Dv2} : « Comptes de bûchettes ? »

Les choix de Mme A
Mme A a choisi de faire un rappel de la tâche de dénombrement d'une collection en vrac et de lecture du nombre obtenu. Mais le problème du jour concerne la tâche de dénombrement de collections totalement groupées (par groupements de dix successifs). Quatre collections (voir tableau synoptique) sont à dénombrer successivement avec correction collective après chaque recherche individuelle. En fin de séance cinq autres collections sont à dénombrer, en recherche individuelle sur une feuille d'exercices. Pour ces dernières collections il est aussi demandé d'écrire le nom du nombre en lettres.
Après le rappel de début de séance, Mme A propose une première collection matérielle à dénombrer (1 boite, 2 sachets et 1 bûchette seule). Quand elle décrit les différents groupements, Mme A n'utilise pas les unités de numération mais la description matérielle (boites, sachets …). Après avoir montré la collection aux élèves, elle leur demande d'écrire combien il y a de bûchettes (sur une feuille) « et aussi comment vous faites pour trouver ». Les élèves doivent chercher individuellement. Cette façon de présenter la collection demande aux élèves de mémoriser le nombre d'unités de chaque ordre. Pour cela ils peuvent les écrire au fur et à mesure ou écrire le nombre en chiffres directement, ce qui est rendu possible par le fait que Mme A donne les groupements en commençant par ceux d'ordre le plus grand (les boites d'abord, puis les sachets …). Cela ne change pas les techniques prévues dans l'analyse *a priori*. Mais pour les élèves qui se déplacent et qui doivent se souvenir du nombre avant de retourner à leur place pour l'écrire il pourrait être plus économique de passer par le nom du nombre puis de l'écrire en chiffres.
Mme A choisit de mettre en jeu dès le premier cas le zéro puisqu'il n'y pas de dizaine isolée dans la collection proposée. Cependant cela peut ne pas être une difficulté pour les élèves car ils savent déjà lire un nombre à trois chiffres : ils savent que deux sachets et une bûchette font « deux-cent-un », ce qui s'écrit 201.

Le fait de donner un petit nombre d'unités à chaque ordre ne permettra pas aux élèves de prendre conscience de l'intérêt de la technique de juxtaposition par rapport au comptage par unités simples. De plus, le comptage n'est pas source d'erreur dans ce cas.
Les cas suivants proposés par Mme A se font dans les mêmes conditions (collection matérielle montrée par l'enseignante, les élèves écrivent sur leur feuille, recherche individuelle). Elle joue sur les deux variables didactiques : ordre de présentation des unités, présence/absence d'unités à un certain ordre (voire à plusieurs).
Enfin, dans la fiche d'exercices individuels les collections sont représentées par des photos des différents groupements. Les cas proposés s'appuient sur les deux variables principales de la situation.

Tableau synoptique du déroulement

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases et organisation</th><th>Techniques et éléments technologiques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="16">Dénombrer une collection non groupée.

Nommer un nombre</td><td rowspan="16">Rappel.
Collectif</td><td rowspan="16">Pour dénombrer :
Pour dénombrer une collection il faut faire des groupements par dix puis par cent et mille.
Une bûchette c'est une unité.
Dans un paquet il y a dix bûchettes.
Dans un sachet il y a cent bûchettes, il y a dix paquets.
Dans un millier, il y a mille bûchettes, il y a dix sachets.

Le tableau de numération pour montrer où s'écrivent les unités, les dizaines, les centaines et milliers.

Pour nommer :
Comme le 3 est dans les milliers, on lit « trois mille ». Lien « millier » / « mille », « centaine » / « cent ».</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="16">Dénombrer une collection groupée : 1 boite, 2 sachets et 1 bûchette seule (collection matérielle).</td><td rowspan="2">Présentation de la situation. Collectif</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="6">Recherche.
Individuel</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="8">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="8">Dans une boite il y a mille bûchettes, dans un sachet il y a cent bûchettes, dans un paquet il y a dix bûchettes.
Ecrire les chiffres dans le tableau de numération :<table><tr><td>m</td><td>c</td><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>On met un zéro aux dizaines car il n'y a pas de dizaine.

Autre technique : 1000 + 200 + 1 = 1201.</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
<tr><td>33</td><td rowspan="3">Dénombrer une collection groupée : 2 boites et 6 paquets (collection matérielle).</td><td rowspan="3">Recherche.
Individuel</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>36</td><td rowspan="7"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>37</td></tr>
<tr><td>38</td><td rowspan="5">Conclusion. Collectif</td><td rowspan="5">On écrit les chiffres dans le tableau : les milliers, puis les centaines, …<table><tr><td>m</td><td>c</td><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr></table>On écrit 0 aux centaines car il n’y a pas de centaine. Si on ne met pas le 0 on se retrouve avec 260.</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
<tr><td>41</td></tr>
<tr><td>42</td></tr>
<tr><td>43</td><td rowspan="10">Dénombrer une collection groupée : 5 sachets, 3 bûchettes, 2 paquets, 1 boite (collection matérielle).</td><td rowspan="5">Recherche. Individuel</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>44</td></tr>
<tr><td>45</td></tr>
<tr><td>46</td></tr>
<tr><td>47</td></tr>
<tr><td>48</td><td rowspan="5">Conclusion. Collectif</td><td rowspan="5">1 sachet contient cent bûchettes.
1000 + 500 + 20 +3 = 1523
Et utilisation du tableau de numération :<table><tr><td>m</td><td>c</td><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>49</td></tr>
<tr><td>50</td></tr>
<tr><td>51</td></tr>
<tr><td>52</td></tr>
<tr><td>53</td><td rowspan="10">Dénombrer une collection groupée : 6 bûchettes, 9 paquets de 10, 3 boites (collection matérielle).</td><td rowspan="8">Recherche. Individuel</td><td rowspan="8"></td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>55</td></tr>
<tr><td>56</td></tr>
<tr><td>57</td></tr>
<tr><td>58</td></tr>
<tr><td>59</td></tr>
<tr><td>1h00</td></tr>
<tr><td>1h01</td><td rowspan="2">Conclusion. Collectif</td><td rowspan="2">On écrit zéro aux centaines car il n’y a pas de centaine</td></tr>
<tr><td>1h02</td></tr>
<tr><td>1h03</td><td rowspan="2">Dénombrer une collection groupée.</td><td rowspan="2">Synthèse. Collectif</td><td rowspan="2">Dans une boite il y a mille bûchettes, dans un sachet il y a cent bûchettes … « Le tableau de numération permet de dénombrer une collection « sans se tromper ». Quand il n’y a pas de centaine on écrit un zéro.</td></tr>
<tr><td>1h04</td></tr>
<tr><td>1h05</td><td rowspan="15">Dénombrer une collection groupée et écrire un nombre en lettres (à partir de l’écriture chiffrée ou de la collection) pour les collections :

- 2 sachets, 4 buchettes
- 1 boite, 6 sachets, 3 paquets
- 2 boites, 8 paquets, 2 bûchettes, 2 sachets
- 2 boites 5 bûchettes
- 1 sachet, 4 paquets, 2 boites</td><td rowspan="15">Recherche. Individuel</td><td rowspan="15"></td></tr>
<tr><td>1h06</td></tr>
<tr><td>1h07</td></tr>
<tr><td>1h08</td></tr>
<tr><td>1h09</td></tr>
<tr><td>1h10</td></tr>
<tr><td>1h11</td></tr>
<tr><td>1h12</td></tr>
<tr><td>1h13</td></tr>
<tr><td>1h14</td></tr>
<tr><td>1h15</td></tr>
<tr><td>1h16</td></tr>
<tr><td>1h17</td></tr>
<tr><td>1h18</td></tr>
<tr><td>1h19</td></tr>
</table>

Figure 88 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv2}, classe de Mme A

Analyse du déroulement

Insertion du savoir en jeu dans le milieu dès le début de la séance.

A partir du rappel du problème et des groupements effectués, Mme A montre le lien entre les différents groupements (« paquets de dix », …), leur expression en unités de numération et leur écriture chiffrée grâce à des affiches qui s'appuient sur ce qui était proposé dans la ressource. Elle met des affiches au tableau pour chaque unité. Voici l'affiche pour le millier :

Figure 89 : affiche du millier

Ce qui est mis en avant n'est donc pas le millier mais le mot « boite ». Du coup les relations entre unités ne sont pas citées (il n'est pas dit qu'un millier c'est 10 centaines mais que dans une boite il y a 10 centaines). Mme A montre la technique de juxtaposition en s'appuyant sur un tableau de numération. Ici les unités de numération sont utilisées comme un intermédiaire pour passer de boites, etc. aux rangs de l'écriture en chiffres : 3 boites c'est 3 milliers donc on écrit 3 dans la colonne des milliers du tableau de numération, etc. dans le cas où il y a un nombre non nul d'unités isolées à chaque rang. L'enjeu de la séance consiste à adapter cette technique aux cas où une ou plusieurs unités isolées sont absentes et où la collection est présentée dans le désordre.

Une même organisation pour les différents cas de dénombrement.
Mme A propose toujours la même organisation pour les différentes collections à dénombrer : présentation collective de la collection, recherche individuelle et conclusion collective puis présentation de la collection suivante, etc. Les phases de conclusion sont l'occasion d'institutionnaliser des savoirs qui peuvent donc être réutilisés par les élèves pour le cas suivant.

Introduction de la nécessité du chiffre 0. Utilisation du tableau de numération.
Nous allons étudier plus en détail le travail sur les deux premières collections, mettant en jeu l'absence de dizaines isolées puis de centaines et unités isolées.
Pour la première collection à dénombrer (1 boite, 2 sachets et 1 bûchette seule), le contrat est d'utiliser ce que vient de rappeler Mme A. L'absence de dizaines isolées ne pose pas de difficultés aux élèves. Un seul élève utilise le tableau de numération. Lors de la phase de conclusion, Mme A institutionnalise à nouveau l'utilisation du tableau de numération et demande « pourquoi il faut écrire un zéro ? ». Mais l'écriture de ce zéro n'est pas problématique pour les élèves (un élève explique que ce 0 vient de 200). Cela amène l'enseignante à expliquer alors que le 0 vient de l'absence de dizaine en remettant en scène le tableau de numération par un effet de contrat : « mais finalement qu'est-ce que tu peux utiliser ? » (en montrant le tableau de numération déjà dessiné au tableau).
C'est différent pour la deuxième collection, où deux élèves font des erreurs : 260 et 2660. Mme A fait invalider ces deux réponses erronées (260 et 2660) par la lecture de ces deux nombres. Elle institutionnalise l'utilisation du tableau de numération en expliquant que c'est « quand même pratique ». Le tableau apparaît comme un moyen de ne pas faire d'erreur. La

nécessité d'écrire un zéro pour marquer la position du millier apparait bien ici, sinon on obtient 260.
Cet épisode montre qu'une règle implicite de l'utilisation du tableau de numération par Mme A est d'écrire un chiffre dans chaque colonne pour obtenir l'EC dans le tableau, sinon l'écriture de ce 0 ne serait pas nécessaire dans le tableau. Mais l'EC hors du tableau n'est pas recherchée : l'enseignante questionne toujours l'écriture en chiffres à travers l'écriture dans le tableau de numération.

Du côté des élèves.
Les élèves utilisent lors de la recherche de la première collection les mêmes techniques que lors de la séance précédente, hormis un élève qui utilise un tableau de numération. Ainsi même si l'utilisation du tableau semble être dans le contrat pour ce premier cas, les élèves continuent d'utiliser leur technique, d'autant plus qu'elle s'applique ici sans trop de difficulté.
C'est seulement pour la deuxième collection (absence de centaines et d'unités isolées) qu'une erreur de juxtaposition va émerger : un élève dit « deux-mille-soixante » et écrit « 260 ». La discussion qui suit permet de faire émerger la technique utilisée par les élèves utilisant les EAC : « tu as mille, tu mets les deux cents sur les zéros et le zéro qui reste enfin le dernier zéro qui reste tu mets le 1 ». Cette technique est correcte mais laisse invisible le rôle du zéro dans l'écriture en chiffres. Les élèves qui l'utilisent ne font pas d'erreur d'oubli du zéro.
Par contre, à partir de ce moment, davantage d'élèves vont utiliser le tableau de numération. Il semblerait que ce soient des élèves qui avaient fait des erreurs (mais nos notes ne sont pas assez précises pour pouvoir l'affirmer). Finalement peut-être que ces élèves sont plus sensibles à l'institutionnalisation proposée par l'enseignante qui leur donne un moyen « de ne pas se tromper ».
Pour les derniers cas, deux des élèves qui utilisaient les EAC (sans faire d'erreur) continuent de le faire (un fait toujours son « arbre de calcul »). Un des deux élèves qui dessinaient au début continue de dessiner la collection, en dessinant dans chaque groupement les dix groupements d'ordre immédiatement inférieur. Cela est sans doute lié au fait que Mme A laisse des temps de recherche longs (pendant lesquels elle va travailler avec les CE1). Comme les élèves ont le temps, cela ne les incite pas à chercher une procédure plus économique : ils préfèrent utiliser une procédure qui fonctionne et qu'ils maîtrisent. De plus le contrat c'est aussi d'expliquer sa réponse, ce qui est une habitude dans cette classe. Or l'utilisation des EAC permet d'avoir une ligne de « calcul » justifiant l'écriture en chiffres. Le dessin fournit aussi une explication à la réponse donnée. Pour ceux qui écrivent directement la réponse, l'explication est orale et pourrait être donc longue à écrire (en texte).

L'institutionnalisation des savoirs.
En plus des institutionnalisations locales faites après chaque recherche individuelle, Mme A fait une synthèse finale, en demandant aux élèves ce qu'ils ont appris. Elle institutionnalise l'utilisation du tableau de numération même si six élèves sur dix n'utilisent toujours pas le tableau à la fin de la séance lors des recherches individuelles.
Voici les savoirs institutionnalisés au cours de cette séance. Il y a tout d'abord les deux principes de la numération rappelés dès le début. Les connaissances sont contextualisées au matériel des bûchettes : une bûchette c'est une unité, dans un paquet il y a dix bûchettes, dans un sachet il y a cent bûchettes, il y a dix paquets, dans un millier, il y a mille bûchettes,

il y a dix sachets. Les unités de numération sont utilisées pour parler du rang des chiffes dans le tableau de numération.
Le savoir nouveau institutionnalisé dans cette séance est l'écriture d'un zéro quand il n'y a pas d'unité isolée à un certain ordre.
La technique d'utilisation des EAC n'est pas institutionnalisée par l'enseignante. On peut penser que cela est lié au fait que cette technique ne fait pas apparaître le 0 comme marquant l'absence d'unité, ce qui est le projet de Mme A pour cette séance. Ce projet est sans doute influencé par le contenu de la ressource, où cette technique n'apparaît pas.

Conclusion
L'enjeu de la séance de Mme A concerne l'utilisation de la technique de juxtaposition avec écriture d'un 0 aux rangs pour lesquels il n'y a pas d'unités isolées. L'enseignante montre dès le début de séance qu'elle attend l'utilisation du tableau de numération. Pourtant, à la fin de la séance, seuls quatre élèves sur dix l'utilisent.
Nous avons pu voir que l'utilisation du tableau n'apparait pas comme une nécessité puisque la technique d'utilisation des EAC ou celle du comptage oral en unités simples (avec un éventuel dessin de la collection) permettent aussi d'obtenir la réponse. Les élèves ont un temps long de recherche, ce qui ne les pousse pas à chercher une technique économique.
Il semblerait que ce soient les élèves qui font une erreur à un moment donné qui passent ensuite à l'utilisation du tableau. Pour les autres, même si Mme A dit que cela permet de ne pas faire d'erreur, ils ne voient peut-être pas l'intérêt d'en changer. Pour les élèves utilisant les EAC, des questions se posent alors sur leur compréhension du rôle du chiffre 0. La formulation de sa technique par un élève au cours de la séance montre qu'il n'est pas nécessaire de comprendre le 0 comme marquant l'absence d'unités isolées dans une décomposition en EAC (avec cet ostensif l'explication concerne plus le nombre de chiffres que la position des unités).

Variante S_{Dv3} : « Jeu des paris »

Cette séance a lieu environ quinze jours après la séance étudiée ci-dessus car Mme A a été malade entre temps. Juste avant cette séance elle a proposé des exercices d'entraînement de dénombrement de collections groupées (S_{Dv2}) sur ardoise.

Les choix de Mme A
Mme A a choisi de travailler les tâches suivantes : dénombrer une collection totalement groupée et dénombrer une réunion de collections.
Le travail sur la première tâche permet un rappel des savoirs construits dans les séances précédentes. Les deux principes de la numération sont rappelés en début de séance. Contrairement à ce qui était proposé dans la ressource, Mme A ne se sert pas de ce premier problème pour changer de désignation des groupements : elle continue d'utiliser les mots « boites », etc. au lieu d'utiliser les unités de numération. Mais elle ne décrira pas non plus les quantités de chaque collection en unités de numération pour la réunion des collections. Cet enjeu d'utilisation des unités de numération n'est pas perçu par l'enseignante.
C'est le dénombrement d'une réunion des collections qui constitue le vrai problème de la séance. L'enjeu est de faire fonctionner les savoirs de la numération (qui ont été rappelés) dans le cas du dénombrement de deux collections. Mme A montre toujours la collection matérielle aux élèves, sans en donner de désignation écrite. Elle utilise encore une

désignation des groupements avec les mots « boites », etc. Les unités sont données dans l'ordre décroissant de leur valeur pour le premier cas seulement.
Pour les deux premières réunions de collections Mme A choisit de mettre en jeu la relation entre centaines et milliers (après réunion des deux collections il y a plus de dix centaines). Pour la troisième réunion de collections, elle propose une réunion de trois collections qui met en jeu toutes les relations entre unités d'ordres consécutifs (unités/dizaines, dizaines/centaines et centaines/milliers).

<u>Description du déroulement</u>
En annexe III.2.

<u>Tableau synoptique du déroulement</u>

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phase, organisation</th><th>Techniques et <u>éléments technologiques</u></th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Rappel.
Collectif</td><td rowspan="4"><u>Dans un sachet il y a cent bûchettes, ou dix paquets de dix, dans une boite il y a dix sachets de cent bûchettes, ou encore mille bûchettes, ou cent paquets de dix.</u> Affiches au tableau : <u>1 millier = 1 boite (photo), etc.</u></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="5">Dénombrer une collection : 4 sachets, 3 paquets de dix, 2 boites et 1 bûchette (montré avec matériel et dit oralement)</td><td rowspan="2">Rech. Individuel (ardoise)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="3">« avec le tableau on met les milliers, puis les centaines, les dizaines et les unités ». <u>Les boites correspondent aux milliers, les sachets aux centaines …</u> Tableau de numération[115].</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="4">Dénombrer une collection : 7 paquets de dix, 5 bûchettes seules et 1 boite</td><td>Rech. Ind. (ard)</td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="3">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="3">Technique tableau de numération à nouveau : les paquets de dix on les met dans les dizaines, …
<u>Comme il n'y a pas de centaine on met un zéro dans les centaines, sinon ça ferait 175.</u></td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="19">Dénombrer une réunion de collections : 1 boite, 7 sachets, 2 paquets de dix, 4 bûchettes seules (Mme A montre au fur et à mesure le matériel) et 1 boite, 8 sachets et 1 dizaine (montre à nouveau).
Paris (nombres possibles) : 21 534, 2 534, 3 534, 2 634.</td><td rowspan="6">Présentation du problème.
Collectif</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="3">Rech.
Individuel</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="10">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="10">Technique « pour vérifier » : poser une addition avec le tableau de numération.<table><tr><td>m</td><td>c</td><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>+ 1</td><td>8</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>Deuxième technique : faire les groupements avec le matériel. <u>Dans une boite il y a dix sachets</u>, donc avec 15 sachets on fait 1 boite et il reste 5 sachets. En tout il reste donc 3 boites, 5 sachets, 3 paquets et 4 bûchettes soit 3534 bûchettes.</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
</table>

[115] Voici l'écriture dans le tableau de numération :

m	c	d	u
2	4	3	1

<table>
<tr><td>33
34
35</td><td rowspan="3">Dénombrer une réunion de collections : 8 sachets, 2 boites, 1 paquet de dix, 3 bûchettes et 4 sachets, 1 millier et 2 bûchettes.
Les paris : 3215, 31215, 3315, 4215</td><td>Présentation.
Collectif</td><td></td></tr>
<tr><td>36
37
38
39</td><td>Recherche.
Individuel</td><td></td></tr>
<tr><td>40
41
42
43
44
45
46</td><td>Conclusion.
Collectif</td><td>Les deux techniques précédentes. D'abord groupement du matériel : <u>avec dix sachets on peut faire une boite</u> donc 12 sachets c'est 1 boite et 2 sachets, etc. Puis addition posée :
m c d u
1
2 8 1 3
+1 4 0 2
4 2 1 5
<u>La retenue c'est la boite en plus</u>.</td></tr>
<tr><td>47
48
49
50</td><td rowspan="3">Dénombrer une réunion de collections : 1 boite de mille, 3 sachets, 2 paquets de dix, 5 bûchettes seules et 8 sachets, 4 paquets de dix, 9 bûchettes seules et 1 boite, 2 sachets, 5 paquets de dix.
Les paris : 2131114, 21324, 3424, 2424, 3314.</td><td>Présentation.
Collectif</td><td></td></tr>
<tr><td>51
52
53</td><td>Recherche.
Individuel</td><td></td></tr>
<tr><td>54
55
56
57
58
59
1h00
1h01
1h02
1h03
1h04
1h05
1h06</td><td>Conclusion.
Collectif</td><td>Les deux techniques précédentes. D'abord groupement du matériel : <u>avec dix sachets on peut faire une boite</u> donc 13 sachets c'est 1 boite et 2 sachets. <u>Avec dix paquets de dix on peut faire un sachet</u>, donc 11 paquets de dix c'est 1 sachet et 1 paquet de dix, etc. Finalement on obtient 3 boites, 4 sachets, 2 paquets de dix et 4 bûchettes seules, soit 3424 bûchettes.
Addition posée :
m c d u
1 1 1
1 3 2 5
+ 8 4 9
+ 1 2 5 0
3 4 2 4
<u>La retenue aux centaines, c'est parce que 10 paquets de 10 ça fait un sachet, etc</u>.</td></tr>
</table>

Figure 90 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv3}, classe de Mme A

<u>Analyse du déroulement</u>

Du côté des élèves.

Concernant le dénombrement de réunions de collections, nous avons observé les techniques utilisées par certains élèves pour le premier et le dernier cas. Contrairement à la séance précédente, dans cette séance tous les élèves vont utiliser le tableau. Comme il y a en effet les deux collections à noter (et que l'enseignante donne un temps plus court de recherche), faire un tableau à l'avance permet aux élèves d'écrire les unités dans le tableau quand l'enseignante montre la collection au fur et à mesure. Une élève explique cela lors de la phase collective du deuxième cas : « en fait quand tu l'as dit on a marqué les chiffres dans le tableau ». Du coup la technique de l'addition posée (dans le tableau) permet d'obtenir rapidement le résultat.

Pour la première réunion de collections, nous avons observé les productions de six élèves (sur neuf). Trois élèves font une addition posée dans un tableau de numération (avec deux

erreurs : un oublie la retenue et obtient 2534 et l'autre fait une erreur dans le dénombrement de chaque collection), deux autres écrivent directement la réponse (dont un fait une simple juxtaposition des nombres : 21534) et le dernier essaie de faire des calculs à partir d'une écriture en EAC : 1000 + 700 + 10 + 4 + 1000 + 10 + 800. Nous ne savons pas s'il a été au bout.
Pour le cas suivant le même type d'erreurs apparaît (3215, 4215 et 31215). Nous n'avons pas observé les techniques utilisées par les élèves. Mais les échanges lors de la phase collective qui suit nous font penser que la plupart utilisent le tableau de numération et posent une addition dans ce tableau. Les erreurs sont liées à ce dernier calcul (prise en compte de la retenue).
Pour le dernier cas nous avons pu observer que tous les élèves utilisent le tableau de numération et la plupart (peut-être tous) utilisent la technique de l'addition posée, même si certains continuent de faire des erreurs.

Gestion des phases collectives de conclusion par l'enseignante. Prise en compte de l'enjeu de validation.
Pour la première réunion de collections, l'enseignante recueille les paris (21534, 3534 et 2534) mais les élèves qui ont fait des erreurs ne sont pas interrogés sur leur technique pour leur confrontation. L'enseignante demande dès le début de la phase de conclusion comment on pourrait vérifier. Un élève propose l'addition posée et dicte ses calculs, ce qui permet d'obtenir 3534. Mme A demande aux élèves pourquoi il y a une retenue. Une élève répond que cela vient du fait que l'« on ne peut pas mettre deux chiffres dans la même case ». Cette justification ne convient pas à l'enseignante qui réintroduit le matériel pour montrer les 15 sachets obtenus après réunion des collections puis le groupement de dix sachets dans une boite en expliquant qu'avec quinze sachets on peut faire une boite de mille. Cette vérification amène l'élève qui avait trouvé 21534 à changer de pari. Mais la raison (difficulté de lecture) pour laquelle on ne peut pas écrire « deux chiffres dans la même case » n'est pas abordée.

Mme A engage ensuite une deuxième vérification par la réalisation des groupements. Elle institutionnalise les deux techniques utilisées et explique l'erreur 21534 par l'oubli de créer une boite de mille avec 15 sachets.
Pour les deux derniers cas, le déroulement de la phase de conclusion est assez similaire à celui du premier cas dans le sens où Mme A demande les paris puis effectue une vérification. Mais Mme A amène d'abord les élèves à vérifier en réalisant les groupements avant de poser l'addition (c'est elle qui impose le mode de validation). Cela lui permet, lors de la réalisation de l'addition posée, de justifier la retenue en lien avec les groupements réalisés. Cette justification est toujours prise en charge par l'enseignante au cours de la séance. Par exemple lors de la conclusion de la deuxième réunion de collections, Mme A est à nouveau amenée à prendre en charge la justification de la retenue comme en témoigne cet extrait de transcription de la séance :

> E : En les ajoutant, qu'est-ce qui se passe ici ? Ça fait une centaine.
>
> Une e : ça fait douze.
>
> E : on retrouve nos douze sachets, sauf que qu'est-ce qui se passe ?
>
> Des e : on met une retenue !

E : eh bien voilà pourquoi on met la retenue parce qu'on va garder que nos deux sachets pour les centaines et qu'ici avec nos dix ça va nous faire une boite de mille en fait. Donc quatre-mille-deux-cent-quinze.

Un e : maîtresse j'ai oublié la retenue, c'est pour ça …

E : D'accord ? Donc vous voyez bien pourquoi la retenue elle est importante. On comprend bien maintenant la retenue. La retenue c'est notre petite boite de mille en plus.

Mme A ne s'appuie pas sur les erreurs réalisées par certains élèves (oubli de la retenue) pour laisser davantage de responsabilité aux élèves dans cette discussion sur la retenue. Il est possible que, même si elle avait essayé d'engager les élèves dans une discussion collective sur la validité des différentes propositions à ce moment-là, le fait que la retenue soit déjà connue pour les nombres inférieurs à mille aurait peut-être amené les élèves à ne discuter qu'autour de la réalisation de cette retenue sans en expliquer les raisons.

Institutionnalisation des savoirs.

Dès le rappel de début de séance à partir du problème de dénombrement d'une collection groupée, Mme A institutionnalise les savoirs en jeu dans le problème qui va être posé ensuite : les relations entre unités en appui sur ses affiches, puis le principe de position en appui sur le tableau de numération.

Voici les deux techniques institutionnalisées au cours de la séance pour dénombrer une réunion de collection.

- Les groupements successifs par dix, en commençant par les unités de plus haut rang : si on a plus de dix sachets on les groupe en une boite, etc. Pourtant, pour le dernier cas où des groupements sont à faire pour les sachets, paquets de dix et bûchettes il aurait été plus économique de les faire en commençant par les unités de plus bas rang (évite de rayer ou d'effacer). Les groupements sont justifiés en lien avec le matériel et l'activité de groupements successifs réalisés dans la première séance. La formulation de cette technique reste contextualisée au matériel des bûchettes. Les unités de numération ne sont pas utilisées.
- L'addition posée (dans le tableau de numération), avec retenue éventuelle aux rangs pour lesquels on a plus de dix unités. L'alignement des chiffres est pris en charge par le tableau de numération et la retenue est justifiée par les groupements effectués dans la technique précédente. La formulation de la justification de la retenue est faite en utilisant les noms des groupements réalisés avec le matériel (sachets, paquets …) mais ceux-ci ne sont pas exprimés avec les unités de numération. Ces dernières sont utilisées pour nommer les rangs dans le tableau de numération. Ainsi les conversions entre unités restent pour le moment attachées au contexte des bûchettes.

L'erreur de juxtaposition de chiffres sans prise en compte de la position des unités correspondantes apparaît. Pourtant, contrairement à ce qui s'était passé avec les enseignants de la pré-expérimentation concernant la situation de dénombrement de collections partiellement groupées, cela n'amène pas Mme A à institutionnaliser le fait que pour utiliser le principe de position il faut un nombre d'unités compris entre 0 et 9. Tout comme cela s'est passé lors de la pré-expérimentation, la raison pour laquelle il faut un seul chiffre par rang n'apparaît pas dans la classe.

Conclusion

Le choix de Mme A de montrer les collections matérielles au fur et à mesure sans donner une désignation écrite des quantités correspondant à chaque groupement, ainsi que le fait d'aller jusqu'à une réunion de trois collections, rendent efficace la technique consistant à écrire dans un tableau de numération le nombre d'unités de chaque ordre au fur et à mesure que l'enseignant les montre puis à faire une addition posée dans le tableau de numération.

La technique de réalisation des groupements à chaque ordre pour obtenir une collection totalement groupée apparaît plus coûteuse et ne semble finalement pas utilisée par les élèves lors des phases de recherche. Pourtant Mme A la fait utiliser lors des phases collectives pour vérifier les réponses avant de faire l'addition posée (sauf pour le premier cas où elle le fait après) cela lui permettant de justifier la retenue de l'addition posée. Mais cette justification reste sous sa responsabilité. Les conversions pourraient peut-être apparaître si les collections étaient décrites en EUN. Il faudrait pour cela une écriture abrégée avec un « M » pour « millier », etc. comme par exemple 2M 3C 4D 5U.

Finalement, cette séance n'a pas permis aux élèves de faire des conversions entre unités, elle a permis de renforcer l'utilisation de la technique de juxtaposition avec tableau de numération. Les élèves ont aussi appris à utiliser la technique de l'addition posée avec des nombres à quatre chiffres, en comprenant éventuellement pourquoi on met une retenue quand on obtient un nombre supérieur à dix à un certain rang.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme A (première partie de sa séquence)

Activités proposée : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
<u>Variante S_{Dv1} « Combien de bûchettes ? »</u> Fiche écrite à compléter par les élèves à la fin de la séance sur le nombre de sachets dans une boite, etc. (S1)	Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*	Groupements successifs par dix. Utilisation du tableau de numération quand la collection est groupée.
<u>Variante S_{Dv2} « Compte de bûchettes »</u> (S2)	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*	Groupements successifs par dix et utilisation du tableau de numération (rappels). Écriture d'un 0 en cas d'absence d'une unité isolée à un certain rang.
Exercices de dénombrement de collections représentées (déjà groupées) et écrire le nombre en lettres.	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.* Traduction oral/écrit.	*Non observé.*
Exercice de constitution d'une collection à partir du nombre écrit en chiffres.	Construire une collection. *Bûchettes.*	*Non observé.*
		Trace écrite : dénombrer une collection, les deux aspects de la numération, écrire les nombres en lettres, rôle du zéro.
<u>Variante S_{Dv3} « Le jeu des paris » (S3)</u>	Dénombrer une collection groupée (rappel). Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*	Groupements successifs par dix et utilisation du tableau de numération (rappels). Réaliser des groupements pour les unités ayant plus de dix unités puis écrire le nombre en chiffres. Écrire les nombres dans un tableau de

		numération et faire l'addition posée. La retenue vient des groupements réalisés.
Exercices d'entraînement au jeu des paris (créer des paris et résoudre ceux du voisin).	Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*	*Non observé.*

Tableau : première partie de la séquence de l'enseignante A

Une trace écrite est faite (dans le cahier des élèves) avant le jeu des paris sur le dénombrement d'une collection, l'écriture des nombres en lettres, le rôle du zéro. Elle reprend ce qui est proposé dans les *éléments de synthèse* de la ressource.

Bilan sur la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme A

Les choix variés des valeurs des deux variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « présence/absence d'unités isolées » permettent à Mme A d'obtenir que ses élèves apprennent à dénombrer des collections groupées. Le véritable problème est posé lors de la deuxième séance quand il n'y a pas de centaine isolée. Le tableau de numération est alors dans le milieu. La simple juxtaposition des nombres (sans prise en compte de la position des unités correspondantes) apparaît quand même et permet de faire émerger la nécessité du chiffre 0 (sinon dans la lecture du nombre obtenu on n'entend pas de « mille »). L'exercice inverse de constitution d'une collection à partir de son écriture chiffrée, proposé avant de traiter la variante du jeu des paris, permet de renforcer l'utilisation de ce savoir.
L'utilisation de la variable « ordre des unités » n'entraîne pas d'erreurs de la part des élèves (les erreurs semblent davantage liées à des confusions entre groupements). Du coup la position des différentes unités dans l'écriture n'apparaît pas aussi nettement que le rôle du zéro : il est évoqué en lien avec le positionnement des différents groupements dans le tableau de numération.
Même si la technique de juxtaposition (institutionnalisée avec le tableau de numération) est montrée très rapidement par Mme A (première séance) tous les élèves ne l'utilisent pas à la fin de la deuxième séance. Ceux-ci préfèrent utiliser les EAC ou le comptage en unités simples puis l'écriture en chiffres. C'est finalement la variante S_{Dv3} (jeu des paris) qui les amène tous à utiliser un tableau de numération.
Le milieu construit par Mme A dans ces séances ne permet pas de rendre la technique visée (technique de juxtaposition) plus économique que les autres. En effet, elle laisse un temps long pour la recherche des élèves et laisse l'accès à la collection matérielle pendant la recherche. Du coup, dans la deuxième séance de plus en plus d'élèves se déplacent pour aller compter la collection. Dans la variante du jeu des paris, elle ne laisse plus cette possibilité de se déplacer et laisse des temps courts de recherche. Les élèves doivent donc trouver un moyen d'écrire une désignation de la quantité de chaque collection qui soit assez rapide. Le tableau apparaît alors comme un outil pertinent.
La variante des paris n'a pas rempli son rôle principal qui était de questionner puis d'étendre la portée de la technique de juxtaposition au cas où on a plus de dix unités à certains ordres. Les élèves ont, en effet, été amenés à utiliser plutôt la technique de l'addition posée avec retenue qui s'avérait plus économique. Ils n'ont donc pas mis en œuvre par eux-mêmes de conversions entre unités pour le dénombrement des collections. Les groupements de matériel sont toujours évoqués ou effectués sous la responsabilité de l'enseignante. Cela lui permet de justifier la retenue de l'addition. Les exercices qu'elle propose suite à la séance de

dénombrement de réunions de collections sont une reprise de ce problème. On peut penser que les élèves seront renforcés dans leur utilisation de l'addition posée.
Nous verrons si la situation de commande permettra de donner une responsabilité aux élèves dans les conversions entre unités.
Dans cette première partie de sa séquence, Mme A reste sur le type de tâches de dénombrement (hormis l'exercice inverse de constitution d'une collection). D'autres problèmes, comme la comparaison de collections ou les recompositions (traduction d'une EUN en EC) par exemple, ne sont pas proposés pour utiliser les techniques et les savoirs construits dans ces séances. Toutes les activités proposées par Mme A le sont dans le contexte des bûchettes. Des questions se posent concernant la décontextualisation des connaissances des élèves. Les élèves peuvent-ils alors dégager ce qui est général dans ce contexte et pourra être utilisé dans un autre ? C'est la confrontation de différents contextes qui pourrait permettre de faire émerger par l'enseignant ce qui relève du contexte et ce qui est plus général et donc à retenir.

II.2 Analyse de la mise en œuvre de la situation de dénombrement de collections dans la classe de Mme F

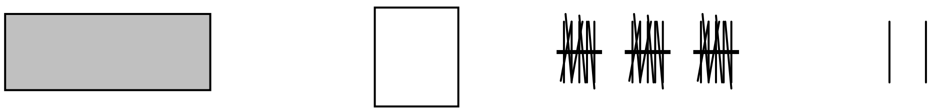
La première séance de dénombrement de la collection en vrac n'a pas été observée. Les élèves ont dénombré une collection de bûchettes en réalisant des groupements successifs par dix et l'enseignante a réalisé une affiche où elle a décrit les différents groupements obtenus.
On notera que Mme F avait déjà un peu travaillé les nombres à quatre chiffres dans son manuel avant la séquence (lecture/écriture, décomposition canonique).

Variante S_{Dv2} : « Comptes de bûchettes »

Mme F travaille avec les CE2 (6 élèves) dans une salle à côté de la salle de classe et dédiée habituellement aux arts plastiques. Elle laisse les élèves de CM1/CM2 en autonomie. Ce n'est pas tout à fait son fonctionnement habituel, même si cela lui arrive de temps à autre.

<u>Déroulement de la séance</u>
On trouvera la description du déroulement de la séance en annexe III.2.

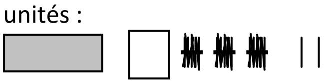
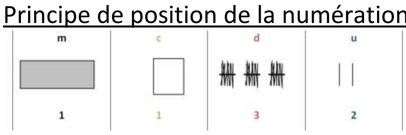
<u>Analyse des choix de Mme F</u>
Mme F propose tout d'abord un travail sur la tâche consistant à poursuivre une suite orale de dix en dix, cent en cent, mille en mille à partir d'un nombre donné par l'enseignante (« jeu du furet »). Elle poursuit avec un rappel de la tâche de dénombrement d'une collection non groupée (séance précédente). Ensuite elle propose successivement des tâches de dénombrement d'une collection totalement groupée et de lecture (ou écriture en lettres) du nombre d'éléments d'une collection.
Mme F dessine les collections à dénombrer au tableau. Voici par exemple le premier cas :



Pour les trois premières collections les groupements sont données dans l'ordre décroissant de leur valeur, c'est-à-dire de manière congruente avec l'écriture en chiffres. Ce ne sera plus le cas pour la dernière collection. Mme F joue également sur la variable didactique qui concerne la présence/absence d'unités à certains ordres : la deuxième collection ne compte pas de dizaine isolée et la troisième pas de centaine isolée.

Pour la première collection, les élèves n'ont pas de support (ni d'ardoise ni de cahier) pour écrire un nombre en chiffres. Ils doivent donc produire le nom du nombre (se le dire « dans sa tête »). Pour les suivantes Mme F demande aux élèves d'écrire la réponse sur leur cahier de brouillon.
Les deux premiers cas peuvent se traiter par une simple juxtaposition de chiffres sans prise en compte de la position des unités correspondantes, en appui sur les connaissances pour les nombres inférieurs à mille. En effet, pour le premier il suffit de juxtaposer les chiffres 1, 1, 3, 2 et pour le deuxième, l'élève peut traduire « deux-cent-trois » en 203 en utilisant ses connaissances anciennes et donc juxtaposer le 1 de la boite de mille. Mais pour le deuxième cas l'élève peut aussi chercher à appliquer une simple juxtaposition sans tenir compte du « 203 », ce qui peut l'amener à écrire 123. La lecture de ce nombre peut permettre un contrôle de sa réponse, si l'élève mobilise ses connaissances sur les nombres inférieurs à mille puisque l'on n'entend pas « mille » dans « cent-vingt-trois » alors que la collection contient une « boite de mille ». Cela est aussi vrai pour le troisième cas où l'absence de centaines permet de mettre en jeu le rang du millier par la nécessité d'écrire un zéro. Ce sont donc ces deux cas qui constituent l'enjeu de la séance puisqu'ils sont susceptibles de permettre aux élèves de se questionner sur la position des chiffres. Cet enjeu est amené de manière progressive par un jeu sur les variables didactiques : d'abord les unités dans l'ordre conventionnel, puis introduction du zéro au rang des dizaines et enfin au rang des centaines. Pour le dernier cas les unités sont données dans un ordre non conventionnel mais sans zéro. Mme F choisit donc de jouer également sur la variable didactique « ordre de présentation des unités ». Cela doit permettre de s'assurer que les élèves tiennent compte du rang de chaque unité. On notera que Mme F choisit de ne pas jouer sur les deux variables à la fois : les unités dans un ordre non conventionnel et l'absence d'unité isolée à un certain rang.

<u>Tableau synoptique du déroulement de la séance</u>

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases et organisation</th><th>Techniques et <u>éléments technologiques</u></th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">Poursuivre une suite orale de dix en dix, cent en cent, mille en mille. (Jeu du furet)</td><td rowspan="5">Échauffement en « calcul mental », collectif.</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="2">Dénombrer une collection non groupée (collection de la séance précédente)</td><td rowspan="2">Phase de rappel, collectif.</td><td rowspan="2">Pour dénombrer une collection il faut faire des groupements successifs par dix. Dans un paquet il y a dix bûchettes, dans un sachet cent bûchettes et dans une boite mille bûchettes.</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="6">Dénombrer une collection groupée : 1 millier, 1 centaine, 3 dizaines, 2 unités :

La collection est dessinée.
Écrire en lettres 1132.</td><td rowspan="6">Présentation, recherche et correction, collectif.</td><td rowspan="6">1 millier, 1 centaine, 3 dizaines, 2 unités ça fait 1132.
<u>Principe de position de la numération :</u>
</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="4">Dénombrer une collection groupée : 1 millier, 2 centaines, 3 unités (collection dessinée)

Écrire en lettres : 1 millier, 2</td><td>Présentation, collectif.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="2">Recherche, individuel.</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Conclusion, collectif.</td><td>Dans un sachet il y a 100 bûchettes, dans</td></tr>
</table>

18 19 20 21 22 23 24 25 26 27	centaines, 3 unités (collection dessinée) et 1203.		un paquet il y a 10 bûchettes. On écrit les chiffres correspondant à chaque unité mais ici <u>comme il n'y a pas de dizaine on écrit un zéro</u>. Pour écrire en lettres : On n'a pas le droit d'écrire « un mille » : on écrit « mille deux cent trois ».
28 29	Dénombrer une collection groupée : 2 milliers, 3 dizaines, 4 unités (collection dessinée) Écrire en lettres : 2 milliers, 3 dizaines, 4 unités (collection dessinée)	Recherche, individuel.	
30 31 32 33 34 35		Conclusion, collectif.	<u>Quand il n'y a pas de centaine on écrit un zéro au rang des centaines</u>. <u>Un sachet c'est une centaine. Dans une centaine il y a cent bûchettes</u>.
36 37 38 39 40 41 42 43 44	Dénombrer une collection groupée : 4 dizaines, 4 milliers, 2 unités, 3 centaines (collection dessinée) Écrire en lettres : 4 dizaines, 4 milliers, 2 unités, 3 centaines (collection dessinée) et 4342	Recherche, individuel (avec aide de l'enseignante pour une élève)	
45 46 47 48	Dénombrer une collection groupée.	Synthèse, collectif.	<u>Quand les unités sont dans le désordre il faut les réécrire dans l'ordre.</u> <u>Quand il n'y a pas une unité on écrit un zéro :</u> m | c | d | u | | 0 |

Figure 91 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv2}, classe de Mme F

<u>Analyse du déroulement</u>

Du côté des élèves : les techniques et erreurs.

Pour la première collection nous ne savons pas vraiment ce qu'ont produit les élèves (qui de toute façon n'avaient pas de quoi écrire le nombre) car Mme F ne leur donne pas la possibilité de formuler des techniques (seulement des bribes). Elle ne laisse pas s'exprimer les erreurs éventuelles non plus. Pour les deux cas qui suivent, nous avons observé une élève Anastasia qui faisait des erreurs.

Pour la deuxième collection, Anastasia produit les écritures 1113 puis 1223 puis 12 3. Nous interprétons les erreurs d'Anastasia comme des tentatives inappropriées d'apprentissage de la méthode institutionnalisée par l'enseignante (cf. plus loin). L'élève sait qu'il faut écrire un nombre à quatre chiffres (contrat ou prise en compte du millier ?) et elle essaie d'écrire un chiffre en-dessous de chaque groupement. Anastasia lit ce nombre 12 3 comme étant « cent-vingt-trois » puis « mille-deux-cent-vingt-trois ». La lecture ne permet donc pas une invalidation de cette réponse.

Nous verrons que c'est grâce à la confrontation aux différents cas (absence de dizaine, absence de centaine puis unités dans le « désordre ») que la technique d'Anastasia va évoluer au cours de la séance.
Pour la troisième collection, la seule erreur est faite par Anastasia qui a trouvé 2304 : elle met un zéro au même rang que pour le cas précédent (effet de contrat). Elle ne fait pas le lien entre les unités et le rang dans l'écriture chiffrée, mais prend en compte l'absence d'une unité par l'écriture d'un 0. Le fait qu'elle obtienne un nombre à quatre chiffres ne permet pas d'invalider cette réponse par lecture du nombre.
Pour la quatrième collection, Anastasia a écrit 4423 mais se rattrape (toute seule) et écrit ensuite 4342. Il est difficile de savoir ce qui lui a permis de corriger d'elle-même son résultat. Cette observation ne suffit donc pas pour affirmer qu'il y a vraiment eu un apprentissage pour cette élève. Nous complèterons avec nos observations de la séance suivante.

Une même organisation pour les différents cas de dénombrement.
Mme F propose toujours la même organisation pour les différentes collections à dénombrer : présentation collective de la collection, recherche individuelle et conclusion collective puis présentation de la collection suivante, etc. Des moments d'institutionnalisation sont organisés dans les phases de conclusion. Le contrat pour le dénombrement de la collection suivante est alors d'utiliser la technique institutionnalisée par l'enseignante. Cette manière de faire relève de l'ostension : Mme F montre ce qu'elle veut que les élèves utilisent par la suite.

Introduction du savoir en jeu dès les premiers cas.
Pour la première collection à dénombrer, Mme F ne laisse pas vraiment les élèves formuler leur technique ou leurs erreurs : à partir d'un début de formulation proposé par un élève (« moi j'ai fait un millier plus une centaine » …) elle institutionnalise la technique d'utilisation du tableau de numération en s'appuyant sur ce qu'elle a écrit au tableau : le dessin de la collection avec les nombres d'unités de chaque ordre juste en dessous, avec des couleurs différentes pour chaque unité. Elle ajoute ensuite des traits verticaux pour faire un tableau de numération :

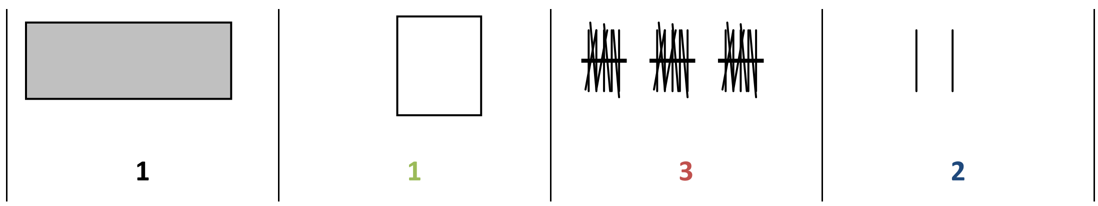


Figure 92 : le tableau de numération tracé au tableau par Mme F

Elle met en avant sa rapidité (comme cela est indiqué dans la ressource) même si le premier cas ne permet pas vraiment d'en témoigner :

> « Là on a un outil qui permet de fonctionner rapidement parce que là on est bien d'accord, on lit notre nombre, on connaît notre nombre de bûchettes très rapidement, beaucoup plus rapidement qu'hier quand vous avez été obligés de compter. Là en regardant notre nombre de bûchettes, notre nombre de paquets de dix […] en se servant de la position on trouve tout de suite notre nombre ».

Elle utilise donc, pour ce premier cas, un contrat d'ostension déguisée. Les savoirs décrits font partie du milieu pour les cas suivants. Le contrat est de les utiliser, mais le jeu sur les variables didactiques va permettre d'affiner la formulation des savoirs pour dépasser la

simple juxtaposition. En effet, pour ce premier cas, l'écriture par Mme F de la collection au tableau dans l'ordre conventionnel peut laisser penser aux élèves qu'il faut juxtaposer les chiffres correspondant au nombre d'unités de chaque ordre. A partir de ce que Mme F institutionnalise avec le tableau de numération, les élèves pourraient inférer une simple juxtaposition de chiffres ne tenant pas compte du rang des unités puisqu'ils n'ont pas encore été confrontés aux unités dans le désordre et à la question du zéro.
Pour la deuxième collection (1 millier, 2 centaines 3 unités), lors de la phase collective, Mme F interroge l'élève qui a fait une erreur (Anastasia) et la fait venir au tableau. Cela témoigne d'un changement de contrat par rapport à la phase collective précédente (contrat d'adhésion). L'appui sur les erreurs d'Anastasia lors de la phase de conclusion permet à Mme F d'affiner la formulation des savoirs en jeu : quand il n'y a pas de dizaines il faut mettre un zéro au rang des dizaines (« à la place des dizaines on va mettre un zéro »). Pour mettre en évidence le rôle du zéro, il est important de voir ce qui se passe si on n'écrit pas le 0. La formulation précédente de la technique évolue donc ici avec la prise en compte du zéro.

Réinvestissement et adaptation de la technique formulée (derniers cas).
Pour la troisième collection (2 milliers, 3 dizaines, 4 unités), le principe de position (tableau de numération) ainsi que le rôle du chiffre 0 ont déjà été institutionnalisés et sont donc dans le milieu. Il s'agit finalement d'un réinvestissement de ce savoir en l'adaptant à l'unité absente, ici la centaine. Lors de la phase collective, il n'y a pas d'évolution de la technique formulée précédemment. Cette fois les interventions de l'enseignante ne sont pas orientées vers la classe mais plutôt vers une élève particulière (contrat de tutorat) qui a fait une erreur de positionnement du 0 (toujours Anastasia).
Pour la quatrième collection (4 dizaines, 4 milliers, 2 unités, 3 centaines), plusieurs élèves font des erreurs mais se corrigent d'eux-mêmes quand Mme F leur dit qu'ils se sont trompés lors de la phase de recherche (elle signale des erreurs d'étourderie). Le changement d'ordre de présentation des unités présente donc bien l'intérêt d'exercer la vigilance des élèves. Il n'y a pas d'institutionnalisation lors de la conclusion du quatrième cas. Finalement Mme F n'utilise donc pas ce cas pour institutionnaliser le fait que le millier s'écrive au 4$^{\text{ème}}$ rang : cela est vu à travers l'utilisation du tableau.

Institutionnalisation des savoirs en jeu.
Nous avons vu que l'enseignante commence à institutionnaliser les savoirs en jeu dès le premier cas puis affine la formulation en fonction des différents cas proposés.
Elle termine la séance avec une phase de bilan collectif de la séance, à partir de l'expression des « difficultés » rencontrées par les élèves dans la situation. Après un jeu de questions réponses, elle conclut ainsi :

> « Pour pouvoir compléter notre tableau de numération et indiquer la bonne place, quand nous n'avions pas de dizaine nous étions obligé néanmoins de l'indiquer dans le rang des dizaines, d'accord ? Voilà ce qu'il fallait comprendre de ce que l'on a pu faire ce matin ».

Cela lui permet de revenir sur le rôle du zéro. Il s'agit donc bien pour elle de l'enjeu de cette séance. Dans cette synthèse finale, Mme F donne à son discours un caractère général en s'appuyant sur les unités de numération, non lié spécifiquement au contexte des bûchettes même si, pour le moment, le fait que cela peut être appliqué à d'autres contextes reste implicite.
Voici finalement les savoirs institutionnalisés par Mme F au cours de la séance. Dans une boite il y a mille bûchettes, dans un sachet il y a cent bûchettes, dans un paquet il y a dix bûchettes. Pour dénombrer une collection déjà groupée qui est dessinée au tableau, si les

unités ne sont pas dans l'ordre il faut les réécrire dans l'ordre. Ensuite on se sert du tableau de numération qui nous donne directement la réponse, sauf quand il n'y a pas une unité : on écrit un 0. Par exemple, s'il n'y a pas de centaine on écrit un 0 au rang des centaines. Pour dire ou écrire en lettres on n'a pas le droit de dire/écrire « un mille » : on dit « mille ».

Conclusion
Cette observation permet de confirmer l'utilisation d'une simple juxtaposition de chiffres (sans prise en compte de la position des unités correspondantes) par certains élèves, notamment ici Anastasia. Cela a pu être provoqué par une institutionnalisation prématurée de la technique de juxtaposition par l'enseignante, mais l'appui sur cette erreur lui permet de préciser les savoirs en jeu. Nous pouvons penser que l'institutionnalisation est prématurée (dans un contrat d'ostension déguisée) dans le sens où, à ce moment de la séance, les élèves n'ont pas été confrontés à suffisamment de cas différents (notamment avec des zéros) pour interpréter la technique en tenant compte de la position des différentes unités.
Le jeu sur les deux variables didactiques (ordre des unités et absence d'unité à un certain ordre) apparaît alors comme une condition essentielle pour permettre aux élèves de dépasser la simple juxtaposition des nombres.

Variante S_{Dv3} : « Jeu des paris »

Cette séance a lieu trois jours après la précédente. Mme F n'a pas fait de travail de numération entre les deux séances.

Les choix de Mme F
Mme F propose un travail sur les deux tâches : dénombrer une collection groupée puis dénombrer une réunion de deux collections.
Les quantités de chaque collection sont décrites en unités de numération. La première collection est également réalisée avec des étiquettes représentant les différents groupements de bûchettes, mais celles-ci ne sont plus visibles pendant la recherche. Quatre nombres possibles sont proposés (les paris). Ils tiennent compte des erreurs prévisibles. Les élèves ont un cahier de brouillon pour la recherche. L'énoncé du problème est écrit au tableau numérique interactif (TNI) :

> Nous avons une collection de 2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules.
> Nous avons reçu un lot de 4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules.
> Nous avons réuni ces deux collections.
> Maintenant, combien y a-t-il de bûchettes en tout ?
> 31215 ?   3315 ?
> 3215 ?   4215 ?
> Il faut faire un pari sur un de ces nombres.

L'enseignante explique aux élèves qu'ils vont devoir faire un pari et qu'ensuite ils auront la possibilité d'en changer. Pour ce premier cas les deux collections ainsi que les nombres paris sont les mêmes que ceux proposés dans la ressource. L'enjeu principal de la séance se situe dans la recherche de ce premier cas.
Un deuxième cas est proposé (3m 6c 1d 3u et 7c 1m 4u). Il permet de s'assurer que les élèves utilisent bien ce qui aura été mis en évidence suite au premier cas. Dans les deux cas

il y a plus de dix centaines après réunion des deux collections, ce qui amène à faire une conversion. Il n’y a qu’une seule conversion en jeu (centaines/millier).

Déroulement de la séance

On trouvera la description du déroulement de la séance en annexe III.2.

Tableau synoptique du déroulement de la séance

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases et organisation</th><th>Techniques et éléments technologiques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">Dénombrer une collection (représentée) : 3 boites, 8 sachets, 1 bûchette</td><td rowspan="3">Présentation collective (rapide) puis recherche individuelle.
Dévolution.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">Conclusion, collectif.
Rappel d’un savoir ancien.</td><td rowspan="2">Comme il n’y a pas de centaine on met un 0 « à la place où il y a les centaines »</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="3">Dénombrer une collection (représentée) : 3 bûchettes, 7 boites, 1 sachet</td><td rowspan="2">Présentation collective (rapide) puis recherche individuelle.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Conclusion, collectif. Rappel.</td><td>Les boites sont les milliers, les sachets les centaines, les bûchettes les unités.</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="31">Dénombrer une réunion de collections (écrites avec unités de numération) : 2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules ET
4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules.

Réponses possibles : 31215, 3315, 3215, 4215.</td><td rowspan="7">Présentation collective.
Dévolution.
Rappel (du contenu d’une boite).
NB : tâche intermédiaire en collectif : réaliser la première collection avec les étiquettes de boites, sachets ...</td><td rowspan="7">Rappel : un millier c’est cent dizaines, c’est dix centaines.</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="11">Recherche, individuel</td><td rowspan="11"></td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="13">Conclusion, collectif.
L’enseignant fait formuler leur technique par deux élèves.
Reprise d’une erreur. Utilisation du milieu matériel.
Institutionnalisation.
Vérification du résultat.</td><td rowspan="13">Dénombrer chaque collection et poser une addition des deux nombres. Pour 8 + 4 = 12 il faut mettre une retenue. 10 centaines = 1 millier, donc 12 centaines = 1 millier + 2 centaines

Technique de vérification : comptage oral de mille en mille, cent en cent, …</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
<tr><td>33</td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
<tr><td>36</td></tr>
<tr><td>37</td></tr>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td><td rowspan="2">Dénombrer une réunion de collections : 3 milliers de</td><td rowspan="2">Recherche, individuel</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>41</td></tr>
</table>

42	bûchettes, 6 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules ET 7 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 4 bûchettes seules. Réponses possibles : 41317, 4317, 5317, 4417.		
43			
44			
45			
46			
47			
48		Conclusion, collectif.	
49	Dénombrer une réunion de collections.	Synthèse, collectif. Institutionnalisation.	<u>Dix centaines = un millier et « c’est pareil pour les dizaines » … Dix milliers ça fait une dizaine de millier.</u>
50			
51			

Figure 93 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv2}, classe de Mme F

<u>Analyse du déroulement de la séance</u>

Du côté des élèves

Signalons que pour le dénombrement d’une seule collection totalement groupée (rappel de début de séance), seul un élève fait une erreur dans le comptage des milliers pour la deuxième collection. L’élève Anastasia qui était en difficulté lors de la séance précédente ne fait pas d’erreur. L’enseignante nous dira d’ailleurs sa surprise dans l’entretien de fin de séance.

Pour le dénombrement de la première réunion de deux collections (2m 8c 1d 3u et 4c 1m 2u), voici les techniques utilisées par cinq élèves pendant la recherche :

- écriture directe de 4m 2c 1d 5u (technique invisible) ;
- dénombrement de chaque collection et addition posée (4215)
- décomposition puis calcul. Voici ce que cette élève a écrit sur son cahier : 800 + 400 = 1200, 1200 + 1000 + 2000 = 4000 + 200 = 4200, 13 + 2 = 15, 4200 + 15 = 4215 ;
- écriture directe de 31215 (technique invisible) ;
- dénombrement des deux collections (2813 et 1402) puis ajout des chiffres de même rang : 2+1=3, 8+4=12, 1+0=1, 3+2=5 (sans poser l’addition), ce qui aboutit à 31215.

La dernière élève semble bloquée : elle n’écrit rien. L’enseignante vient l’aider en lui demandant d’écrire le nombre de bûchettes de la première puis de la deuxième collection et d’en déduire combien il y en a en tout.

La deuxième réunion de collections permet une reprise du même problème avec des nombres différents. Ainsi chaque élève peut utiliser la technique mise en évidence dans la phase de conclusion précédente (addition posée). En fait, cinq élèves utilisent l’addition posée et une élève continue de faire une décomposition et du calcul en ligne (7+6=13, 3000+1000+1000=5000, 5010+7 unités=5017+300=5317).

Introduction du savoir en début de séance.

Tout d’abord Mme E rappelle en début de séance le rôle du zéro pour marquer l’absence d’unités isolées et s’assure que tous les élèves savent bien dénombrer une collection groupée. Ensuite, lorsque l’enseignante présente le problème du jour (il va falloir dénombrer une réunion de deux collections), elle rappelle aussi dès la présentation de ce problème, le nombre de sachets dans une boite, en appui sur le matériel. Il s’agit du savoir visé. Il est donc dans le milieu lors de la recherche des élèves.

Gestion de la phase de conclusion. Quelle prise en compte de l’enjeu de validation ?

Lors de la phase collective de conclusion (première réunion de collections) Mme F demande à une élève qui a trouvé la réponse d'expliquer sa technique. Cela permet la formulation de la technique de l'addition posée mais ne permet pas de faire émerger tout de suite le principe décimal (malgré une erreur introduite volontairement par l'enseignante dans la réalisation de la technique) car les élèves se centrent sur la nécessité de mettre une retenue sans chercher à l'expliquer. C'est alors en s'appuyant sur une erreur de juxtaposition (31215), mais toujours en passant par l'addition posée, que Mme F institutionnalise la relation entre centaine et millier, en ressortant le matériel des bûchettes et en montrant que dans une boite il y a 10 sachets. Elle fait le lien avec la retenue de l'addition posée. Elle fait aussi le lien avec le passage de « trois-mille-neuf-cent » à « quatre-mille » lors de la vérification du résultat par comptage oral en unités simples (« c'est notre millier qu'on a fabriqué avec nos centaines »).
Mais c'est l'enseignante qui prend la responsabilité des explications. L'activité des élèves n'est pas à ce niveau-là : « ça dépasse », « ça ne fait pas joli » … L'enjeu pour eux reste au niveau de l'action, il s'agit de trouver la réponse. L'enjeu pour l'enseignante est d'expliquer ces réponses pour faire émerger le savoir en jeu. Mme F ne laisse pas planer le doute quant à la validité de la réponse, ce qui pourrait être lié à des habitudes de fonctionnement des phases de correction dans la classe. D'ailleurs le fait d'interroger d'abord une élève qui a trouvé la bonne réponse tue l'enjeu de validation (remarquons que dans la séance précédente elle avait aussi fait cela pour la première collection puis interrogeait par la suite l'élève qui faisait des erreurs en premier).
Finalement, il n'y a pas de discussion sur la raison pour laquelle la technique utilisée par l'élève ne fonctionne pas (simple juxtaposition). Même si un élève dit que « ça dépasse », cela n'est pas repris ou questionné par l'enseignante. La nécessité d'écrire un chiffre par rang reste invisible. Cela ne permet donc pas de faire le lien avec la technique de dénombrement construite dans la séance précédente, en montrant la nécessité des conversions, ce qui était l'enjeu principal de cette variante.
L'enjeu pour la deuxième recherche est de réinvestir la technique mise en évidence dans la phase de conclusion (un contrat de réinvestissement de connaissances). Lors de la deuxième phase de conclusion, l'enseignante fait juste remarquer son erreur à un élève qui a oublié un chiffre dans le dénombrement d'une des deux collections.

Institutionnalisation des savoirs en jeu.
Mme F conclut par une synthèse qui permet de revenir sur le « problème des douze centaines ». Un élève explique que « quand il y a dix centaines, on arrête de les prendre et on met une retenue un peu ». Cela témoigne de ce que nous avons dit au-dessus : les élèves ne se placent pas au niveau des savoirs mais de la technique. Mme F prend alors à nouveau la responsabilité de l'explication en disant que les douze centaines s'échangent contre un millier et deux centaines et que c'est bien ce qui est à retenir :

> E : Si y'a une chose qu'il faut que vous reteniez aujourd'hui c'est ça. C'est-à-dire que quand on groupe par dix nos centaines, eh bien dix centaines ça devient un millier. Et de la même façon si on groupait par dix mais aux dizaines, qu'est-ce qui se passerait ?
>
> Un e : ça ferait une centaine.
>
> E : eh bien oui
>
> Une e : inaudible
>
> E : ah non non non, si on mettait dix milliers ensemble ça deviendrait ? Enzo.
>
> Enzo : dix-mille

E : oui une dizaine de milliers

Un e : un million ?

E : non ça le million on en parlera mais à la fin de l'année.

Mme F institutionnalise donc dans cette séance la technique qui consiste à dénombrer chaque collection séparément puis à calculer le nombre total de bûchettes par une addition posée, avec retenue (pour les centaines). Cette technique est justifiée en appui sur le principe décimal de la numération : dix centaines sont égales à un millier (ou « dix centaines s'échangent contre un millier »). L'utilisation des unités de numération permet une décontextualisation des relations entre unités. D'autres relations (que centaines/milliers) sont institutionnalisées dans la synthèse finale : 10 dizaines = 1 centaine et suite à une question d'un élève : 10 milliers = 1 dizaine de milliers. Cela permet d'amorcer une généralisation des relations entre unités.

<u>Du côté des élèves, lors d'un exercice d'entraînement, quinze jours plus tard</u>
Mme F a proposé quinze jours après cette séance un exercice reprenant différents cas de dénombrement : dénombrer une collection groupée, des réunions de collections et une collection partiellement groupée. Nous allons rapporter rapidement les réussites et difficultés rencontrées par les élèves à partir de leurs productions (six élèves).
Pour le dénombrement des deux collections totalement groupées (absence de centaine isolée pour la première et de dizaine isolée pour la deuxième) : une erreur dans le positionnement du 0 (Anastasia) et une erreur dans le comptage d'une unité (1 au lieu de 3).
Pour le dénombrement d'une réunion de deux collections : deux erreurs. Anastasia ajoute une dizaine pour les 12 centaines (au lieu d'un millier). Léo dénombre la réunion de collections : 3M 12C 1D 5U mais fait une erreur dans l'EC : 3112. Pour les autres élèves, nous remarquons qu'aucun ne pose l'addition, même si tous ont dénombré chaque collection avant de chercher le nombre total.
Pour la réunion de trois collections, aucun élève ne trouve la bonne réponse. Anastasia et Léo font le même type d'erreur. Pour les autres élèves les erreurs viennent du calcul final car le dénombrement de chaque collection est réussi. Ils n'ont toujours pas posé l'addition.
Enfin pour le dénombrement d'une collection partiellement groupée (12C 5U 3M 1D), seulement deux élèves trouvent la bonne réponse. Un élève n'écrit rien (Léo), une écrit 3125 (Anastasia), un autre écrit 31215 et le dernier 4305. Cet exercice fait donc à nouveau émerger des erreurs de juxtaposition de chiffres sans prise en compte de la position des unités correspondantes (3125 ou 31215), que le dénombrement de réunions de collections avait en quelque sorte cachées puisque les élèves pouvaient utiliser un calcul pour obtenir le nombre total. Cela nous permet de confirmer que la variante des paris n'a pas permis d'étendre la technique de juxtaposition aux collections ayant plus de dix unités à certains ordres, comme l'analyse de la séance (ci-dessus) nous le laissait penser. Cela pourrait être lié au fait qu'il n'est pas assez clair dans la ressource qu'il faut amener les élèves à passer par l'EC du nombre de chaque collection.

<u>Conclusion</u>
Les choix faits par Mme F s'appuient fortement sur ce qui est proposé dans la ressource. D'ailleurs l'énoncé du problème est un copier/coller de l'exemple donné dans la ressource. Mais la mise en œuvre de cette séance amène tous les élèves à poser une addition pour dénombrer une réunion de collections dans le dernier cas proposé. En effet, cette technique est mise en avant par l'enseignante lors de la correction du premier cas. Elle est connue des

élèves et, une fois la gestion de la retenue rappelée, elle est étendue au cas des nombres supérieurs à mille. Elle apparait en outre bien adaptée à ce problème. Cette technique est justifiée en référence aux groupements effectués avec le matériel des bûchettes. Par contre il n'y a pas de travail autour de l'extension de la technique de juxtaposition au cas où on a plus de dix unités à un certain ordre. Finalement le travail de conversion entre unités reste donc sous la responsabilité de l'enseignante. Il a une fonction de technologie pour la retenue de l'addition posée.
Du coup les élèves n'ont pas appris à étendre la technique de juxtaposition pour des collections ayant plus de dix unités à certains ordres, en tenant compte des conversions. Cela a été confirmé par l'analyse de leurs productions dans un exercice donné quelques jours plus tard par Mme F : seuls deux élèves réussissent à dénombrer une collection de 12C 5U 3M 1D. Des juxtapositions de nombres sans prise en compte des conversions nécessaires (3125 et 31215) apparaissent à nouveau pour deux élèves.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme F (première partie de sa séquence)

Activités proposée : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
<u>Variante S_{Dv1} : « Combien de bûchettes ? »</u>	Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*	*Non observé.*
<u>Variante S_{Dv2} « Compte de bûchettes »</u> (S1)	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*	Pour dénombrer une collection en vrac il faut faire des groupements successifs par dix. Dans une boite il y a mille bûchettes, dans un sachet il y en a cent, etc. (rappel). Pour dénombrer une collection groupée, on écrit les chiffres correspondant à chaque unité (dans le tableau de numération). Quand il n'y a pas une unité, on écrit un zéro. Quand les unités sont dans le désordre, il faut les réécrire dans l'ordre.
<u>Variante S_{Dv3} « Le jeu des paris » (S2)</u>	Dénombrer une collection groupée (rappel). Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*	Écrire un zéro en cas d'absence de centaines (rappel). Une boite c'est un millier, etc. (rappel). Dénombrer chaque collection et faire une addition posée. La retenue vient du fait que 10 centaines = 1 millier. On a aussi 10 dizaines = 1 centaine et 10 milliers = 1 dizaine de milliers.
Exercice	Dénombrer une collection groupée, des réunions de collections et une collection partiellement groupée. *Bûchettes.*	*Non observé.*

Figure 94 : tableau de déroulement de la première partie de la séquence de Mme F

Une affiche a été réalisée par Mme F mais nous ne savons pas à quel moment de la séquence :

1 millier = 10 centaines (avec une boite qui est collée à l'affiche)
1 centaine = 10 dizaines (avec un sachet qui est collé à l'affiche)
1 dizaine = 10 unités (avec un paquet qui est collé à l'affiche)

Le dernier exercice a été en fait proposé le même jour que la situation de commande (l'après-midi). Nous l'indiquons ici car il se rapporte à la situation de dénombrement.

Bilan sur la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme F

Même si dans la variante S_{Dv2} des comptes de bûchettes (2ème séance) Mme F institutionnalise très tôt (ostension) la technique de juxtaposition, le jeu sur la présence/absence d'unité et sur l'ordre de présentation des unités permet aux élèves de dépasser les simples juxtapositions de chiffres pour les collections totalement groupées. Cela permet aussi à Mme F de compléter son institutionnalisation en expliquant le rôle du chiffre 0 dans l'écriture du nombre.
L'élève qui était en difficulté au cours de cette séance a réussi à dénombrer une collection de 3M 8C 1U sans erreur lors de la séance suivante, ce qui peut témoigner d'un apprentissage.
La variante S_{Dv3} du jeu des paris permet une nouvelle émergence de la simple juxtaposition des nombres dans le cas où on a plus de dix unités à un certain ordre (deux élèves écrivent un nombre à deux chiffres pour les centaines).
L'enseignante institutionnalise la technique de dénombrement de chaque collection suivie de l'addition posée. Elle explique alors la retenue en lien avec les relations entre unités. Pour la deuxième collection, les élèves utilisent en majorité cette technique, ce qui leur permet de ne pas faire d'erreur. Même s'ils ont pu s'entraîner à utiliser la technique de dénombrement construite dans la séance précédente pour dénombrer chaque collection, ils n'ont pas eu à se questionner sur l'extension de cette technique au cas où il y a plus de dix unités à un certain ordre car tout ce qui relève du principe décimal est pris en charge par l'enseignante. D'ailleurs dans une fiche d'exercices proposée par la suite, seuls deux élèves réussissent à dénombrer une collection partiellement groupée (12C 5U 3M 1D). Les relations entre unités ont bien été institutionnalisées (elles sont même l'objet d'une affiche dans la classe), mais la variante des paris n'a pas permis leur utilisation par les élèves dans des conversions entre unités pour dénombrer une réunion de collections.

II.3 Analyse de la mise en œuvre de la situation de dénombrement de collections dans la classe de Mme E

Dans une première séance (non observée) Mme E a fait dénombrer une grande collection en vrac (variante S_{Dv1}).

Variante S_{Dv2} : « Comptes de bûchettes »

<u>Déroulement de la séance</u>
On trouvera la description du déroulement de la séance en annexe III.2.

<u>Les choix de Mme E</u>
Il y a trois types de tâches travaillés dans la séance. Tout d'abord Mme E commence par un rappel du dénombrement d'une collection en vrac, puis à partir d'une collection groupée elle demande aux élèves de la dénombrer et d'écrire le nombre en lettres.
Après le rappel, le problème consiste en une suite d'exercices de dénombrement de collections totalement groupées avec un jeu sur les deux variables didactiques : ordre de présentation des unités et présence/absence d'unités isolées à un certain rang.

Mme E montre une première collection aux élèves et leur demande : « il va falloir compter le nombre et après on va l'écrire ». Elle décrit la collection oralement (« j'ai une boite de mille, trois paquets de dix » …). Les élèves doivent compter dans leur tête puis écrire le nombre sur leur cahier, en chiffres. Le problème est donc d'associer la description donnée par Mme E à une écriture en chiffres, sans doute en passant par désignation orale. Le fait de donner les unités dans un ordre non conventionnel, amène les élèves à tenir compte de la valeur de chaque unité pour retrouver l'ordre conventionnel à l'oral (d'abord les mille, puis les cents, …). Pour l'écrire en chiffres il reste à écrire « mille » avec un 1 avant le nombre à trois chiffres restant. Les élèves savent déjà écrire les nombres de 3 chiffres. La difficulté est liée au fait que pour « mille » on n'entend pas « un », donc on n'entend pas le chiffre à écrire, mais les élèves ont déjà pu rencontrer de tels nombres (dans la vie courante ou en histoire pour les dates par exemple).
Pour le deuxième cas, il s'agit de dénombrer une collection matérielle, décrite oralement : « huit paquets de dix », « deux bûchettes », …) puis représentée au tableau par un dessin (dans le désordre).
Pour le troisième cas, Mme E dessine la collection au tableau sans la décrire (4 paquets de dix, 5 bûchettes et 2 boites de mille). Les unités sont toujours dans le désordre mais il n'y a pas de centaine. C'est donc le rôle du zéro et la position dans l'écriture en chiffres qui est en jeu. Nous considérons donc que l'enjeu principal de la situation concerne ce troisième cas.
Enfin, Mme E propose une fiche d'exercices avec des collections représentées (dans le désordre). Elle varie toujours l'ordre des unités et propose des absences d'unités isolées à des ordres différents. Elle termine par un nombre à 3 chiffres. Aucun cas avec plusieurs zéros n'est proposé.

Tableau synoptique du déroulement de la séance

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases. Organisation</th><th>Techniques et éléments technologiques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">Dénombrer une collection non groupée</td><td rowspan="3">Rappel. Collectif</td><td rowspan="3">Rappel du nombre de bûchettes dans une boite, dans un sachet, dans un paquet. Rappel de la technique de dénombrement d'une collection en vrac.</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="13">Dénombrer une collection groupée. Collection matérielle dont Mme E énonce le contenu : 1 boite de 1000, 4 pochettes de 100, 3 paquets de 10, 4 bûchettes

Écrire en lettres.</td><td rowspan="6">Présentation. Collectif (avec moments de recherche en individuel).</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="5">Conclusion. Collectif</td><td rowspan="5">On écrit le nombre de boites de mille, puis le nombre de sachets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre de bûchettes seules : 1424.</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="2">Recherche. Individuel</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="7">Dénombrer une collection groupée. Collection matérielle et représentée au tableau (dans le désordre) : 2 bûchettes, 4 sachets de 100, 8 paquets de 10 et 2 boites de 1000</td><td rowspan="2">Présentation. Collectif</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="2">Recherche. Individuel</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">Conclusion. Collectif</td><td rowspan="3">Ecrire les nombres correspondant à chaque unité et effectuer une addition posée en colonnes.</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
</table>

24 25 26	Écrire en lettres la quantité de la même collection que ci-dessus.		
27	Dénombrer une collection groupée. Collection représentée au tableau (dans le désordre) : 4 paquets de 10, 5 bûchettes et 2 boites de 1000	Prés. Collectif	
28 29 30 31 32		Recherche. Individuel	
33 34 35 36 37 38 39		Conclusion. Collectif	On écrit le nombre de boites de 1000, puis le nombre de sachets de 100, le nombre de paquets de 10 et le nombre de bûchettes seules : mais ici on trouve 245. <u>Comme il n'y a pas de centaine on écrit 0 au rang des centaines.</u> <u>Principe de position avec tableau de numération :</u> 2 ǀ 0 ǀ 4 ǀ 5 Milliers centaines dizaines unités
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51	Collections représentées sur feuille d'exercice (dans le désordre) à dénombrer : - 5 bûchettes, 1 sachet, 1 boite - 2 boites, 3 paquets de 10, 5 bûchettes (mélangées) - 5 bûchettes, 2 boites, 4 sachets - 3 sachets, 6 paquets, 8 bûchettes	Recherche. Individuel Puis travail par groupes de deux pour les élèves qui ont terminé.	
52 53	Dénombrer une collection groupée.	Synthèse. Collectif	Synthèse à partir de l'exemple au tableau (2405) : le 2 correspond au nombre de boites, etc. S'il n'y a pas de centaine on écrit 0.

Figure 95 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv2}, classe de Mme E

<u>Analyse du déroulement</u>

Une même organisation pour les différents cas de dénombrement.

Mme A propose toujours la même organisation pour les différentes collections à dénombrer : présentation collective de la collection, recherche individuelle et conclusion collective puis présentation de la collection suivante, etc. Les phases de conclusion sont l'occasion d'institutionnalisation de savoirs qui doivent donc être réutilisés par les élèves pour le cas suivant.

Du côté des élèves, pour les deux premiers cas.
Il est difficile de savoir quelles ont été les techniques effectivement utilisées par les élèves au cours de cette séance car nous n'avons pas toujours eu la possibilité de les observer pendant les phases de recherche ou bien parce que les traces sur les cahiers ne permettent pas toujours d'identifier leur technique, ou encore parce que Mme E ne laisse pas toujours aux élèves la possibilité de formuler leur technique lors des phases collectives.
Pour la première collection, nous n'avons pas d'information sur les techniques utilisées. On peut penser que les élèves ont effectué un comptage comme cela est demandé par l'enseignante. Ils n'ont pas encore de support pour écrire la réponse.
Pour la deuxième collection nous n'avons pas observé les réponses des élèves.

Régulation de l'enseignante pour les deux premiers cas
Lors de la phase de conclusion du premier cas, certains élèves se construisent une technique à partir de la désignation de la quantité faite au tableau par Mme E :

1 boite de 1000

4 pochettes de 100

3 paquets de 10

4 bûchettes

Plusieurs élèves font remarquer que l'on retrouve les chiffres en regardant du haut vers le bas, même si eux n'avaient pas fait comme ça car cela n'était pas encore écrit au tableau. Cette technique est incomplète pour le moment puisqu'il s'agit de réécrire les chiffres à partir de l'écriture 1 boite de 1000, 4 poches de 100, etc. Elle peut être vue comme une juxtaposition de chiffres sans prise en compte du rang de chaque unité. Rien n'est dit sur l'ordre ou sur les zéros éventuels. Mme E va alors chercher dès le deuxième cas à déstabiliser cette technique en donnant les unités dans le désordre. Lors de la conclusion du deuxième cas un travail pourrait être fait dans la classe pour affiner la technique formulée par des élèves précédemment en tenant compte de la position de chaque unité dans l'écriture en chiffres. Mais ce n'est pas le choix de Mme E. Elle met en avant la technique de l'addition posée.

Du côté des élèves, pour le troisième cas.
Pour la troisième collection, voici les résultats que nous avons observés sur les cahiers des élèves (il y a 22 élèves dans la classe) :

- écriture directe de 2045 (10 élèves) ;
- 2000 + 40 + 5 = 2045 (1 élève)
- 2405 (2 élèves)
- 231211 (1 élève)
- 2085 (1 élève)
- 245 puis raye et n'écrit rien d'autre (1 élève).

Certains cahiers n'ont pu être observés, faute de temps.
Malgré le traitement des deux cas précédents, ce cas pose encore des difficultés aux élèves, qui pourraient être liées à l'absence de centaines isolées (au moins pour 3 élèves).

Régulation et institutionnalisation des savoirs pour le troisième cas.
On peut penser que pour le troisième cas le contrat est d'utiliser la technique montrée par l'enseignante (addition posée). Mais ce n'est pas ce que font les élèves qui restent dans une recherche d'écriture directe du nombre à partir des nombres d'unités des différents ordres.

Lors de la phase de conclusion, l'élève au tableau, qui est interrogé par Mme E, traduit « deux-mille-quarante-cinq » en 245. La lecture de ce nombre permet d'invalider sa réponse. Il y a donc bien une possibilité de rétroaction du milieu en appui sur les connaissances sur les nombres inférieurs à mille.
Mme E institutionnalise alors la position des différentes unités et le rôle du chiffre 0. Pour dénombrer une collection, on écrit le nombre de boites de mille, puis le nombre de sachets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre de bûchettes seules. Mais ici on trouve 245. Comme il n'y a pas de centaine on écrit 0 au rang des centaines.

2	0	4	5
Milliers	centaines	dizaines	unités

C'est donc l'erreur d'un élève qui a juxtaposé les chiffres (245 pour 2m4d5u) qui lui sert à faire émerger le savoir visé en interaction avec les élèves. Elle utilise le tableau de numération (qui n'était pas apparu jusque-là). Les unités de numération servent à nommer les différents rangs (colonnes du tableau). Ces unités n'avaient pas été utilisées auparavant pour désigner les différents groupements.
Mme E propose ensuite une fiche d'exercices (contrat de réinvestissement des connaissances nouvelles) et termine la séance par une synthèse permettant de rappeler le problème étudié aujourd'hui et à partir d'un exemple (2045) d'institutionnaliser le principe de position en explicitant le nombre d'unités de chaque ordre dans un nombre écrit en chiffres.

Du côté des élèves, lors des exercices de fin de séance
Pendant la recherche de ces exercices, pour un élève en difficulté sur la première collection (qui a écrit 5 + 100 + 1000 = 7000), Mme E demande de poser l'addition en colonnes en alignant bien les unités avec les unités, etc.
Pour les autres élèves il n'y a pas d'erreurs sauf pour la troisième collection : certains élèves (au moins 5) trouvent 2045 au lieu de 2405. Il est possible que ce soit un effet de contrat : comme le seul cas qui a été vu auparavant avec le zéro était un cas de zéro au rang des centaines, les élèves reproduisent ce cas. Cela pourrait témoigner d'une certaine fragilité de la technique construite.

<u>Conclusion</u>
Après le premier cas proposé, une désignation de la quantité écrite par Mme E au tableau (avec EAC) amène certains élèves à identifier un lien entre le nombre d'unités de chaque ordre et l'écriture en chiffres.
L'enseignante va alors chercher à déstabiliser l'interprétation que les élèves peuvent en faire en termes de simple juxtaposition de chiffres en proposant un deuxième cas avec unités dans le désordre puis un troisième cas avec absence de centaines isolées (et unités dans le désordre). C'est sur ce dernier cas que l'enseignante s'appuiera pour institutionnaliser le principe de position avec le tableau de numération en précisant le rôle du chiffre 0. Des exercices permettent alors aux élèves de s'entraîner sur des collections variées. Ils font alors peu d'erreurs, hormis le fait d'écrire un 0 au rang des centaines au lieu des dizaines, que l'on peut interpréter comme un effet de contrat qui révèle une certaine fragilité des connaissances construites pour certains élèves.

Variante S_{Dv3} : « Jeu des paris »

<u>Déroulement de la séance</u>
On trouvera la description du déroulement de la séance en annexe III.2.

<u>Les choix de Mme E</u>
Mme E a choisi de travailler deux types de tâches dans cette séance. Elle commence par un rappel du dénombrement d'une collection groupée avec une collection constituée de 3 milliers de bûchettes, 3 dizaines de bûchettes et 4 bûchettes seules. Ensuite elle pose le problème du dénombrement d'une réunion de deux collections, avec trois cas.
Après le rappel du principe de position à partir du premier exemple, Mme E pose donc le problème du dénombrement d'une réunion de collections. Les élèves ont leur cahier et leur ardoise lors de la recherche. Ils doivent écrire le nombre sur leur ardoise. Mme E annonce qu'ils vont devoir faire un pari, qu'elle va proposer « plusieurs réponses, des réponses justes, des réponses fausses et après on va discuter ».
Pour le premier cas, pour lequel on obtient 3M 12C 1D 5U après réunion des collections, parmi les nombres paris, on ne retrouve pas les nombres qui correspondent à une simple juxtaposition des nombres, comme cela est indiqué dans la ressource. Pourtant Mme E reprend l'exemple proposé dans la ressource mais modifie les nombres paris. Du coup, les trois nombres erronés ont tous deux milliers (21534, 2534, 2634) alors que la réunion des milliers donne déjà 3 milliers sans tenir compte de l'ajout des centaines qui formeront un millier supplémentaire et le nombre d'unités simples isolées est de quatre alors qu'en ajoutant les unités simples des deux collections on trouve cinq. Les élèves peuvent donc se contenter de calculer le nombre total d'unités simples isolées pour trouver la bonne réponse. C'est la technique la plus économique ici.
Pour le deuxième cas, pour lequel on obtient 1M 10C 4D 12U après réunion des collections, on peut voir que deux nombres correspondent en partie à la simple juxtaposition : 11043 et 11052. Pour 21419 et 2109 le choix de l'enseignante est plus difficile à interpréter.
Enfin pour le dernier cas, pour lequel on obtient 3M 18C 5D 15U après réunion des deux collections, Mme E a fait des erreurs dans le choix des nombres paris (31552, 31562, 3752, 4862) comme elle nous le signalera lors de l'entretien de fin de séance. Du coup comme pour le premier cas, les élèves peuvent trouver la réponse en ne cherchant que le nombre d'unités simples isolées, car 4865 est le seul en contenant cinq.

<u>Tableau synoptique du déroulement</u>

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases.
Organisation.</th><th>Techniques visibles et <u>éléments technologiques</u></th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="9">Dénombrer une collection : 3 milliers de bûchettes, 3 dizaines de bûchettes et 4 bûchettes seules.</td><td rowspan="2">Rappel.
Collectif</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">Recherche.
Individuel</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="4">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="4">Comme il n'y a pas de centaine on écrit 0.
Un tableau de numération permet de <u>rappeler la position des unités</u> :<table><tr><th>m</th><th>c</th><th>d</th><th>u</th></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="5">Dénombrer une réunion de collections : 2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de</td><td rowspan="4">Présentation du problème.
Collectif</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Recherche.</td><td></td></tr>
</table>

15 16 17	bûchettes et 3 bûchettes seules ET 4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules. Réponses possibles : 21534, 2534, 2634, 4215.	Individuel	
18 19		Début de concl. Coll.	On met les milliers avec les milliers, les centaines avec les centaines …
20		Rech. Individuel	
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31		Conclusion. Collectif	Première technique : dessiner les deux collections en regroupant les milliers avec les milliers, les centaines avec les centaines … Puis écrire le chiffre des milliers, puis celui des centaines … Mais comme ici il y a 12 centaines, avec 10 centaines on peut faire un millier, il faut donc ajouter un millier supplémentaire et il reste 2 centaines. Deuxième technique : on peut aussi dénombrer chaque collection et poser l'addition des deux nombres[116] (utilisé pour vérifier).
32 33 34	Dénombrer une réunion de collections : 1 millier de bûchettes, 3 bûchettes seules, 7 centaines de bûchettes ET 9 bûchettes seules, 3 centaines de bûchettes et 4 dizaines. Réponses possibles : 11043, 11052, 21419, 2052 et 2109	Présentation. Collectif	
35 36 37 38 39		Rech. Individuel	
40 41 42 43 44 45 46 47 48 49		Conclusion. Collectif	Dénombrer chaque collection puis mettre les milliers avec les milliers, les centaines avec les centaines … Mais les 7 centaines avec les 3 centaines ça fait 10 centaines, donc on fait un millier supplémentaire. L'addition posée comme technique de vérification de la réponse.
50 51	Dénombrer une réunion de trois collections : 1 millier de bûchettes, 3 bûchettes seules, 7 centaines de bûchettes ET 9 bûchettes, 3 centaines de bûchettes et 4 dizaines ET 2 milliers de bûchettes, 8 centaines, 1 dizaine et 3 bûchettes seules. Réponses possibles : 31552, 31562, 3752, 4862, 4865.	Présentation. Collectif	
52 53 54 55		Rech. Individuel	
56 57 58 59 1h00 1h01		Conclusion. Collectif	Les deux techniques précédentes : - dénombrer chaque collection et poser l'addition des trois nombres. - dénombrer chaque collection puis mettre les milliers avec les milliers …
1h02	Dénombrer une réunion de collections.	Synthèse. Collectif	Synthèse : « vous avez vu qu'on a fait par le calcul ou on a redessiné tout »

Figure 96 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv3}, classe de Mme E

[116] Addition posée :

```
  2 8 1 3
+ 1 4 0 2
  4 2 1 5
```

Analyse du déroulement

L'introduction et l'utilisation des unités de numération.

Mme E commence par un rappel du problème de dénombrement d'une collection groupée mais en utilisant les unités de numération. Du coup pendant la phase de recherche un élève demande ce qu'est un millier. Mme E précise que c'est pareil que « mille ». Beaucoup d'élèves dessinent la collection puis écrivent le nombre. Ils se ramènent ainsi à la représentation utilisée lors de la séance précédente, ce qui leur permet de réutiliser la technique connue. D'autres écrivent directement le nombre en chiffres.

Nous ne pouvons pas dire si cela est lié à cette introduction de l'EUN, mais certains élèves trouvent 334 pour 3m 3d 4u. La phase collective qui suit permet de rappeler le rôle du zéro mais aussi d'invalider la réponse 334 trouvée par certains élèves. Mme E dessine un tableau de numération pour faire apparaître le lien entre l'EC et les unités de numération :

m	c	d	u
3	0	3	4

Au cours de la séance, même si la technique montrée par l'enseignante dans les phases collectives s'appuie à l'oral sur les unités de numération (« les milliers avec les milliers, sept centaines et trois centaines ça fait dix centaines … ») et à l'écrit sur le dessin du matériel, les unités de numération ne sont pas utilisées comme un ostensif pour travailler à l'écrit (par exemple 1M + 1M = 2M, 7C + 3C = 10C = 1M …). Cela pourrait pourtant permettre de faciliter la diffusion de cette technique dans la classe et pourrait donc être suggéré dans la ressource.

Du côté des élèves.

Pour la première réunion de collection, des élèves écrivent directement le nombre, d'autres font des dessins des collections. Il y a beaucoup d'erreurs, mais nous avons peu d'informations sur les productions des élèves.

Pour la deuxième réunion de collections, voici ce que nous avons observé pendant la recherche individuelle :

- dessin des collections puis dénombrement (avec éventuellement réalisation de groupements chez certains élèves)
- addition posée
- écriture directe du résultat (technique ?)

Pour le dernier cas (réunion de trois collections), lors de la phase de recherche, certains élèves dessinent les collections, ce qui pourtant s'avère peu économique. Cela pourrait témoigner d'un contrat d'utilisation de la technique institutionnalisée par l'enseignante.

Gestion des phases collectives par l'enseignante. Quelle prise en compte de l'enjeu de validation ?

Dans la phase collective de conclusion de la première réunion de collections, Mme E interroge deux élèves pour savoir comment ils ont fait : la technique qui est formulée est de mettre les milliers avec les milliers. Un élève vient présenter sa méthode de réunion des collections mais devant sa difficulté à dénombrer la collection réunie, Mme E demande à un autre élève de « l'aider sans donner la réponse ». Cet élève demande alors « si t'as dix centaines qu'est-ce que tu peux faire ? ». Mme E reformule en évoquant les « pochettes », pour faire référence au matériel. Cet épisode permet de construire une technique dans la classe. Mme E montre alors le matériel et en institutionnalisant que quand on a dix sachets on fait une boite. Elle poursuit cette phase collective en expliquant qu'il est possible aussi d'additionner les deux nombres : elle pose l'addition au tableau et demande à un élève de venir l'effectuer et aux autres de la faire sur leur cahier. Elle laisse à la charge des élèves le

calcul mais pas la justification de la retenue en lien avec le principe décimal. En fait ce calcul apparait à la fois comme moyen de vérification : « si on la pose est-ce qu'on va trouver la même chose ? » mais aussi comme autre technique possible. A la différence de la première technique celle-ci n'est pas justifiée. Le lien entre les deux techniques montrées ici n'est pas explicité. L'enseignante fait juste remarquer qu'on obtient le même nombre et qu'il y a donc deux façons de faire.
Nous pouvons constater que le mauvais choix de nombres-paris ne permet pas à Mme E de faire un travail autour des erreurs dues à la simple juxtaposition des nombres (sans prise en compte de la position des unités correspondantes). D'ailleurs elle ne recueille pas les nombres trouvés par les élèves. Elle ne tient pas compte des paris et donc de la possibilité d'en changer.

Lors de la phase collective pour la deuxième réunion de collections, pour le premier élève interrogé au tableau l'enjeu se situe donc au niveau des techniques travaillées dans les séances précédentes (le dénombrement de chaque collection pose déjà des difficultés).
Une deuxième élève vient présenter sa technique : elle explique qu'elle a mis les milliers avec les milliers, puis « après les sept centaines avec les trois centaines ça fait dix donc j'ai mis un deux à la place du un », cela permet d'obtenir 2052. Mme E fait à nouveau utiliser l'addition posée comme moyen de vérification, en laissant la responsabilité du calcul aux élèves (moment de travail individuel) puis en corrigeant au tableau (elle effectue le calcul).
Nous ne pouvons pas dire si cela est volontaire mais Mme E interroge lors des deux premières phases collectives des élèves qui ont utilisé la technique de dénombrement de la réunion des collections (et pas dénombrement de chaque collection puis addition posée). Cela lui permet de montrer la technique qui semble attendue (contrat). L'addition posée apparaît alors comme un moyen de contrôler le résultat. Le lien n'est toujours pas fait entre les deux techniques et les erreurs de juxtaposition des nombres restent invisibles (même si cette fois les nombres-paris auraient pu permettre d'en faire émerger).
Dans la phase collective pour la dernière réunion de collections, Mme E interroge un élève qui a fait une addition posée (en fait deux élèves puisqu'un des deux s'est servi du résultat d'une question précédente pour simplifier mais Mme E souhaite montrer l'addition des trois nombres). Pour la procédure de regroupement, elle demande à une élève de montrer sur son ardoise. Cette élève explique que les dix centaines elle les a groupées pour faire un millier. L'addition n'apparaît plus comme vérification mais les deux techniques sont mises sur le même plan maintenant.

Institutionnalisation des savoirs en jeu.
Mme E fait juste une synthèse rapide en rappelant uniquement les deux techniques qui ont été montrées lors des phases collectives : « vous avez vu qu'on a fait par le calcul ou on a redessiné tout ». Les savoirs en jeu restent invisibles.

<u>Une remarque à partir de l'entretien final</u>
Mme E nous indique lors de l'entretien final qu'elle a repris ce problème, sans proposer des nombres-paris mais en recueillant les réponses des élèves. Il semble qu'elle ait laissé davantage d'incertitude quant à la validité des réponses lors de cette reprise.

> « Après on l'a refait mais plutôt que ce soit moi qui donne les paris, je prends les réponses je les écris au tableau, je ne donne pas la bonne réponse tout de suite et je commence par interroger ceux qui se sont trompés et si ils ne savent pas, je leur dis qui est-ce qui peut dire,

moi je pense savoir pourquoi il a fait comme ça mais est-ce que quelqu'un peut savoir… Et là ça interpelle aussi ceux qui se débrouillent bien et qui ont à cœur de trouver pourquoi on a fait cette erreur là. Ça c'est drôlement bien parce que c'est ce vers quoi on veut aller : c'est éliminer toutes ces erreurs là et si c'est eux qui arrivent à se les expliquer, pas moi, c'est intéressant. En plus ça les déculpabilise à ce niveau là parce que même s'ils ont fait des erreurs, ce n'est pas grave ils vont pouvoir parler, on va s'occuper d'eux quand même. Là, ça a installé un rituel d'explication d'erreur après cette situation là. Travailler l'erreur en maths, on ne prend pas toujours le temps. On le fait en orthographe mais en maths on prend pas toujours le temps alors qu'on sait fort bien que ça va pécher là et là. A la limite nous, tout ce qu'on a envie, c'est qu'ils ne fassent pas ces erreurs là. »

Même si nous ne savons pas quelle exploitation a été faite des erreurs, ce que dit Mme E ici confirme ce que nous avions prévu pour cette variante, à savoir le fait que de placer les erreurs dans le milieu amène les enseignants à les prendre davantage en compte lors des phases de conclusion, ce qui ne semble pas courant pour cette enseignante.

Conclusion

Mme E s'appuie sur ce problème de dénombrement d'une réunion de collections pour faire émerger les groupements entre unités qui apparaissent nécessaires quand les élèves ont effectué la réunion et cherchent à la dénombrer. Nous pensons qu'elle choisit des élèves qui ont utilisé cette technique afin de l'institutionnaliser. Mais elle propose également une vérification par l'addition posée. Cependant le lien entre les deux techniques, qui est un enjeu important pointé dans la ressource, n'est jamais explicité. La retenue n'est pas justifiée. Peut-être cela est-il lié au fait que les élèves n'ont pas rencontré de difficulté dans la gestion de cette retenue.

De plus, Mme E n'exploite pas les nombres-paris dans ces phases collectives. Nous avons d'ailleurs vu que les nombres qu'elle propose ne sont en général pas bien choisis pour faire émerger cette erreur.

Le fait de proposer une réunion de trois collections en fin de séance rend plus coûteuse l'utilisation de la technique de groupements institutionnalisée. D'ailleurs c'est l'addition posée qui est montrée en premier lors de la phase collective pour ce dernier cas.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme E (première partie de sa séquence)

Activités proposée : directement extraite de la ressource ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
Variante S_{Dv1} « Combien de bûchettes ? »	Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*	*Non observé.*
Variante S_{Dv2} « Compte de bûchettes » (S1)	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*	On écrit le nombre de boites de 1000, puis le nombre de sachets de 100, le nombre de paquets de 10 et le nombre de bûchettes seules : mais ici on trouve 245. Comme il n'y a pas de centaine on écrit 0 au rang des centaines. Principe de position : le tableau de numération
Variante S_{Dv3} « Le jeu des paris » (S2)	Dénombrer une collection groupée (rappel). Dénombrer une réunion de deux ou trois collections. *Bûchettes.*	Deux techniques institutionnalisées : - dessiner les deux collections en regroupant les milliers avec les milliers, les centaines avec les centaines … Puis écrire le chiffre des milliers, puis celui des centaines … S'il y a plus de dix centaines, avec dix centaines on peut faire un millier… - dénombrer chaque collection et poser l'addition des

		deux nombres.
Exercice « Le jeu des paris » (reprise)	Dénombrer une réunion de deux ou trois collections. *Bûchettes.*	*Non observé.*
Exercice : « Quel est ce nombre ? ».	Dénombrer une collection partiellement groupée. *Hors contexte.*	*Non observé.*

Figure 97 : tableau de déroulement de la première partie de la séquence de Mme E

Pour le dernier exercice proposé, Mme E s'est inspirée du complément du « jeu des paris » proposé dans la ressource. Voici des exemples de quantités de collections à dénombrer : 3 milliers, 2 centaines, 12 dizaines, 12 unités ou 2 milliers, 12 centaines, 4 dizaines, 5 unités...
Dans l'évaluation que Mme E a proposée à ses élèves en fin de période sur la numération, après avoir traité cette première partie de sa séquence, les seuls types de tâches évalués sont : écrire/nommer et décomposer (en EPDC). Ces exercices ne mettent pas en jeu de recompositions avec EUN ou de conversions.

Bilan sur la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme E

Dans la variante S_{Dv2} (comptes de bûchettes), Mme E joue sur les deux variables didactiques (ordre des unités, absence/présence d'unités isolées) pour amener les élèves à dépasser la simple juxtaposition de chiffres (sans prise en compte de la position des unités correspondantes) qu'ils ont inférée à partir du premier cas proposé. Elle institutionnalise alors la technique de juxtaposition avec le tableau de numération.
On peut toutefois observer encore des erreurs de la part de certains élèves en début de séance suivante (334 pour 3M 3D 4U).
Pour la variante S_{Dv3} (jeu des paris), Mme E a fait émerger deux types de techniques utilisées par les élèves : ajout des unités de même ordre puis dénombrement de la collection obtenue ou dénombrement de chaque collection et addition posée. Mais les choix de Mme E pour les nombres-paris ne lui permettent pas de prendre en compte les erreurs de juxtaposition et de questionner l'extension de la technique construite dans la séance précédente.
De plus le lien entre les deux techniques institutionnalisées dans cette séance reste implicite. L'enjeu est au niveau des techniques pour Mme E alors que, dans la ressource, le principe décimal était mis en avant comme permettant de justifier la retenue de l'addition posée.
Ce sont des groupements (et non des conversions entre unités) qui apparaissent lors de la présentation de la technique de dénombrement de la collection réunie, toujours dans le contexte des bûchettes. Lors de l'entretien final, Mme E explique comment elle conçoit le passage du matériel à la représentation :

> « Cet aller retour entre représentation et matériel, je crois que l'on peut rester longtemps avec le matériel. Faire une séquence avec le matériel tout le temps c'est pas gênant parce que les enfants qui ont bien compris, ils vont vite se passer du matériel, mais ceux qui ont du mal, de toute façon, il faudra qu'ils y reviennent. Donc dans la progression, je pense que l'on peut toujours le garder à disposition, même si on va vers enlever le matériel. […] Parce que, là, je l'avais enlevé, il était sur l'armoire mais il a fallu qu'on y revienne pour certains, ils ont été obligés de vérifier que dans un sachet y'avait dix paquets de dix et que ça faisait cent bûchettes. Ils avaient déjà un peu oublié » (Mme E, entretien final)

Ainsi la fonction du matériel est de permettre de rappeler les groupements réalisés comme nous l'avons observé au cours des séances. Cependant, le fait de progressivement se détacher des objets pour considérer les unités correspondantes (et considérer les groupements comme des relations entre unités) n'est pas un enjeu pour l'enseignante. Cela peut faire obstacle à la décontextualisation des conversions entre unités.

II.4 Analyse de la mise en œuvre de la situation de dénombrement de collections dans la classe de M. B

Nous n'avons observé que la variante S_{Dv3} (« jeu des paris ») dans cette classe. M. B a déjà mis en œuvre les variantes S_{Dv1} et S_{Dv2} avant cela.

Variante du S_{Dv3} : « jeu des paris »

Description du déroulement
En annexe III.2.

Choix de M. B
M. B ne travaille que le type de tâches de dénombrement d'une réunion de collections. Contrairement à ce qui était proposé dans la ressource il ne traite pas le dénombrement d'une collection groupée, décrite en unités de numération. Cela pourrait être lié au fait que cette séance serait trop longue, comme il nous le signale au début de la séance. Nous lui indiquons même qu'il serait peut-être possible de traiter un deuxième cas, comme l'a fait une collègue que nous avons observée quelques jours avant. M. B n'en avait prévu qu'un seul. Lors de l'entretien de fin de séquence, M. B nous indiquera qu'il a été surpris par cette activité « parce que d'habitude les nombres ne sont pas écrits de cette façon là ». Cette désignation des quantités avec les unités de numération est donc inhabituelle pour lui.
Pour le premier cas, il propose la réunion de collections donnée dans la ressource ainsi que les mêmes nombres paris (même énoncé, écrit au tableau à l'avance).
Au tableau figure la synthèse de la séance précédente avec l'association entre les différents rangs de l'écriture chiffrée et les groupements de matériel dessinés et aussi désignés avec unités de numération.
M. B n'a pa prévu de deuxième exemple. Il en improvise un (voir tableau synoptique) mais le choix des collections proposées n'est pas en lien avec l'objectif visé puisqu'il n'y a pas de groupement de dix unités d'un certain ordre à réaliser et, de plus il est difficile d'interpréter les nombres proposés en relation avec les erreurs attendues des élèves. Cela est peut-être lié au fait que M. B a dû improviser. D'ailleurs lors de l'entretien qui suit la séance, M. B fait remarquer que ce deuxième cas est plus facile que le premier. On peut aussi se demander si l'enseignant s'est vraiment approprié l'enjeu de cette séance, au niveau des savoirs mathématiques.

Tableau synoptique du déroulement

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases. Organisation</th><th>Techniques et éléments technologiques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="12">Dénombrer une réunion de collections (écrites avec unités de numération) : 2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules ET
4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules.</td><td rowspan="8">Collectif (présentation de la situation)</td><td rowspan="8">Un millier c'est un sachet, une centaine c'est un paquet de cent, une dizaine c'est un paquet de dix et une unité c'est une bûchette (l'enseignant montre le matériel correspondant ainsi que leur représentation schématique au tableau).</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="4">Individuel (recherche)</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>13</td><td rowspan="36">Réponses possibles : 31215, 3315, 3215, 4215.</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="33">Conclusion. Collectif (mise en commun des procédures puis évaluation)</td><td rowspan="33">Deux techniques institutionnalisées :
1. « Façon dessin » : on dessine la collection réunie et on compte le nombre de milliers dans la réunion des collections puis on compte les centaines : 12 centaines. On met dix centaines dans les milliers. On compte les dizaines et les unités. On écrit les chiffres correspondant à chaque unité :
4 2 1 5
m c d u
2. « Façon calcul » : utilisation du tableau : addition posée dans le tableau, avec retenue pour les centaines : 4215.</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
<tr><td>33</td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
<tr><td>36</td></tr>
<tr><td>37</td></tr>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
<tr><td>41</td></tr>
<tr><td>42</td></tr>
<tr><td>43</td></tr>
<tr><td>44</td></tr>
<tr><td>45</td></tr>
<tr><td>46</td></tr>
<tr><td>47</td></tr>
<tr><td>48</td></tr>
<tr><td>49</td><td rowspan="13">Dénombrer une réunion de collections : 3 milliers de bûchettes, 2 dizaines de bûchettes, 7 centaines de bûchettes et 1 bûchette seule ET 4 dizaines de bûchettes, 2 milliers de bûchettes et 5 bûchettes seules.
Les nombres proposés : 5766, 7481, 32761, 7471.</td><td rowspan="10">Individuel</td><td rowspan="10"></td></tr>
<tr><td>50</td></tr>
<tr><td>51</td></tr>
<tr><td>52</td></tr>
<tr><td>53</td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>55</td></tr>
<tr><td>56</td></tr>
<tr><td>57</td></tr>
<tr><td>58</td></tr>
<tr><td>59</td><td rowspan="3">Collectif</td><td rowspan="3">Mêmes techniques : calcul et dessin mais ici il n'y a pas plus de dix unités à un certain ordre.</td></tr>
<tr><td>1h00</td></tr>
<tr><td>1h01</td></tr>
</table>

Figure 98 : tableau synoptique du déroulement de S_{Dv3}, classe de M. B

Analyse du déroulement

Du côté des élèves.

Lors de la phase collective qui suit, M. B laisse les élèves présenter au tableau leur technique sans évaluer. Ce qu'ils présentent au tableau correspond bien à ce qui est écrit sur leur brouillon. Nous revenons en détail sur ces techniques car nous n'y avons pas eu souvent accès lors de nos observations des autres séances.

Les trois premiers élèves ont dessiné la collection alors que les deux suivants ont utilisé un tableau de numération et la dernière a essayé de faire un calcul. Il est intéressant de noter que parmi les élèves ayant dessiné la collection comme ceux ayant utilisé un tableau de numération on trouve à la fois la bonne réponse et la simple juxtaposition sans prise en compte de la position des unités correspondantes. Cette erreur n'est donc pas liée à l'une deux techniques.
Pour les deux premiers élèves le passage à l'écriture chiffrée reste invisible (3315 et 31215). On peut supposer qu'ils ont fait les erreurs suggérées dans la ressource (simple juxtaposition des nombres mais en ajoutant 1 et 2 pour le premier afin d'avoir un nombre à quatre chiffres). D'ailleurs le premier expliquera plus tard (fin de cette phase) qu'il a mis ensemble le 1 et le 2. Pour le deuxième élève, suite à une demande d'explication de l'enseignant, il trouve la bonne réponse par un comptage oral en unités simples. Enfin la troisième élève explique son passage à l'écriture chiffrée par le fait qu'elle a mis dix centaines dans les milliers, ce qui lui donne quatre milliers et deux centaines … donc 4215.
Pour les deux élèves ayant utilisé un tableau de numération, ils trouvent le nombre total en effectuant une addition en colonnes dans ce tableau. Après avoir écrit les 3 milliers de la première collection, le premier élève écrit sur la deuxième ligne les unités au fur et à mesure. Il écrit donc seulement deux lignes : 3000 et 1215. Le passage de 8 centaines plus 4 centaines à « mille-deux-cents » reste invisible (quatre centaines plus huit centaines ça fait mille-deux-cents). Ces deux élèves laissent un espace entre la classe des milliers et celle des centaines. L'erreur du premier élève vient du fait qu'il a écrit le 1 millier de la deuxième collection entre le « c » de la classe des unités simples et le « m » des unités de mille, ce qui donne 31 215. Pour l'autre élève l'alignement est correct, ce qui lui permet d'obtenir la bonne réponse.
Enfin pour la dernière élève il est difficile d'interpréter ce qu'elle a voulu faire en cherchant un complément à 3000 à partir du nombre correspondant à la première collection (2813).
Le deuxième cas ne met pas en jeu les conversions. Les élèves utilisent les mêmes techniques (hormis Léna qui avait cherché un complément). Cette fois il n'y a pas d'erreur, mais comme il n'y a pas de conversion en jeu il n'est pas possible de savoir si les élèves auraient réussi à adapter leur technique suite à la conclusion du premier cas.

Gestion de la phase collective de conclusion. Prise en compte de l'enjeu de validation ?
Comme nous venons de le voir, il y a une variété de techniques et de résultats qui sont à même de permettre une discussion dans la classe concernant la validité de ces techniques puisque M. B gère la première partie de la phase de conclusion sans donner d'indice quant à la validité des réponses. Il aurait par exemple été possible de demander aux élèves s'ils souhaitaient changer de paris et les faire discuter sur les raisons pour lesquelles ils souhaitent éventuellement changer.
Cependant, M. B poursuit cette phase collective en indiquant qu'il va montrer aux élèves sa façon de faire, avec le dessin puis après par le calcul. Il procède donc par ostension. Il n'utilise pas le fait de pouvoir changer de pari.
Il commence par montrer que la réunion des deux collections produit 12 centaines et demande ce que l'on peut en faire. L'élève qui avait déjà fait cela indique qu'on les met dans les milliers, ce qui permet d'obtenir 4 milliers et 2 centaines. Pour le tableau il montre aussi la technique de l'élève qui avait trouvé la bonne réponse. Ensuite il cherche à expliquer les erreurs des autres élèves. Pour le tableau, il montre à Axel son erreur : le 1 entre les colonnes des m et c. Pour les deux élèves qui ont utilisé un dessin, il signale au premier qu'il avait trouvé en comptant puis au deuxième qu'il aurait dû mettre des centaines dans les

milliers. Enfin pour la dernière élève il lui indique qu'elle a dû confondre avec les activités de compléments à 100 qu'ils font sur ardoise. Il conclut en indiquant les deux élèves qui avaient trouvé la réponse.
Cette phase collective est donc organisée en laissant tout d'abord les élèves formuler leur technique sans intervention de l'enseignant sur la validité de ces techniques mais sans, non plus, de discussion entre élèves sur cette validité. Ensuite c'est l'enseignant qui prend la main en évaluant les réponses de chaque élève mais sans laisser à la charge des élèves de responsabilité dans ce travail. D'ailleurs, il commence par montrer les deux productions des élèves qui ont trouvé la bonne réponse. Les erreurs dues à la simple juxtaposition (sans prise en compte de la position des unités correspondantes) ne sont pas utilisées pour faire émerger la nécessité de faire des groupements. De plus le lien entre les deux techniques n'est pas explicité. Rien n'est dit concernant la retenue.
Pour la deuxième réunion de collections, M. B fait un point très rapide sur les techniques utilisées par les élèves (il n'y a pas d'erreur) et indique la bonne réponse. Il n'y a pas de synthèse sur les savoirs en jeu.

Institutionnalisation des savoirs.
Finalement les deux techniques « dessin » et « calcul » sont institutionnalisées par l'enseignant dans cette séance. Les groupements apparaissent en lien avec la première technique (dessin) pour laquelle on doit « mettre les centaines dans les milliers » (la raison pour laquelle il est nécessaire de faire cela est invisible). Pour la technique de calcul dans le tableau de numération, le savoir en jeu (principe décimal) reste invisible.

<u>Conclusion</u>
L'enjeu de cette séance est centré sur la construction de techniques pour dénombrer une réunion de collections. Du coup les erreurs des élèves (nombres-paris) ne sont pas utilisées par l'enseignant pour faire émerger la nécessité des conversions entre unités et la retenue de l'addition posée n'est pas justifiée en lien avec ce savoir. Pourtant les techniques utilisées et les erreurs faites par les élèves sont conformes aux prévisions faites dans l'analyse *a priori*. Mais l'enseignant, après avoir laissé les élèves formuler leur technique, gère la phase de conclusion en évaluant les réponses des élèves et ne leur laisse pas de responsabilité dans la validation des réponses.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de M. B (première partie de sa séquence)

M. B nous a indiqué ce qu'il avait fait avant lors de l'entretien que nous avons eu avant cette séance ainsi que lors de l'entretien final. M. B a proposé deux fois le dénombrement de collections en vrac. Il attache une grande importance à cette phase de « manipulation ».

Activités proposée : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
<u>Variante S_{Dv1} « Combien de bûchettes ? »</u>	Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*	*Non observée.*
Reprise de cette variante avec une autre collection en vrac.	Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*	*Non observée.*

<u>Variante S_{Dv2} « Compte de bûchettes »</u>	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*	*Non observées mais il reste au tableau une synthèse réalisée par l'enseignant au cours de ces séances :* $\overline{m}$ $\overline{c}$ $\overline{d}$ $\overline{u}$  1 millier de bûchettes 1 centaine de bûchettes 1 dizaine de bûchettes 1 bûchette
Exercices	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*	
Exercices	Dénombrer une collection groupée ou partiellement groupée. *Bûchettes.*	
<u>Variante S_{Dv3} « Le jeu des paris » (S1)</u>	Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*	Deux techniques : 1. Dessin de la collection réunie et on compte les milliers, centaines … S'il y a plus de dix centaines on les met dans les milliers. 2. Utilisation du tableau de numération : addition posée dans le tableau, avec retenue éventuelle.

Figure 99 : tableau de déroulement de la première partie de la séquence de M. B

M. B a donc créé des fiches d'exercices à partir de la variante des « comptes de bûchettes ». Pour la fiche d'exercices de dénombrement de collections partiellement groupées (voir en annexe III.2, avant la description de la variante des paris), on peut remarquer que quand il y a plus dix unités à un ordre, c'est toujours pour les unités de plus haut ordre. Ainsi une simple juxtaposition des nombres donne la bonne écriture. Par exemple 12C 5D 4U (collection dessinée) donne 1254 ou encore 12M 2D donne 12020 (juxtaposition avec prise en compte de l'absence d'unités isolées). Nous avons relevé de nombreuses erreurs de la part des élèves qui cherchent à avoir 4 chiffres, mais nous n'avons pas d'information sur ce qui s'est dit dans la classe lors de ce travail.

Bilan sur la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de M. B

Nous n'avons observé que la dernière séance. Il semble que la variante S_{Dv2} (comptes de bûchettes) a permis à M. B d'institutionnaliser le lien entre les unités et leur position dans l'écriture en chiffres, comme en témoigne la trace écrite laissée au tableau. On peut penser que les exercices de dénombrement construits par M. B ont permis aux élèves de s'entraîner à l'utilisation de la technique de juxtaposition. Ceux-ci ont également rencontré des collections partiellement groupées, même si cela reste dans un cas particulier n'amenant pas les élèves à questionner cette technique.
Ces exercices sont toujours dans le contexte des bûchettes et les collections sont toujours dessinées. Les unités de numération n'apparaissent alors que pour nommer les rangs de l'écriture chiffrée.
Pour la séance observée (S_{Dv3}), M. B est d'ailleurs surpris par l'utilisation des unités de numération pour désigner la quantité à dénombrer. Il ne prépare pas les élèves à cette nouvelle désignation en proposant un cas de dénombrement d'une seule collection comme cela est proposé dans la ressource.
M. B s'appuie sur l'exemple donné dans la ressource (l'énoncé est écrit à l'avance au tableau). Des simples juxtapositions de chiffres apparaissent lors de la phase de recherche pour des élèves ayant fait un dessin ou ayant utilisé le tableau de numération. Cependant M. B ne s'appuie pas sur ces erreurs lors de la phase collective pour faire émerger la nécessité des conversions entre unités. L'enjeu semble être uniquement au niveau des techniques : les groupements apparaissent pour la technique « dessin » sans que leur nécessité soit questionnée.

III. Retour sur l'analyse *a priori* de la situation de dénombrement et sur sa description dans la ressource.

Le dénombrement d'une collection en vrac (S_{Dv1}) a été observé dans une seule classe, ce qui ne permet pas de tirer de conséquences pour cette variante ou sa description d'autant plus que l'analyse ne soulève pas d'éléments nouveaux. Rappelons que cette situation est essentielle dans le canevas didactique général pour la dévolution des situations suivantes, mais que conformément à nos prévisions l'observation de la séance nous laisse penser que les élèves ne peuvent pas encore faire le lien entre les types de groupements réalisés et la technique de juxtaposition et qu'en cela la troisième variante (« jeu des paris ») sera essentielle. Mais il faut d'abord que les élèves s'approprient la technique de juxtaposition, ce qui demande de dénombrer des cas variés de collections, notamment avec absence d'unités à certains rangs. En effet dans la séance de Mme A, suite à l'institutionnalisation effectuée les élèves pourraient inférer une simple juxtaposition de chiffres, sans prise en compte de la position des unités correspondantes.

Pour les deux autres variantes (S_{Dv2} et S_{Dv3}), nos analyses de séances nous ont permis d'étudier les adaptations des situations réalisées par les enseignants et certains effets sur les apprentissages des élèves. Nous cherchons maintenant à mettre en relation ces analyses pour revenir sur les choix que nous avons effectués pour la mise en scène de la situation fondamentale et la description des situations dans la ressource. Pour cela, en partant de ces choix, nous indiquerons si les constats effectués dans nos analyses correspondent à nos hypothèses de départ. Le cas échéant il est possible de parler de « décalage » relativement aux effets attendus et faire des hypothèses sur les raisons de ces décalages :

- effet de la mise en scène de la situation fondamentale ;
- effet de la description des situations ;
- effets de niveau supérieur : des connaissances professionnelles didactiques des enseignants, des contraintes institutionnelles, ...

Cela nous amène à dire ce qu'il manque, voire à proposer des améliorations de la mise en scène de la SF, de nouveaux choix de description des situations ou des recommandations possibles pour la formation des enseignants.

Les choix des valeurs des variables didactiques dans la mise en scène de la SF et leur description dans la ressource.

<u>Intérêt du jeu sur les deux variables didactiques de S_{Dv2} pour l'apprentissage des élèves</u>
Les deux variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « nombre d'unités isolées de chaque ordre » (inférieur ou égal à neuf) en particulier la présence/absence d'unités isolées sont apparues essentielles pour l'apprentissage des élèves dans S_{Dv2}. Si l'enseignant institutionnalise très tôt le principe de position, alors que les élèves n'ont pas été confrontés à suffisamment de cas variés, ils risquent d'inférer une simple juxtaposition de chiffres ne tenant pas compte du rang de chaque unité. Or, nous avons pu voir que des élèves faisant cette erreur ont évolué dans leur technique et ne la font plus à la fin de la séance ou dans celle qui suit, grâce à ce jeu sur ces deux variables didactiques. Sa description dans la ressource permet bien aux enseignants de se l'approprier. Ils ne reprennent pas exactement les collections proposées mais tous reprennent la variété des

cas qui est présentée, ce qui témoigne d'une bonne appropriation[117]. Nous n'envisageons donc pas de modification de la ressource sur ce point.

Autres variables didactiques pour mettre en jeu le principe de position.

Les analyses des séances mettent en évidence l'importance de variables didactiques dont nous n'avions pas prévu les effets pour la mise en scène de la SF et que nous n'avions pas décrit dans la ressource : le support donné aux élèves, le temps pour la recherche et le nombre d'unités isolées de chaque ordre.

Nous avons pu constater que pour S_{Dv2}, dans deux classes, pour le premier cas l'enseignant ne donne pas de support pour que les élèves écrivent leur réponse. Cela les amène à utiliser le nom du nombre (il est peu probable qu'ils utilisent une désignation en unités de numération car dans les classes observées cela n'est pas habituel). Le temps qui est laissé aux élèves pour produire l'EC n'est pas utilisé comme une variable didactique par les enseignants pour S_{Dv2}. Laisser un temps court pourrait permettre d'amener les élèves à utiliser la technique de juxtaposition plutôt que le comptage par unités simples[118] (cela était proposé dans la ressource seulement dans le complément de cette situation).

Nous avons aussi constaté que les enseignants proposent souvent des cas avec un petit nombre d'unités au début, comme par exemple 1 millier 1 centaine 3 dizaines 2 unités puis 1 millier 2 centaines 3 unités pour Mme F, 1 millier 2 centaines et 1 unité pour Mme A. Les trois enseignantes commencent par une collection contenant un seul millier.

Ces valeurs des variables didactiques ne facilitent pas le dépassement du comptage en unités simples pour les élèves au profit de la technique de juxtaposition. Cela ne semble pas être un enjeu pour les enseignants et n'est peut-être pas suffisamment mis en avant dans la ressource. Pour la mise en scène de la SF et sa description dans la ressource, la désignation de la quantité de la collection en unités de numération dès cette variante pourrait permettre de rendre plus coûteuse la technique de comptage en unités simples qui nécessiterait de constituer une collection par le dessin ou utilisation des doigts pour chaque unité.

Une difficulté pour montrer aux enseignants l'intérêt de la technique de juxtaposition dans la ressource est le fait que cette technique sera surtout nécessaire pour la variante suivante (S_{Dv3}) lorsque les conversions seront en jeu car le comptage en unités simples devient alors coûteux et surtout, ne met pas en jeu les conversions entre unités.

Dans la ressource il pourrait être possible de sensibiliser davantage les enseignants aux différentes techniques possibles en les décrivant et en indiquant celle qui est visée, en lien avec le principe de position.

Une simplification nécessaire de S_{Dv3}

Pour S_{Dv3} les enseignants proposent des collections ayant plus de dix unités à certains ordres après réunion, sauf pour la deuxième collection de M. B, ce qui témoigne globalement de

---

[117] Les constats de difficultés des élèves dans l'évaluation initiale a pu aussi permettre de renforcer l'importance du jeu sur ces deux variables didactiques.

[118] En jouant sur le temps (et en donnant un support écrit) laissé aux élèves pour trouver la réponse il est possible d'amener les élèves à associer directement le nombre d'unités de chaque ordre à leur position (par juxtaposition). C'est ce que nous avons observé dans la classe de Mme A pour S_{Dv3} quand elle laisse des temps plus courts de recherche aux élèves (que dans la séance précédente), sans leur donner la possibilité de se déplacer et en décrivant la collection uniquement à l'oral (unités dans le désordre). Ces conditions amènent les élèves à trouver un moyen d'écrire une désignation écrite intermédiaire de la quantité de chaque collection (car dans cette variante il y en a deux) au fur et à mesure de la dictée par l'enseignante des différentes unités. Le tableau apparaît alors comme un outil pertinent et les élèves se mettent à l'utiliser massivement alors que dans la séance précédente, malgré les sollicitations de l'enseignante, la plupart continuaient de ne pas l'utiliser. Il serait aussi possible d'écrire en unités de numération (…M …C, etc.) si les élèves avaient été familiarisés à ce type d'écriture.

leur appropriation de la variable « nombre d'unités de chaque ordre » pour mettre en jeu les conversions. Cependant nous avons observé des difficultés liées au choix des nombres-paris comme par exemple des propositions de nombres-paris qui ne correspondent pas aux erreurs prévues. Voici ce que Mme F nous signale lors de l'entretien final : « J'ai perdu le plus pied face à mes élèves. Je ne me sentais pas du tout à l'aise. Je ne maîtrisais pas suffisamment, j'avais peur de ne pas trouver la bonne collection ». Nous avons d'ailleurs constaté que les enseignants reprennent mot pour mot la consigne donnée dans la ressource et l'exemple proposé, ce qui n'était pas le cas pour la variante précédente.
On peut faire l'hypothèse d'une trop grande complexité de cette variante et prévoir des modifications dans le sens d'une simplification. Nous les expliciterons dans le paragraphe suivant en lien avec les connaissances visées chez les élèves.

Les erreurs, les connaissances prévues dans l'analyse a priori et leur description dans la ressource

Du côté des élèves, nous avons parfois eu peu d'informations sur les techniques utilisées car elles peuvent rester invisibles. L'enseignant prend en compte les réponses erronées mais c'est souvent lui qui prend en charge la formulation des techniques lors des phases collectives.

<u>Variante S_{Dv2}</u>
Dans S_{Dv2}, il est possible que beaucoup d'élèves passent par le nom du nombre avant de l'écrire en chiffres : ils utilisent un comptage en unités simples à partir du dessin de la collection (quand elle est présentée ainsi) ou bien un comptage en unités de la numération parlée (un, deux, trois, mille, trois mille, etc.). Il est peu probable qu'ils s'appuient sur un comptage en unités de numération car cet ostensif n'est pas souvent utilisé pour désigner les différentes unités. Nous avons pu voir dans une classe (Mme E) que le fait de décrire la quantité sous la forme « trois boites de mille », etc. amène les élèves à identifier le lien entre le nombre d'unités de chaque ordre et l'écriture en chiffres. On peut donc penser que la description de la quantité, dès cette variante, avec les unités de numération pourrait avoir le même effet et donc d'utiliser un comptage en unités et de faire émerger par les élèves le lien entre ces unités et l'écriture en chiffres sans nécessairement passer par le nom du nombre, ni par le tableau de numération.
Toujours pour S_{Dv2}, les erreurs prévues dans l'analyse *a priori* sont effectivement apparues dans toutes les classes (simple juxtaposition de nombres), parfois dans la traduction du nom du nombre à son écriture. Elles n'étaient pas décrites dans la ressource pour cette variante, ce qui n'a pas empêché les enseignants de les prendre en compte[119]. Ces erreurs sont mises en avant lors des phases collectives (souvent les enseignants commencent par interroger des élèves qui ont fait une erreur) et sont des points d'appui pour les enseignants pour faire émerger le savoir en jeu. Par exemple une enseignante montre la nécessité de l'écriture du chiffre 0 pour marquer l'absence de centaine isolée en appui sur l'erreur d'une élève qui a écrit 245 pour 2M 4D 5U.
En accord avec Coulange et al. (2005) nous pouvons penser que la description des savoirs en jeu dans la ressource a pu faciliter cette prise en compte des erreurs.

[119] Ces erreurs étaient déjà apparues dans l'évaluation des élèves pour les nombres à trois chiffres et nous en avions discuté lors de l'entretien collectif initial avec le groupe de travail.

Variante S_{Dv3} : les erreurs et connaissances prévues

La variante S_{Dv3} (jeu des paris) permet bien l'émergence de deux types de stratégies chez les élèves : réunion des unités de même ordre des deux collections puis dénombrement de la collection obtenue ou bien dénombrement de chaque collection puis addition posée des deux nombres obtenus (éventuellement dans un tableau de numération). On peut par exemple se référer aux techniques utilisées par les élèves dans la classe de M. B, qu'ils explicitent (sans intervention de l'enseignant sur la validité) lors de la phase collective qui suit la recherche. Ces deux stratégies peuvent amener les élèves à faire les erreurs prévues dans l'analyse *a priori*, celles qui sont utilisées pour définir les nombres-paris.

Mais, dans les séances observées (hormis celle de M. B), nous avons remarqué que la répétition de différents cas amenait les élèves à utiliser l'addition posée qui s'avère être plus rapide et moins source d'erreur. En particulier les élèves qui font des erreurs se mettent rapidement à utiliser cette technique. De plus, son efficacité est renforcée quand l'enseignant propose une troisième collection à réunir.

Ces décalages avec ce qui était prévu peuvent être interprétés comme un manque d'indication dans la ressource de l'intérêt de mettre en avant la stratégie de dénombrement après réunion des collections afin de faire émerger la nécessité des conversions. Une première piste consisterait alors à apporter des précisions dans ce sens dans la ressource.

Mais au vu de la difficulté déjà pointée de définition des nombres-paris en fonction des deux collections, nous pensons qu'il serait préférable de modifier la mise en scène de la SF pour cette variante. Nous envisageons deux possibilités :

- aller vers l'ajout de peu d'unités (par exemple ajout de 9C à 4M 5C 8D) ;
- ou bien proposer une collection partiellement groupée (avec plus de dix unités à un seul ordre) comme dans la pré-expérimentation (par exemple 4M 25C 8D).

La définition des nombres paris en serait grandement facilitée pour l'enseignant et cela devrait amener les élèves à utiliser les conversions entre unités. En particulier, la possibilité d'avoir de grandes valeurs pour le nombre d'unités supérieur à dix permet de décourager l'utilisation d'un dessin pour effectuer un comptage en unités simples. Il est possible de prévoir un saut informationnel pour cela.

Variante S_{Dv3} : les nombres-paris et l'enjeu de validation

Pour S_{Dv3}, rappelons que la gestion des phases de conclusion est importante car elle doit permettre de donner un enjeu de validation afin de faire émerger la nécessité des conversions entre unités.

Il apparaît que c'est seulement dans une classe (celle de Mme F) que l'appui sur les erreurs permet d'amener une justification des techniques utilisées, mais toujours sous la responsabilité de l'enseignante.

La possibilité de changer de paris peut permettre de donner un enjeu à cette discussion, puisque les élèves pourront changer d'avis avant la vérification matérielle finale. L'observation des séances de classe a montré que cette possibilité de changer de pari n'a pas été vraiment utilisée par les enseignants.

Le fait de donner des nombres possibles amène les enseignants à prendre en compte les erreurs des élèves lors de la phase de conclusion collective. Cependant, dans trois classes, l'enseignant évalue les réponses des élèves, ce qui tue tout enjeu de validation[120]. Il n'y a

[120] Par exemple, Mme F demande aux élèves leur procédure et les évalue. Mme E fait venir un élève qui n'a pas trouvé la bonne réponse au tableau et demande aux autres de l'aider. Elle évalue ensuite la réponse obtenue et, du coup, ne laisse pas la possibilité de changer de pari non plus. Mme A demande si les élèves souhaitent changer de pari, mais après avoir montré une technique de vérification. De plus, Mme F et Mme A commencent par interroger un élève qui a trouvé une écriture correcte.

que dans une classe (M. B) qu'il n'y a pas d'évaluation immédiate des réponses des élèves car l'enseignant les laisse tous exposer leur technique au tableau. Mais, après cela, il ne les engage pas à discuter de leur validité. Il évalue lui aussi finalement les réponses en montrant comment il fallait faire.
Ce constat peut être lié à des habitudes de fonctionnement des enseignants. Ils laissent peut-être peu de place à l'incertitude des élèves lors des phases collectives. Mais il est aussi possible que ce soit un effet de notre choix de mise en scène de la SF avec la réunion des collections : le fait que l'addition posée permette d'obtenir la réponse ne permet pas de laisser d'incertitude quant à la validité de la réponse puisque cette technique est bien connue des élèves. Elle apparaît donc comme un moyen sûr de vérifier (ou d'obtenir) la réponse. Ainsi quand les enseignants montrent cette façon de faire il n'y a plus d'enjeu de validation. Les modifications préconisées au paragraphe précédent pourraient permettre de ne plus voir apparaître l'addition posée dans cette situation.
Finalement dans la mise en œuvre de S_{Dv3}, les enseignants se contentent, au mieux, de justifier la bonne écriture sans engager les élèves à comprendre pourquoi les autres sont fausses. Du coup, l'ambiguïté de l'écriture avec les deux chiffres au rang des centaines n'est pas questionnée (alors que l'erreur est faite dans toutes les classes) et donc les conversions n'apparaissent pas comme nécessaires pour avoir un chiffre par rang. Cette version 1 de la ressource ne le met pas bien en évidence : par exemple, dans la synthèse de cette variante, il est juste indiqué qu' « il faut finir les groupements ». Il pourrait par exemple être indiqué que l'interprétation par un autre élève d'une écriture comme 31215 (pour 3M 12C 1D 5U) pourrait être comprise comme 3DM 1M 2C 1D 5U ou 31M 2C 1D 5U ou 3M 1C 21D 5U, etc., et que le seul moyen d'avoir une seule interprétation possible est d'écrire un seul chiffre par rang, donc de faire des conversions entre unités si on a plus de dix unités à un certain ordre.
Il pourrait même être possible d'envisager une modification de la mise en scène de la SF en prévoyant une situation de communication avec émetteurs/récepteurs afin de faire émerger cette nécessité d'écriture d'un seul chiffre par rang. Cela pourrait poser des questions pour la mise en œuvre par les enseignants ordinaires car cela pourrait nécessiter un travail de groupes, une organisation de la classe inhabituelle, etc.

Le choix des ostensifs et leur description dans la ressource

<u>Le matériel des bûchettes</u>
Tous les enseignants ont utilisé ce matériel et ont réalisé les groupements dans la première variante, comme cela était proposé dans la ressource. Il est présent dans la classe dans toutes les autres variantes, même si les élèves n'y ont en général pas accès, comme cela était prévu dans la ressource. Il est parfois ressorti ponctuellement par l'enseignant en cas de difficultés d'élèves, notamment quand le principe décimal est en jeu.
Cependant l'utilisation de cet unique contexte pour le dénombrement pose des questions pour la décontextualisation des connaissances (cf. plus loin).

<u>Le nom du nombre</u>
Dans la ressource nous n'avons pas attaché trop d'importance à l'utilisation du nom du nombre. Aucune activité spécifique n'est proposée à ce sujet. Nous proposons juste de nommer les nombres obtenus après dénombrement dans la variante S_{Dv2}.
Nous avons observé dans la mise en œuvre de cette variante, que lors des phases collectives de conclusion, pour écrire les réponses des élèves au tableau, les enseignants demandent aux élèves de dire le nom du nombre qu'ils ont trouvé pour donner leur réponse. Cela peut

donner lieu à des réponses correctes pour des élèves ayant trouvé une écriture incorrecte (« deux-mille-quarante-cinq » pour 245). Cela pourrait témoigner du fait que pour les enseignants il y a une certaine transparence du lien entre le nom du nombre et son écriture (en chiffres), comme l'a déjà constaté Mounier (2010) pour des enseignants de CP. Cela pourrait être un objectif de formation pour les enseignants à différents niveaux de l'école car des questions se posent aussi pour les grands nombres sur ce lien oral/écrit (Blanchard-Laville 1997).
Dans une seule classe (celle de Mme A) les élèves disent leur nombre en dictant chacun des chiffres à l'enseignant (par exemple « un un, un zéro, un six et un zéro »). Cela pourrait être une alternative à l'expression du nom du nombre lors des phases collectives et permettre de centrer, si besoin, la discussion sur les savoirs de la numération écrite. Il est aussi possible, pour dicter un nombre à l'enseignant, de le décrire en unités de numération à l'oral, mais c'est alors l'enseignant qui prend en charge l'écriture des nombres d'unités aux rangs de l'EC.

<u>Les unités de numération dans les premières variantes</u>
Nous avons constaté qu'il n'est pas spontané chez les enseignants d'utiliser les unités de numération comme des unités de compte (pour nommer les groupements). Elles sont plutôt utilisées pour nommer les rangs de l'écriture chiffrée[121] (dans le tableau de numération). Cela peut s'expliquer par les contraintes institutionnelles que nous avions identifiées dans la partie I. Cette version de la ressource ne prend certainement pas assez en compte cette question. L'utilisation des EUN qui est prévue seulement à partir de S_{Dv3} pourrait donc être utile dès les toutes premières variantes S_{Dv1} et S_{Dv2} pour familiariser les enseignants et les élèves avec cette désignation des groupements. Cela a l'avantage de permettre de décrire n'importe quelle collection avec les mêmes mots (un millier de bûchettes, un millier de cubes, etc.) et donc de faciliter la compréhension des unités de numération comme unités de compte.
Cela permet aussi d'éviter d'avoir un vocabulaire spécifique aux groupements matériels et un autre pour les rangs de l'EC, comme nous l'avons observé par exemple dans une classe (Mme A) où l'enseignante utilise les expressions boites de mille, sachets de cent, … pour décrire les groupements mais quand elle parle du rang elle invoque les milliers, etc. Dans les apports pour l'enseignant il est possible de mettre en évidence cette double valence sémiotique des unités de numération (description des groupements et des rangs de l'EC).
Nous avons aussi fait le constat que les enseignants ne s'autorisent pas à parler des « rangs » de l'EC. Pour parler du rang ce sont les unités de numération qui sont utilisées. Mais les enseignants ne disent pas « le rang des milliers » par exemple, mais seulement « les milliers » ou « dans les milliers » ou éventuellement « dans la colonne des milliers » (sous-entendu du tableau de numération). Nous proposons donc de décrire le principe de position en toutes lettres dans la ressource pour rendre plus explicite le lien entre chaque unité et son rang dans l'EC (« les milliers s'écrivent au quatrième rang à partir de la droite »).

[121] Par exemple, lors du rappel de début de séance (S_{Dv2}) sur les groupements constitués lors de la séance précédente, Mme E utilise les mots « boites », « sachets », … pour décrire les groupements. Il en est de même au cours de la séance. Par contre elle utilise les unités de numération pour décrire le nom des rangs dans l'écriture chiffrée dans les moments d'institutionnalisation. On peut penser que, pour cette enseignante, les unités de numération servent à désigner des rangs de l'écriture en chiffres (ou du tableau de numération) mais pas des unités. Du coup, pour les élèves, le lien entre les groupements et leur rang n'est pas facilité par le fait d'avoir deux expressions différentes (« boite de mille » quand il est question des groupements et « millier » quand il est question du rang correspondant à ce groupement).

Les unités de numération dans S_{Dv3}

Dans S_{Dv3}, l’utilisation des unités de numération devient incontournable (du fait de leur valence instrumentale pour les conversions). Nos observations montrent que le fait de décrire les collections dans l’énoncé du problème avec les unités de numération amène :

- la majorité des enseignants à utiliser cet ostensif dans l’énoncé (sauf une enseignante qui continue d’utiliser les mots « boites », « sachets », …)
- les élèves et les enseignants à les utiliser dans les phases collectives (sauf une enseignante). Nous avons même remarqué que les élèves utilisent souvent la désignation en unités de numération. C’est quand l’enseignant veut rappeler les groupements qu’il se met à utiliser les mots boites … pour faire référence au matériel.

Il y a donc une influence importante des ostensifs donnés dans la description de la situation sur leur utilisation en classe.

Lorsque les unités de numération sont utilisées dans la classe pour faire des conversions (valence instrumentale) c’est uniquement à l’oral. Les élèves ne les utilisent pas à l’écrit même si ces écritures sont plus économiques que le dessin pour les élèves qui ne font pas l’addition posée et permettent de laisser une trace écrite des conversions lors d’une phase de synthèse comme cela était indiqué dans la ressource :

Figure 100 : utilisation des unités de numération proposée dans la ressource pour décrire la technique utilisant les conversions

Ce constat pourrait être lié à l’absence des conversions dans les programmes et la plupart des manuels. L’utilisation à l’oral des conversions par les enseignants ne facilite pas l’appropriation de cet ostensif à l’écrit par les élèves. Pour l’écrit, afin d’éviter un coût trop important (comme on le voit dans la figure ci-dessus) il faudrait utiliser des écritures en unités de numération abrégées (M, C, D, U) dans la description des unités de numération faite dans la ressource. Il faut aussi que l’enseignant perçoive l’intérêt de l’utilisation de cet ostensif, ce qui pourrait être plus difficile à faire passer dans une ressource et pourrait plutôt être l’objet d’apports de formation.

Le tableau de numération

Nous avons relevé un effet d’équivalence entre l’écriture du nombre dans le tableau et l’écriture chiffrée. Tout se passe comme si l’écriture dans le tableau était l’écriture en chiffres usuelle. Le passage d’une écriture à l’autre n’est jamais questionné (ce qui est aussi le cas dans la ressource). Quand le nombre est écrit dans le tableau, son écriture en chiffres usuelle (sans le tableau) n’est pas donnée puisque à l’écriture en chiffres se substitue l’écriture dans le tableau de numération. Les enseignants appliquent à ce tableau une règle d’écriture d’un chiffre et d’un seul par colonne, même si cela n’est jamais dit[122]. Un des entretiens illustre bien cela quand l’enseignante explique cette utilisation du tableau de

[122] Cela a juste été formulé par des élèves lors de phases collectives :

- classe de Mme A : « on ne peut pas mettre deux chiffres dans la même case »
- classe de Mme F : « douze centaines ça dépasse »

numération qui permet ensuite de faire des conversions puis conclu que sinon « ça ne s'appellerait pas un tableau de numération ».
Ainsi les enseignants écrivent un 0 dans le tableau de numération en cas d'absence d'unité isolée : Mme F et Mme A montrent même la nécessité du chiffre 0 en utilisant le tableau de numération alors que justement il n'est pas nécessaire dans le tableau puisqu'il y a une colonne pour chaque unité.
Pour S_{Dv3}, les enseignants n'utilisent plus le tableau de numération. Nous ne pouvons pas dire s'il s'agit d'un effet de la ressource ou bien si cela est lié au fait qu'il y a un nombre à deux chiffres pour une unité et que le tableau n'est pas utilisé pour faire des conversions.
On peut penser que le peu d'informations proposées par la ressource à ce sujet ne permet pas aux enseignants de se détacher de leur utilisation habituelle du tableau de numération. Comme pour les unités de numération, cela pourrait faire l'objet d'apports en formation d'enseignants. Le tableau peut être vu sous sa valence sémiotique pour institutionnaliser le principe de position (cf. plus loin) mais aussi sous sa valence instrumentale pour dénombrer une collection, avec les différentes variantes d'organisation de la collection. Dans le cas d'absence d'unité isolée à un certain ordre si on écrit un zéro dans le tableau c'est pour pouvoir enlever le tableau et obtenir l'EC (mais l'écriture sans zéro est aussi valable dans le tableau). Dans le cas d'unités en nombre supérieur à dix à un certain ordre, il est possible d'écrire des équivalences d'écritures dans le tableau de numération pour se ramener à au plus un chiffre par rang. Il est possible de garder la trace de ces changements d'écritures en écrivant sur plusieurs lignes du tableau. Tout comme l'EUN, l'écriture d'un nombre dans le tableau de numération n'est pas unique.

Les savoirs de la numération et leur description dans la ressource.

Les savoirs institutionnalisés dans S_{Dv2}

Dans S_{Dv2}, le principe de position est institutionnalisé dans toutes les classes, conformément aux *éléments de synthèse* proposés dans la ressource. Ce savoir apparaît sous la forme du tableau de numération, ce qui semble être un effet de la ressource. La formulation orale ou écrite en texte du lien entre chaque unité et sa position dans l'écriture en chiffres n'apparaît pas dans les classes observées. Il n'est jamais dit par exemple que les milliers s'écrivent au quatrième rang ou bien au rang situé immédiatement à gauche de celui des centaines. Cela reste implicite car toujours pris en charge par le tableau. La formulation du principe de position par le tableau de numération dans la ressource pourrait donc être renforcée (voire remplacée) par une description en texte de ce savoir.
Cela aurait aussi l'avantage de montrer une formulation décontextualisée aux enseignants (avec les unités de numération) car nous avons remarqué que les formulations utilisées peuvent rester très contextualisées au matériel utilisé. Par exemple, une enseignante conclut sa séance en expliquant que dans 2405 le 2 « correspond au nombre de boites ».

Les savoirs institutionnalisés dans S_{Dv3}

Dans S_{Dv3} l'institutionnalisation du principe décimal ne se fait pas dans toutes les classes, contrairement au principe de position dans S_{Dv2}. Deux enseignants n'institutionnalisent pas le lien entre les deux techniques utilisées par les élèves, en appui sur le principe décimal qui est le savoir pointé dans la ressource. Cela pourrait être lié aux insuffisances de S_{Dv3} pour mettre en jeu les conversions (des modifications ont déjà été proposées) mais aussi au manque de visibilité du principe décimal dans les programmes et certains manuels (cf. partie I).

Pourtant, les relations entre les différents groupements apparaissent plus ou moins dans les classes lors des phases collectives de conclusion, mais restent souvent contextualisées aux groupements de la collection de bûchettes (ce qui ne permet pas de faire des conversions entre unités) et presqu'exclusivement sous la responsabilité de l'enseignant.
Rappelons que l'enjeu de S_{Dv3} est d'amener les élèves à prendre en compte la troisième condition de la technique de juxtaposition (présence de nombres à un chiffre pour chaque unité), ce qui entraîne la nécessité de faire des conversions. Or cela n'est jamais évoqué dans les classes. Tout se passe comme si on construisait une nouvelle technique. C'est l'articulation entre les variantes dans la ressource qui est peut-être à questionner. L'élaboration de la technique de juxtaposition progressive en tenant compte des trois conditions n'est pas mise explicitement en lien avec le jeu sur les variables didactiques. D'ailleurs S_{Dv2} et S_{Dv3} ne sont pas présentées comme deux variantes d'une même situation de dénombrement mais comme deux situations distinctes. Cela peut amener les enseignants à les mettre en jeu sans percevoir l'intérêt de leur enchaînement. Il serait peut-être plus pertinent de dire aux enseignants qu'il s'agit d'une situation et ce que l'on vise tout en précisant que ce sera atteint en deux étapes.

<u>Les exercices d'entraînement, le travail de conversion entre unités</u>
Concernant les exercices proposés aux élèves, nous avons pointé dans l'analyse *a priori* de la situation de dénombrement l'intérêt de donner l'occasion aux élèves d'utiliser les savoir-faire construits ici pour dénombrer une autre collection. Nous avons proposé dans la ressource la situation complémentaire de dénombrement de carreaux de papier millimétré (où il est possible de trouver une organisation par groupements de dix successifs à partir du quadrillage), mais aucun enseignant du groupe de travail ne l'a utilisée (ni d'ailleurs la deuxième situation complémentaire de dénombrement d'une collection organisée de trombones représentée sur une fiche). Il est possible que le fait d'avoir proposé des « situations-clés » dans la ressource ait amené les enseignants de ce groupe à ne traiter que ces situations. Et le fait que toutes ces situations (hormis la dernière) soient toutes dans le contexte des bûchettes a pu les amener à ne traiter que ce contexte, même pour les exercices proposés entre les situations. Une modification possible de la ressource consiste donc à varier les contextes soit dans les variantes en proposant de dénombrer par exemple des collections totalement groupées (pour S_{Dv2}) de bûchettes, de cubes, etc. soit dans des exercices d'entraînement utilisant des contextes variés et associés plus explicitement à ces variantes.
Pour entraîner les connaissances construites dans S_{Dv3} et préparer le travail des commandes, il est important que les élèves fassent des conversions entre unités (hors contexte, par exemple 40C = … M). Or les séquences proposées par les enseignants du groupe de travail nous permettent de constater que seuls deux enseignants proposent un exercice mettant en jeu des conversions après cette séance. Il est proposé dans le contexte des bûchettes (dénombrement de collections partiellement groupées comme cela est proposé dans la ressource en complément de cette variante). Aucun exercice de conversions hors contexte n'est proposé avant de passer à la situation de commande, ce qui pourrait être une conséquence des contraintes institutionnelles identifiées en partie I, mais aussi de cette version de la ressource qui ne met pas suffisamment en évidence ce travail. Il faudrait donner une meilleure visibilité aux exercices de conversions entre unités à faire après la variante S_{Dv3}.

Chapitre 10

La situation de commande d'une collection et sa mise en œuvre

Comme pour le chapitre précédent, nous commençons par une analyse *a priori* de la situation de commande et en indiquant des éléments de description de cette situation dans la ressource (§I). Puis, nous effectuons une analyse des déroulements dans chacune des classes des enseignants du groupe de travail (§II). Nous terminons en revenant sur la situation et sa description dans la ressource en tenant compte de nos analyses des classes. Cela permet d'envisager des modifications possibles pour la mise en scène de la SF ou sa description dans la ressource (§III).

I. Analyse *a priori* de la situation S_C de commande d'une collection et éléments de description de cette situation dans la ressource

Cette situation est une mise en scène des jeux 2 et 4 de la situation fondamentale. La donnée initiale de la situation est un *nombre écrit en chiffres*. Le problème général est de constituer une collection ayant ce nombre pour cardinal. Pour cela l'élève doit passer une *commande* à un *marchand* qui possède des objets isolés ainsi que différents groupements d'objets : en dizaines, en centaines et en milliers. L'élève doit produire une

écriture en unités de numération pour réaliser sa commande. Cette écriture n'est pas unique (sauf sous certaines contraintes). La collection d'objets à constituer est évoquée mais n'est pas laissée à disposition de l'élève.
Cette situation vise un travail voire un réinvestissement des conversions afin de produire différentes décompositions d'un nombre en unités de numération. Elle est proposée selon deux variantes dans la ressource : « marchand de bûchettes » (S_{Cv1}) et « commandes de timbres » (S_{Cv2}).

Connaissances supposées des élèves

On suppose chez les élèves les mêmes connaissances que celles décrites dans l'analyse *a priori* de la situation de dénombrement ainsi que sur les nombres supérieurs à mille : dénombrement d'une collection (ou plusieurs) de plus de mille éléments (mais moins de dix-mille), association nom/écriture et conversions.

Une variable didactique essentielle : le stock *du marchand*

La principale variable didactique de la situation concerne le nombre de groupements (de chaque ordre) disponibles chez le marchand, ce que nous appelons le *stock* du marchand.
Nous considérons par exemple le cas de la commande de 2615 éléments.
S'il n'y a aucune contrainte sur ce stock, alors il est possible de produire de nombreuses écritures différentes en unités de numération. Pour exemple pour avoir une collection de 2615 éléments il est possible de commander 2615U ou 20C 615U, etc. Mais il est aussi possible de faire une décomposition canonique : 2M 6C 1D 5U. Nous considèrerons donc plutôt des cas avec des contraintes sur le stock pour mettre en jeu des conversions. Lorsqu'il n'y a pas de contrainte, le problème peut être de déterminer différentes commandes possibles, ce qui permet de dépasser la seule décomposition canonique. Dans la ressource cela est proposé en exercice complémentaire suite à la première variante.
Il est possible de rendre nécessaire le recours à une décomposition canonique s'il y a strictement moins de dix unités de chaque ordre (la seule commande possible de 2615 éléments avec un stock de 9 milliers, 9 centaines, … est 2M 6C 1D 5U). Mais on peut aussi rendre impossible ce type de commande. Il suffit d'enlever un ordre d'unité dans le stock[123].
Cela met alors en jeu des conversions entre unités car il est alors nécessaire d'utiliser les unités d'ordre(s) inférieur(s) pour livrer la quantité correspondant à cette unité (sauf s'il y a un 0 dans l'écriture chiffrée au rang correspondant à cette unité). Par exemple pour une commande de 2615 éléments avec un stock ne contenant pas de millier mais suffisamment de centaines, il est possible d'utiliser 20 centaines pour faire deux milliers et donc commander 26C 1D 5U.
Il est aussi possible d'avoir plusieurs ordres d'unités non disponibles. Dans la première variante, nous avons choisi de travailler principalement les relations entre deux unités successives. Cela nous amène donc par exemple à ne pas proposer l'absence d'unités de deux ordres consécutifs (absence de millier et centaine qui amènerait à commander des dizaines pour avoir des milliers). Cela est proposé seulement dans la deuxième variante où l'enjeu est de faire des conversions de milliers en centaines ainsi que de milliers et centaines en dizaines.

[123] Ou, plus généralement, de mettre, pour un ordre d'unité donné, un nombre inférieur d'unités que le nombre d'unités isolées correspondant à la décomposition canonique.

Avant d'étudier plus en détail ces variantes nous allons décrire différentes techniques possibles dans la situation générale de commande de collections.

Les techniques possibles

Nous envisageons deux types de stratégies (conversion et comptage) pour cette situation avec des variantes pour chacune en fonction de l'ostensif utilisé. Pour chacune nous identifions différentes techniques possibles.
Nous prenons toujours l'exemple d'une collection à commander de 2615 éléments. Nous considérons le cas où il n'y a pas de millier dans le stock et où il y a 30 centaines, 9 dizaines et 9 unités afin de ne permettre qu'une seule écriture en unités de numération, ce qui simplifie l'étude. Nous expliquerons rapidement ensuite comment adapter ces techniques à d'autres types de contraintes sur le stock.

<u>Les stratégies de conversion/groupement</u>
Elles dépendent de l'ostensif principalement utilisé pour passer de l'écriture en chiffres à l'écriture en unités.

Troncature à partir de l'EC	**Conversion en unités de numération**	**Conversion en EAC ou EPDC**	**Groupements ou dégroupements à partir d'un dessin des unités**
2615 = 26C 1D 5U par troncature : lecture du nombre de centaines en coupant l'EC au rang des centaines.	2615 = 2M 6C 1D 5U 2M = 20C 2615 = 26C 1D 5U	2615 = 2000 + 600 + 10 + 5. 2000 = 20×100[124] 2615 = 26×100 + 1×10 + 5×1. Ou addition itérée de 100 : 2000 = 100 + … + 100 (20 fois), …	Dessin de 2M 6C 1D 5U puis dégroupements de 2M en 20C. Comptage des centaines, dizaines, unités.
Technologie : principe de position (identifier les rangs des centaines, dizaines, unités) et relations entre unités (2M = 20C).	Technologie : principe de position (décomposition canonique) puis relations entre unités (conversion 2M = 20C).	Technologie : principe de position (décomposition canonique) puis pour 2000 = 20×100 : relations entre unités OU règle de calcul (multiplier par 100 revient à écrire deux zéros à droite).	Technologie : principe de position (décomposition canonique) puis relations entre groupements (2M = 20C).

Figure 101 : les stratégies de conversion/groupement

On notera que la deuxième technique peut être considérée comme une technologie pour toutes les autres.
Pour les trois dernières techniques, il est aussi possible de faire la conversion (ou le groupement) dans le sens inverse : chercher combien de centaines il faut pour faire 2 milliers. Par exemple après avoir trouvé le nombre d'unités simples et de dizaines l'élève peut dessiner des centaines et faire des groupements par dix de façon à avoir 2M et 6C.

[124] Ou bien 2000 = 1000 + 1000 et 1000 = 100 + 100 + … + 100 (dix fois) donc 2000 = 100 + 100 + … + 100 (vingt fois).

Regardons comment ces techniques peuvent s'adapter à d'autres contraintes, en considérant deux autres exemples, toujours pour une commande de 2615 éléments :

- avec un stock de 1M, 20C, 9D, 9U l'élève peut enlever 1M du nombre 2615 et appliquer les techniques précédentes ;
- avec un stock de 300D, 9U l'élève peut appliquer aussi les techniques précédentes mais en s'appuyant sur la relation entre millier et dizaine : soit directement, soit en passant par l'intermédiaire des centaines.

Considérons maintenant les stratégies de comptage en unités simples.

<u>Les stratégies de comptage en unités simples</u>

Elles dépendent aussi de l'ostensif utilisé pour décrire les unités.

Comptage en unités simples à partir d'un dessin	**Comptage en unités simples à partir d'EAC ou EPDC**
2615 = deux-mille-six-cent-quinze. Puis dessin de paquets de cent et comptage au fur et à mesure jusqu'à deux-mille-six-cent. Idem pour dix et quinze. Comptage puis écriture en chiffres du nombre de paquets de cent (26), de dix (1) et d'éléments à l'unité (5).	2615 = deux-mille-six-cent-quinze. Puis addition itérée de 100 : 100 + 100 + 100 … et comptage au fur et à mesure jusqu'à deux-mille-six-cent. Idem pour 10 et 1. Comptage puis écriture en chiffres du nombre de paquets de 100 (26), de 10 (1) et de 1 (5).
Technologie : lien écrit/oral et comptine orale de cent en cent, dix en dix, un en un.	Technologie : lien écrit/oral et comptine orale de cent en cent, dix en dix, un en un.

Figure 102 : les stratégies de comptage en unités simples

Ces techniques ne mettent pas en jeu le savoir visé dans la situation puisqu'elles ne s'appuient pas sur les relations entre unités.

Elles peuvent aussi s'adapter à d'autres contraintes sur le stock mais deviennent très coûteuses quand une relation entre deux unités non successives est en jeu (par exemple 2615 avec un stock de 300D, 9U) puisqu'il y a alors au moins cent unités d'un certain ordre à compter.

Une autre variable didactique : la taille des nombres

La présentation de ces deux stratégies nous amène à évoquer une autre variable didactique de la situation : la taille des nombres à commander, c'est-à-dire le nombre de milliers (puisque nous considérons des nombres supérieurs à mille). En effet, le comptage est une stratégie plus coûteuse que la conversion entre unités ou la troncature et la différence de coût entre les deux devient plus importante à mesure que la taille des nombres augmente.

Le jeu sur cette variable didactique peut donc être un moyen de faire évoluer la stratégie utilisée par les élèves. Un saut informationnel peut être envisagé pour amener les élèves à utiliser les conversions entre unités.

Nous allons maintenant présenter les deux variantes de la situation de commande de collection.

Variante S_{Cv1} du « marchand de bûchettes »

Cette variante s'appuie sur le contexte des « bûchettes » dont une grande collection a été dénombrée lors de la situation de dénombrement. L'enseignant joue le rôle d'un marchand de bûchettes : il a un stock de bûchettes à sa disposition, groupées en dizaines, centaines et milliers.
L'élève n'a pas accès à cette collection : il doit écrire une commande de bûchettes pour avoir le nombre donné au départ (en chiffres). Pour cela il dispose d'un *bon de commande*[125] dont l'exemple suivant est donné dans la ressource :

... milliers de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

Figure 103 : bon de commande présenté dans la ressource

<u>Le milieu</u> de cette variante contient le nombre à commander (écrit en chiffres) et le bon de commande pour écrire la réponse. Dans la ressource, il est indiqué que les unités peuvent être données dans le désordre sur le bon de commande.
Le matériel est présent dans la classe mais il n'est pas laissé à disposition des élèves pendant la recherche. Il pourra servir à effectuer une vérification des commandes trouvées en dernier ressort (après échanges sur la validité).
<u>L'enjeu de la situation</u> est de faire utiliser les relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs pour déterminer différentes décompositions d'un nombre. Cependant, dans cette première variante, nous limitons les conversions au lien millier/centaine. Voici un exemple proposé dans la ressource : « il nous faut encore 2615 bûchettes mais l'enseignant n'a plus de milliers de bûchettes. Que faut-il commander ? »[126].
De plus, le stock n'a pas toujours une unité absente : il peut aussi y avoir un nombre d'unités insuffisant pour pouvoir utiliser une décomposition polynomiale. C'est le lien entre le nombre de départ et le nombre d'unités de chaque ordre qui est la variable didactique utilisée. Voici l'exemple proposé dans la ressource : « il n'y a plus qu'un seul millier de bûchettes. Les élèves doivent commander 3167 bûchettes. Que faut-il commander ? ». L'intérêt de ce type de stock est de ne pas amener les élèves à automatiser trop tôt une technique de troncature. Nous faisons l'hypothèse que le fait d'avoir des stocks variés devrait les amener à utiliser les conversions entre unités afin de s'adapter à tous les cas. Dans le cas d'un travail avec seulement absence de milliers, la répétition de plusieurs cas devrait amener l'élève à utiliser la technique de troncature, avec peut-être un risque pour certains élèves de ne pas se l'approprier en lien avec les relations entre unités. C'est pour cela que le travail visant cette technique de troncature sera l'objet seulement de la deuxième variante.
Signalons enfin, concernant les variables didactiques, qu'il est proposé dans la ressource de limiter le nombre d'unités disponibles de chaque ordre « pour que les élèves ne commandent pas systématiquement des bûchettes à l'unité ! (par exemple pour 2615 bûchettes, il faut 2615 bûchettes à l'unité) ».

[125] Idée inspirée par l'activité des « ziglotrons » du manuel Cap Maths CP (Hatier, 2009), avec des commandes pour des nombres inférieurs à cent (mais sans unités de numération).
[126] Notons que, dans la consigne, le verbe falloir pourrait laisser penser qu'il n'y a qu'une seule réponse. Il nous semblerait maintenant plus judicieux d'utiliser le verbe pouvoir (« que peut-on commander ? »).

Les élèves peuvent utiliser les techniques présentées dans l'analyse *a priori* globale de la situation de commande. Il y a donc deux stratégies : faire des conversions entre unités ou un comptage oral en unités simples. Nous allons nous intéresser aux erreurs envisageables dans cette variante pour les cas avec contraintes, ainsi qu'aux rétroactions possibles du milieu.
La principale erreur nous semble celle consistant à écrire des nombres à un chiffre pour chaque unité (comme pour une décomposition canonique) : l'impossibilité d'écrire des milliers pourrait alors amener l'élève à ne pas prendre en compte les milliers. Il est aussi possible qu'il ajoute les milliers aux centaines isolées. Par exemple pour la commande de 2615 bûchettes (stock : pas de millier), l'élève pourrait décomposer 2615 en 2M 6C 1D 5U puis écrire une commande de 6C 1D 5U ou 8C 1D 5U. Il peut aussi ne pas tenir compte de la contrainte et écrire 2M 6C 1D 5U. Ces erreurs sont liées à la difficulté de percevoir la possibilité de faire des milliers avec des centaines et à une prégnance trop importante de la décomposition canonique. Pour la dernière erreur il n'est pas possible d'écrire ce nombre sur le bon de commande si, sur celui-ci, il y a déjà un 0 au rang des milliers, comme cela est proposé dans la ressource (un exemple de tel bon de commande est donné) ou bien si les milliers n'apparaissent pas ou s'ils sont rayés. Cela fournit donc une rétroaction du milieu. Pour les deux autres erreurs, une fois la commande écrite dans le bon de commande, si les unités sont données dans l'ordre conventionnel sur ce bon de commande, l'alignement vertical des chiffres donne le nombre total d'éléments, ce qui peut faciliter la vérification par dénombrement de l'élève. Cependant, les élèves ont la responsabilité d'effectuer ce contrôle car rien dans la situation ne le rend nécessaire même si le fait d'avoir travaillé le dénombrement de collections (groupées ou partiellement groupées) dans la situation précédente le rend possible. Travailler en groupe peut alors permettre des rétroactions du milieu si les élèves ne trouvent pas la même réponse. Cette possibilité de vérification peut aussi intervenir dans une discussion (collective ou en groupe) sur la validité des réponses trouvées. Toutefois, en fonction du stock du marchand, il est possible d'avoir des commandes différentes mais justes quand même.
Si l'élève fait des erreurs liées à la conversion ou au comptage en unités simples, il peut obtenir un nombre à deux chiffres à l'ordre des centaines même si ce nombre est erroné (par exemple 23C 1D 5U). La vérification met alors en jeu un dénombrement d'une collection partiellement groupée, qui a aussi fait l'objet d'un travail lors de la situation précédente. Ces connaissances pourraient être plus ou moins disponibles chez les élèves en fonction du travail effectué dans la situation de dénombrement.
Enfin, dans le cas d'une commande telle que 3167 bûchettes, avec seulement 1 millier dans le stock, les mêmes types d'erreurs sont envisageables. Par exemple, l'élève peut ne prendre en compte que le millier disponible (1M 1C 6D 7U) ou ajouter les deux autres milliers aux centaines (1M 3C 6D 7U). On retrouve les mêmes rétroactions du milieu et critères de validité.
Les erreurs possibles ne sont pas décrites dans la ressource (contrairement à la situation de dénombrement où les erreurs ont une place importante dans la description des situations).

Apports de la ressource et questions pour la mise en œuvre par l'enseignant.
Il est proposé dans la ressource de donner le problème « sans contrainte » en début de séance. Il peut se traiter par une décomposition canonique et ne devrait pas poser de difficulté aux élèves. Le but est de leur permettre de s'approprier le principe des commandes et l'utilisation du bon de commande. Cela est indiqué dans la ressource.
Des exemples avec des contraintes variées sont proposés (ils ont déjà été cités ci-dessus) et les variables didactiques sont précisées en lien avec l'enjeu de la situation (les conversions). Il n'est pas explicite dans la ressource que l'on ne vise pas une automatisation des

conversions par la technique de troncature pour le moment. L'enseignant peut inférer cela à partir des exemples proposés.
Dans la conception des différents cas, l'enseignant pourra fixer le nombre d'unités disponibles pour chaque ordre (comme cela est proposé dans la ressource) pour ne pas avoir par exemple de commandes uniquement en unités simples.
Comme pour les autres situations, rien n'est précisé concernant l'organisation de la classe lors de la phase de recherche (travail individuel ou en groupes ou individuel puis groupes). Rien n'est non plus indiqué concernant un découpage particulier de la séance.
Pour la phase collective de conclusion, la ressource indique deux possibilités de vérification sans matériel (dont il est proposé une utilisation éventuelle seulement à la fin) : en appui sur les unités de numération (« 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier ») ou sur le tableau de numération. Il se peut que l'écriture en unités de numération proposée dans la ressource est coûteuse et semble plus adaptée à l'oral qu'à l'écrit où il faudrait aller vers une écriture abrégée (avec M, C, D, U).
Pour que les élèves aient une certaine responsabilité dans cette phase il faudrait donc que l'enseignant la gère en suscitant le doute quant à la validité de chaque proposition. Il ne suffit donc pas de recueillir les différentes propositions des élèves et de les laisser échanger sur leur validité, comme cela est indiqué dans la ressource. Les élèves peuvent utiliser les connaissances construites dans la situation précédente pour vérifier les réponses (dénombrement d'une collection totalement ou partiellement groupée).
Enfin pour l'institutionnalisation des savoirs en jeu, un tableau récapitulatif de différentes commandes mettant en évidence les conversions effectuées est proposé dans la ressource. Le principe décimal est aussi rappelé. Le contexte n'est plus évoqué dans ce tableau.

Voici différents exemples de **commandes avec contraintes**.

Contraintes	Procédures	Savoir en jeu
Il n'y a **plus de millier**	**Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines** : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités	*Aspect décimal de la numération* *10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.* *1 dizaine = 10 unités,* *1 centaine = 10 dizaines,* *donc 1 centaine = 100 unités* *1 millier = 10 centaines,* *donc 1 millier = 100 dizaines* *et 1 millier = 1000 unités*
Il n'y a **plus de centaine**	**Pour obtenir les 6 centaines de 2621 il faut commander 60 dizaines** : 2 milliers + 61 dizaines + 5 unités	
Il n'y a **plus de millier ni de dizaine**	**Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines et pour les 2 dizaines il faut 20 unités** : 26 centaines + 21 unités	

Figure 104 : Tableau de synthèse proposé dans la ressource

Nous allons maintenant passer à la variante suivante en mettant principalement en évidence les éléments qui diffèrent de celle-ci.

La variante S_{Cv2} des « commandes de timbres »

Cette variante se différencie de la précédente par le contexte (timbres), par l'absence des unités de numération dans la consigne mais aussi par le fait que le problème proposé revient à chercher le « nombre de » centaines ou dizaines dans un nombre à quatre chiffres en appui sur les relations entre milliers/centaines et milliers/dizaines. C'est l'enjeu de cette variante.

Le problème pour l'élève est de commander une quantité de timbres écrite en chiffres. Les timbres sont vendus à l'unité, par paquets de dix et plaques de cent. Voici un exemple de commande proposé dans la ressource : « Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ? ».
Deux types de commande peuvent être réalisés :

- commander exactement le nombre de timbres demandé, donc le plus possible de plaques de 100 et les timbres restants pour avoir une commande la plus économique possible, ce qui revient à chercher une valeur approchée à la centaine par défaut pour le nombre de centaines (26 plaques de 100, 4 carnets de 10 et 7 timbres à l'unité pour l'exemple précédent) ;
- ne commander que des plaques, ce qui revient à chercher une valeur approchée à la centaine par excès pour le nombre de centaines pour avoir la commande la plus économique.

Cela est indiqué dans la ressource où il est indiqué que le choix du type de commande est de la responsabilité de l'enseignant.
Le milieu contient le nombre de timbres à commander (écriture en chiffres) et les unités à commander. Les différents types de groupements avec les timbres peuvent être montrés aux élèves mais ce matériel n'est pas à leur disposition. Une fiche toute prête représentant ces différents groupements est proposée dans la ressource afin de faciliter le travail de l'enseignant.
Les élèves peuvent utiliser les deux types de stratégies présentées dans l'analyse *a priori* globale de la situation de commande (et les différentes techniques correspondantes).
On retrouve le même type d'erreur que dans la variante précédente et les élèves peuvent exercer le même type de contrôle sur leur réponse.
Les élèves peuvent faire le lien avec la variante précédente s'ils comprennent que le problème revient à chercher le nombre de centaines ou de dizaines dans un nombre à quatre chiffres. Une difficulté pour faire ce lien peut venir du changement de contexte et de description des unités.

<u>Apports de la ressource et discussion sur la mise en œuvre par l'enseignant.</u>
Pour l'appropriation du problème, il est indiqué dans la ressource que l'enseignant présentera les différents types de groupements (en appui sur la fiche proposée). Par rapport à la variante précédente (mais aussi à la situation de dénombrement), il n'est pas proposé ici de traiter un premier cas ne posant pas de difficulté avant de poser le problème (pour la dévolution).
Ensuite, pour le problème, plusieurs exemples sont proposés (deux pour des commandes de plaques de 100 et deux autres pour des commandes de carnets de 10).
La difficulté liée au changement de contexte est indiquée tout en signalant qu'il est « important de leur laisser la responsabilité du lien avec le contexte des bûchettes : l'enseignant évitera donc de faire ce lien lors de la présentation de la situation. Il pourra être fait dans la mise en commun ou la synthèse ».
Les mêmes possibilités de vérification que pour la variante précédente sont indiquées.
Pour l'institutionnalisation il est proposé dans la ressource de faire le bilan sur la manière de trouver différentes décompositions d'un nombre. Le lien entre le nombre de centaines, par exemple, et la technique de troncature est mis en évidence en entourant les chiffres correspondants dans l'écriture chiffrée :

Décompositions	Relations entre unités
M C D U $\boxed{2}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{5}$ c'est 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités	
M C D U $\boxed{2\ 6}\ \boxed{1}\ \boxed{5}$ c'est 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités	2 milliers = 20 centaines
M C D U $\boxed{2\ 6}\ \boxed{1\ 5}$ c'est 26 centaines + 15 unités	2 milliers = 20 centaines 1 dizaine = 10 unités
M C D U $\boxed{2}\ \boxed{6\ 1}\ \boxed{5}$ c'est 2 milliers + 61 dizaines + 5 unités	6 centaines = 60 dizaines
etc.	

Figure 105 : Tableau de synthèse proposé dans la ressource

La colonne de droite fournit les éléments technologiques correspondant au découpage de l'écriture chiffrée effectué.
Enfin dans les compléments il est proposé de poser le même type de problème dans des contextes de monnaie (billets de 100 euros, 10 euros, …), de longueur (bandes de 10, 100 cm), etc.

II. Analyse de la mise en œuvre de la situation de commande

II.1 Analyse de la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme A

Dans la classe de Mme A nous n'avons observé que la variante S_{Cv1}.

Variante S_{Cv1} « Marchand de bûchettes »

<u>Description du déroulement</u>
En annexe III.3.

<u>Les choix de Mme A</u>
Après une reprise du « jeu des paris » (dénombrer une réunion de collection) pour que les élèves créent leurs propres paris qu'ils proposeront ensuite aux autres élèves, Mme A propose le problème de commande de collections.
Elle dit le nombre, sans l'écrire au tableau. Elle l'écrit seulement après la recherche, au début de la phase de conclusion. Elle demande ce qu'il faut commander en boites (pour le premier cas), en sachets, en paquets de dix et en bûchettes toutes seules. Elle ne donne pas de bon de commande comme cela était proposé dans la ressource.
Du coup les unités de numération ne sont pas dans le milieu. Cela ne favorise donc pas un travail avec cet ostensif pour faire les conversions.
Le fait de ne donner le nombre qu'à l'oral peut amener les élèves à ne pas partir de l'écriture en chiffres mais du nom du nombre : il peut alors associer directement les unités qui correspondent. Par exemple pour « deux-mille-six-cent-quinze » l'élève peut se dire que

deux-mille c'est deux boites, etc. Pour les cas où une conversion est en jeu cela n'est plus possible (car on ne peut pas dire « deux-mille » c'est « vingt-cents ») : il est alors possible d'utiliser les unités de numération pour faire les conversions (deux milliers ou deux-mille c'est vingt centaines) ou bien les expressions « boites de mille », « sachets de cent », etc. (deux boites de mille c'est vingt sachets de cent). Cette dernière façon est moins générale puisqu'elle ne s'applique qu'à ce contexte.

Elle distribue une feuille de recherche aux élèves, ce qui peut leur permettre de faire un dessin par exemple.

Au niveau des nombres à commander, Mme A utilise des nombres ayant un nombre de milliers pas trop grand. On peut penser que c'est pour utiliser la possibilité de montrer les boites correspondantes. La taille des nombres augmente au fur et à mesure des commandes. Cela permet aux élèves de dessiner les collections au début, tout en rendant de plus en plus coûteux ce dessin. Elle joue aussi sur la présence/absence de 0 dans l'écriture en chiffres. Pour les contraintes, elle n'utilise que la contrainte « pas de boite de mille » (dans cette séance), ce qui lui permet de centrer l'enjeu sur la recherche du nombre de centaines dans un nombre supérieur à mille.

Mme A fait chercher chaque commande individuellement et organise une phase collective de conclusion après chaque commande avant de passer à la commande suivante. Elle recueille systématiquement toutes les réponses des élèves dans les phases collectives afin de procéder à leur vérification.

<u>Tableau synoptique</u>

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases. Organisation</th><th>Techniques et <u>éléments technologiques</u></th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="23">Dénombrer une réunion de deux collections. (Construire un pari …)</td><td rowspan="3">Reprise de la situation précédente. Collectif</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="17">Recherche. Par groupes de 2 ou 3</td><td rowspan="17"></td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">Présentation du travail effectué. Collectif</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="6">Commander une collection (décomposer un nombre) : commande de « deux-mille-six-</td><td rowspan="3">Présentation du problème. Collectif</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">Recherche. Individuel</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
</table>

30 31 32 33 34 35	cent-quinze bûchettes ».	Conclusion. Collectif	*Des techniques sont formulées par des élèves*[127].
36 37	Commande de « trois-mille-cent-soixante-sept bûchettes ». Pas de boite de mille.	Présentation du problème. Collectif	
38 39 40 41 42		Recherche. Individuel	
43 44 45 46 47 48 49 50		Conclusion. Collectif	Technique de vérification : trente-et-un sachets ça fait trois-mille-cent car il y a dix sachets dans une boite donc trente sachets dans trois boites. Pour les erreurs : trois-cents sachets c'est trop car dans une boite on a dix sachets, dans trois boites on a trois sachets et pas trois-cents. Douze sachets ça fait mille-deux-cent car il y a dix sachets dans une boite.
51	Commande de « quatre-mille-vingt bûchettes ». Pas de boite de mille.	Présentation. Coll.	
52 53 54		Recherche. Individuel	
55 56 57 58 59 1h00 1h01 1h02 1h03 1h04 1h05 1h06		Conclusion. Collectif	Technique pour le nombre de centaines : pour les quatre boites on prend quarante sachets. Il reste deux paquets de dix. Technique pour le nombre de dizaines : dans dix sachets il y a cent paquets de dix, donc dans quarante sachets il y a quatre-cents paquets de dix. Technique de vérification pour des réponses erronées : douze sachets ça fait une boite et deux sachets donc mille-deux-cent. Pour 40 sachets et 20 paquets : dans 20 paquets il y a 200 bûchettes, donc quatre-mille-deux-cent.

Figure 106 : tableau synoptique du déroulement de S_{Cv1}, classe de Mme A

Analyse du déroulement

Nous ne nous intéressons qu'au problème de commandes de collections.

L'intervention d'un élève pour la première commande.

La première commande ne pose pas de difficulté aux élèves qui font tous une décomposition canonique à l'exception de l'élève Baptiste qui propose 26 sachets 15 bûchettes). Mme A qui

[127] *Pour 2 boites, 6 sachets, 1 paquet de 10 et 5 bûchettes :*
Technique de vérification : deux boites ça fait deux-mille, six sachets ça fait six-cents, donc deux-mille-six-cent et dix, deux-mille-six-cent-dix et avec cinq ça fait deux-mille-six-cent-quinze.
Pour 26 sachets, 15 bûchettes seules :
Techniques :
- Un premier élève formule la technique de troncature qu'il semble avoir inférée à partir de la réponse écrite au tableau par l'enseignante ;
- Un deuxième élève (celui qui avait proposé cette deuxième solution) explique sa technique : 10 sachets → 1 boite, 10 sachets → 1 boite, 6 sachets, ça fait 26 sachets en tout. Et il reste 15 bûchettes (le 1 des dizaines et le 5 des unités).

a repéré cette réponse l'interroge lors de la phase collective après avoir vérifié avec les élèves la décomposition canonique. Elle fait expliquer par un autre élève : celui-ci a repéré le lien entre les chiffres de 2615 et 26, ce qu'il explique comme cela : « si on prend le deux des milliers et le six des centaines, ça fait vingt-six sachets ». Il est possible que cette technique soit en fait une reconstruction après-coup à partir de la réponse donnée par Baptiste (extension de la technique de recherche du nombre de dizaines dans un nombre à trois chiffres). Mais Mme A ne se satisfait pas de cette formulation. Elle demande une explication, une « raison » pour mettre les chiffres ensemble. Baptiste explique sa méthode : justement il n'a pas fait comme cela. Il a fait des conversions successives d'une boite en dix sachets : à partir de six sachets il obtient seize sachets puis vingt-six sachets. On voit donc l'importance de l'appui sur le groupement de dix sachets en une boite dans la construction de sa technique. Ce contrat d'explication, de justification des techniques ne nous semble pas lié à cette séance (d'après nos différentes observations) mais pourrait plutôt relever d'un contrat plus général dans cette classe.
L'intervention de Baptiste amène une rupture de contrat essentielle dans ce problème : il y a plusieurs commandes possibles et l'on peut avoir un nombre supérieur à dix d'unités à un certain ordre.
C'est cette intervention de Baptiste qui amène Mme A à modifier ce qu'elle avait prévu en proposant dès la deuxième commande la contrainte « pas de boite de mille disponible » (pour 3167). Même si elle était restée sur une commande sans contrainte il est possible que des élèves auraient cherché à faire comme Baptiste.

Du côté des élèves.
Peu d'élèves font des erreurs lors de la recherche de cette commande. Trois élèves (sur les sept pour lesquels nous avons observé une réponse juste) utilisent des dessins sur leur feuille de recherche. Mais nous n'avons pas vu de dégroupements de boites en sachets sur ces dessins : ils utilisent peut-être un comptage oral en unités simples. Pour le dernier cas (4020), ils n'utiliseront plus de dessin (sauf un qui dessine un sachet et le nombre correspondant à côté, etc.). Cela pourrait témoigner d'une appropriation progressive de la technique de troncature.
Pour 3167, un élève écrit 22 sachets, 6 paquets, 7 bûchettes, ce qui pourrait être une tentative erronée d'utilisation de la technique formulée par Baptiste. Mais ici l'élève a pris une boite et l'a comptée comme un sachet (pas de conversion). Pour 4020, il y a une seule erreur (42 sachets) qui pourrait être une erreur dans l'exécution de la troncature qui semble la technique utilisée par cette élève qui explique lors de la phase collective qu'elle a mis le 4 avec le 0.

Gestion des phases collectives.
Lors de la phase collective de conclusion de ces deux dernières commandes (3167 et 4020), Mme A recueille chaque proposition d'élève (juste ou erronée), l'écrit au tableau, fait une vérification puis la raye si elle est erronée. Pour la vérification, elle demande le nombre total de bûchettes pour chaque proposition des élèves ainsi que la justification de cette façon de faire, en aidant souvent les élèves, voire en donnant l'explication elle-même. Par exemple pour 31 sachets un élève propose trois-mille-cent. Pour l'aider à justifier Mme A fait alors rappeler le nombre de sachets dans une boite (dix sachets), puis conclut qu'il faut trente sachets pour trois milliers. C'est elle qui prend souvent en charge le groupement.
Même si les élèves utilisent la technique de troncature, celle-ci reste invisible dans la classe puisque le contrat est d'expliquer les conversions effectuées. Ainsi c'est toujours le même

raisonnement qui est mis en avant par l'enseignante (même pour les paquets de dix dans 4020 à la fin) : on part de la relation entre une boite et dix sachets que l'on l'étend pour un multiple de dix de centaines. Pour les paquets de dix dans les boites, on passe d'abord par les sachets puis par le nombre de paquets de dix dans un sachet, etc. Mme A est même amenée à utiliser le matériel des bûchettes pour rappeler la relation boites/sachets et invalider la réponse « 12 sachets ».

On ne peut pas parler de conversions puisque ce travail se fait toujours dans le contexte des bûchettes en référence aux groupements de dix sachets en une boite. Il n'y a pas de décontextualisation car Mme A n'utilise pas les unités de numération. Par exemple, elle utilise une seule fois le mot « centaine » lorsqu'elle reformule la consigne pour la première commande (ce qui peut d'ailleurs être lié à l'influence de la consigne proposée dans la ressource). Elle utilise une fois le mot « millier ». Cela confirme le fait que Mme A ne les utilise qu'en lien avec le tableau de numération pour nommer les rangs. De plus, dans cette séance, les conversions ne sont pas écrites au tableau (seulement les commandes) : elles restent à l'oral. La seule conversion visible au tableau est celle qui permet de passer des sachets aux paquets de dix où Mme A écrit 100p + … au-dessus de 10s + … . Cela ne favorise pas un travail de conversion par les élèves à l'écrit. D'ailleurs l'observation de leurs productions montre que ces conversions sont invisibles alors que dans cette classe les élèves ont l'habitude de laisser des explications à l'écrit (cf. séances précédentes). Ceux qui en font les font mentalement.

Institutionnalisation des savoirs.

Finalement Mme A n'explicite pas clairement ce qu'il y a à retenir de cette séance. Elle ne fait pas de synthèse à la fin. Elle indique lors de la dernière phase collective qu'il y a plusieurs commandes différentes.

Elle a beaucoup répété (et fait répéter aux élèves) les relations entre boites, sachets et paquets. Mais c'est la manière de vérifier qui est mise en avant (même si elle s'appuie sur les mêmes savoirs[128]). Une technique a été formulée en début de séance par un élève mais n'est pas reformulée par l'enseignante. La technique de troncature est, elle aussi, apparue mais ne correspondait pas non plus à ses attentes. Le contrat est de justifier en appui sur les groupements matériels. Et l'absence d'utilisation des unités de numération[129] pourrait faire obstacle à une décontextualisation des connaissances construites ici.

Il apparaît essentiel de reprendre ce type de problème pour permettre aux élèves d'adapter leur technique à d'autres contraintes : pas de millier ni de centaine par exemple, qui met en jeu la relation millier/dizaine. Ce serait lors d'une telle reprise que Mme A pourrait faire un travail de formulation de techniques, sans se limiter au cas particulier de la relation entre centaines et milliers.

<u>Conclusion</u>

Même si les choix effectués par Mme A (notamment celui de ne pas utiliser les bons de commandes et plus généralement les unités de numération pour désigner les différents

[128] En vérifiant on utilise 61C = 6M 1C alors qu'en commandant on utilise 6M 1C = 61C. Les deux s'appuient sur la relation 1M = 10C.

[129] Mme A est la seule enseignante observée qui reste aussi longtemps sur l'utilisation des mots boites, sachets … : dans le jeu des paris ainsi que dans cette séance elle ne tient pas compte des désignations en unités de numération proposées dans la ressource. Pour le jeu des paris elle ne décrit pas les collections avec ces unités (contrairement à ce qui est proposé dans la ressource) et ici elle n'utilise pas les bons de commandes où cette désignation en unités de numération est proposée.

groupements) ne permettent pas une décontextualisation des relations entre groupements matériels pour amener vers des conversions entre unités, la mise en œuvre de cette séance permet aux élèves de se construire une technique pour déterminer le nombre de sachets de cent dans un nombre supérieur à mille (nous n'avons vu qu'une seule erreur pour le dernier cas).

Mais il n'y a pas de technique institutionnalisée par l'enseignante. Lors des phases collectives c'est la vérification des réponses qui est visible. Grâce au contrat de justification dans les phases collectives, cette vérification fait apparaître les groupements/dégroupements entre boites de mille, sachets de cent et paquets de dix. Cela pourrait aider les élèves à élaborer une technique car cette vérification met en jeu les savoirs visés.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme A (deuxième partie de sa séquence)

Activités proposée : directement extraite de la ressource ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
Variante S_{Cv1} « Marchand de bûchettes » (S3)	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	Des vérifications de commandes par des conversions en unités simples. Des groupements/dégroupements dans le contexte des bûchettes (exemple : « dans une boite on a dix sachets »).
Exercices d'entraînement « Marchand de bûchettes »	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	*Non observée.*
Exercice d'entraînement au « jeu des paris »	Dénombrer une réunion de collections (inventer / faire un pari inventé par un copain). *Bûchettes.*	*Non observée.*
Variante S_{Cv2} « Commandes de timbres »	Commander une collection (décomposer un nombre). *Timbres.*	*Non observée.*

Figure 107 : tableau de déroulement de la deuxième partie de la séquence de Mme A

Mme A a proposé une séance d'exercice d'entraînement après la séance observée, en proposant des contraintes variées (pas de boite de mille, pas de sachet, un seul millier, etc.). Dans l'entretien final elle nous explique les difficultés rencontrées, qui pourraient être liées à l'utilisation d'un « bon de commande » :

> « La séance s'était bien passée. C'est après, en entraînement que j'avais eu plus de difficultés. Est-ce que c'est parce que dans l'entraînement on n'avait plus le matériel ? J'ai eu plus d'erreurs. Y'en a certains qui ont voulu me mettre plusieurs réponses dans le bon de commande. Y'en a d'autres qui se sont emmêlé les pinceaux avec les groupements. Jeanne, elle était complètement bloquée. Elle était complètement perdue. […] Ça les a embrouillés de mettre un bon de commande à côté. Ca ne les a pas aidés. »

Mais les difficultés rencontrées par les élèves pourraient aussi être liées :

- à l'utilisation des unités de numération qui sont dans les bons de commande,
- au fait qu'elle varie les contraintes dans cette séance contrairement à la séance observée.

Lors de cet entretien elle signale également que la situation de commande de timbres a posé des difficultés aux élèves. Ces difficultés semblent liées à la fiche matériel qui a rendu la

situation confuse (notamment le fait que l'on montre des timbres à l'unité alors que ce n'était pas demandé dans les commandes).
Elle a choisi de faire des commandes par excès (ne commander que des plaques de 100 timbres). Elle signale que les élèves ont encore rencontré un problème de vocabulaire entre plaques, carnets, … Ils n'ont en effet pas de termes généraux (unités de numération) disponibles pour décrire les groupements. Elle a été surprise de ces difficultés :

> « Je me suis dit que ça marchait bien. J'y vais direct avec la commande sans contrainte. Certains n'ont pas fait le lien avec les situations d'avant. Ceux qui ont tout de suite compris, pas de problème. Et à la fin quand même ils ont réussi. Mais on avait déjà fait le point. Après ils ont cherché le dernier et ils ont réussi à trouver. »

Elle propose de modifier la situation avec des premiers cas sans contrainte, comme pour la variante du marchand de bûchettes : « donc peut-être pas dès le départ avec des contraintes : tu donnes un nombre, qu'est-ce que tu vas pouvoir commander en timbres, en carnets … avant de prendre directement la contrainte plaque de cent ».
Elle n'a pas proposé d'exercice d'entraînement à la suite de cette séance.
Enfin concernant le fait de travailler dans d'autres contextes que les bûchettes (par exemple les timbres ou la monnaie), Mme A estime que cela pourrait être bénéfique pour dépasser les bûchettes mais pas pour les élèves les plus fragiles :

> « ils auront moins de référents. Jeanne je lui aurais introduit des timbres, de la monnaie elle aurait été perdue. C'est pas dit que ça aide. Il faut un matériel référent. »

Cette volonté de rester toujours dans le contexte des bûchettes, est donc liée aux difficultés engendrées par le changement de contexte chez certains élèves[130].

Conclusion sur la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme A

L'observation de la séance de Mme A (S_{Cv1}) a permis de mettre en évidence la façon dont un élève peut se construire une technique de groupements successifs de sachets en boites ainsi que l'appropriation de la technique de troncature par les élèves suite aux phases collectives, même si cette technique n'est pas explicitée par l'enseignante. Mais l'entretien final montre les difficultés rencontrées par les élèves pour adapter cette technique lors du changement de contexte dans la séance d'exercices suivante. Dans les phases collectives Mme A fait vérifier les réponses des élèves mais n'explicite aucune technique directe.
Mme A a cherché à repousser l'introduction d'un autre contexte ainsi que l'utilisation des unités de numération. Il semble que cela pourrait être lié à l'anticipation qu'elle fait des difficultés que cela pose aux élèves « les plus fragiles ». C'est un obstacle à la décontextualisation des connaissances des élèves.

II.2 Analyse de la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme F

Nous n'avons observé que la variante S_{Cv1} dans la classe de Mme F.

[130] Nous avions observé le même phénomène dans la classe de Mme C lors de la pré-expérimentation, ce qui l'amenait à repousser le moment du changement de contexte.

Variante S_{Cv1} : « Marchand de bûchettes »

Description du déroulement
En annexe III.3.

Les choix de Mme F
Mme F commence par un moment d'échauffement en calcul mental avec le jeu du furet (avancer dans la suite orale de dix en dix, cent en cent, mille en mille). Elle poursuit avec la tache de réalisation d'une commande (ou décomposition d'un nombre).
Mme F affiche les bons de commande au tableau numérique interactif (TNI) dans une feuille de calcul d'un tableur mais sans utiliser les fonctionnalités du tableur (juste pour présenter les bons de commandes). Il aurait été possible de se servir du tableur comme moyen de vérification des réponses en incitant les élèves à anticiper la commande qu'il faut écrire dans le tableur. Après discussion avec l'enseignante nous lui en avons fait la proposition pour un exercice d'entraînement (voir plus loin, dans la description de la séquence de Mme F pour cette situation).
Mme F distribue aux élèves une fiche avec 8 bons de commande. Les élèves n'ont pas la place pour une recherche éventuelle sur cette fiche.
Conformément à ce qui est proposé dans la ressource, Mme F commence par des cas sans contrainte. Elle joue sur la présence/absence de 0 dans l'écriture du nombre.
Elle propose ensuite des cas avec contraintes. Son choix de contrainte est centré sur l'absence de centaine puis de centaine et dizaine, ce qui ne correspond pas à ce qui est proposé dans la ressource, ni d'ailleurs à ce qu'elle a fait sur sa fiche (3167 avec seulement 1 millier de disponible, pas de cas avec absence de deux unités consécutives, comme dans la ressource). Elle modifie donc ses choix initiaux pour se centrer sur la recherche du nombre de centaines puis de dizaines dans un nombre supérieur à mille.
Pour le premier cas avec contrainte elle utilise un grand nombre 8004, alors que les exemples donnés dans la ressource ont de plus petits nombres de milliers : 2615 et 3167. Rappelons que la taille des nombres n'est pas une variable didactique explicitée dans la ressource.

Tableau synoptique du déroulement :

Temps	Tâches	Phases. Organisation	Techniques et éléments technologiques
1	Avancer dans la suite orale. (jeu du furet)	Echauffement. Collectif	
2			
3			
4			
5			
6			
7	Commander une collection de bûchettes : 2615 bûchettes … milliers … centaines … dizaines … unités	Présentation. Collectif	
8			
9		Recherche. Individuel	
10			
11		Conclusion. Collectif	
12			
13	Commander 4050 bûchettes	Recherche. Ind.	
14		Conclusion. Collectif	
15	Commander 6709 bûchettes	Recherche. Ind.	
16		Conclusion. Collectif	
17	Commander 8004 bûchettes	Rech. Ind. (rapide) et conclusion en coll.	

<table>
<tr><td>18
19</td><td rowspan="5">Commander 8004 bûchettes. Pas de millier.</td><td>Présentation. Collectif</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td>Recherche. Ind.</td><td></td></tr>
<tr><td>21
22
23
24
25
26</td><td>Première conclusion. Collectif</td><td>Rappel : Dans une boite il y a dix centaines.
Techniques de vérification : pour 8 centaines et 4 unités
- 8 centaines = 800, et 800 + 4 = 804 ;
- Comptage oral : cent, deux cents, …, huit cents.</td></tr>
<tr><td>27
28
29</td><td>Recherche. Individuel</td><td></td></tr>
<tr><td>30
31
32</td><td>Deuxième conclusion. Collectif</td><td>Rappel :<table><tr><td>M</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>33</td><td rowspan="3">Commander 1321 bûchettes. Pas de millier.</td><td>Présentation. Coll.</td><td></td></tr>
<tr><td>34
35
36</td><td>Recherche. Individuel</td><td></td></tr>
<tr><td>37
38
39</td><td>Conclusion. Collectif</td><td></td></tr>
<tr><td>40</td><td rowspan="4">Commander 1321 bûchettes. Pas de millier, pas de centaine.</td><td>Présentation. Coll.</td><td></td></tr>
<tr><td>41
42
43
44
45
46</td><td>Recherche. Individuel</td><td></td></tr>
<tr><td>47
48
49
50</td><td>Conclusion. Collectif</td><td></td></tr>
<tr><td>51
52</td><td>Correction. Collectif</td><td>Dans 1321 il y a 132 dizaines car<table><tr><td>M</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>53
54
55
56
57
58
59
1h00</td><td>Commander une collection.</td><td>Synthèse. Collectif</td><td>Dans un millier il y a cent dizaines, il y a dix centaines.
Un millier et trois centaines c'est treize centaines car 13 = 10 + 3 et 1 millier c'est 10 centaines.</td></tr>
</table>

Figure 108 : tableau synoptique du déroulement de S_{Cv1}, classe de Mme F

Analyse du déroulement

Les commandes sans contraintes.

Pour les cas sans contrainte, les élèves ne rencontrent pas de difficultés. Il suffit de réécrire les nombres de chaque rang de l'écriture en chiffres dans le bon de commande, dans le même ordre. Cela est lié au fait que quand un nombre avec un ou plusieurs 0 dans l'écriture en chiffres est donné, le contrat dans la classe semble être d'écrire ces 0 aussi dans son écriture en unités de numération dans le bon de commande. Par exemple 4050 = 4M 0C 5D 0U. Pourtant ces 0 sont inutiles avec cet ostensif et cela limite l'intérêt du travail de décomposition. Il est possible que ce soit l'utilisation du bon de commande dans lequel il est attendu un nombre pour chaque unité qui induise cela.

Pour ces premières commandes l'enseignante ajoute une écriture en 6000 + 700 + 9 et (6×1000) + (7×100) + (9×1) même si cette écriture est inutile ici, comme elle l'indique d'ailleurs. Cela pourrait être un effet des contraintes institutionnelles.

Du côté des élèves.
La première commande avec contraintes (8004) apparaît comme un véritable problème pour les élèves. Aucun ne semble trouver la réponse attendue. L'enseignante organise alors un moment collectif de vérification d'une réponse erronée (0M 8C 0D 4U), sous sa responsabilité : 8 centaines = 800 auquel on ajoute 4 donc 804 mais pas directement 8C 4U = 804 comme dans la situation de dénombrement. Elle en profite aussi pour écarter la réponse en unités simples (8004U) avec l'argument du temps pour constituer une telle collection. Cette phase de vérification permet de les relancer dans une deuxième recherche où il semble que deux élèves trouvent la réponse attendue (80C). Dans la deuxième phase de conclusion pour ce cas l'enseignante laisse ses élèves expliquer leur technique (mais n'organise pas de vérification : elle évalue). Justine fait constater que les 80 centaines se voient directement sur l'écriture en chiffres (qu'elle entoure au tableau). Mais il est possible qu'elle ait fait ce constat après coup. Sa technique est alors invisible. Par contre Enzo s'est construit une technique qui fonctionne pour le nombre de centaines, dizaines ou unités simples. Il la formule (et la montre au tableau) pour le nombre d'unités simples ou de dizaines :

> « Par exemple si c'est des dizaines c'est cette partie (*montre le chiffre des dizaines*) et si y'en a plus de dix des dizaines c'est avec cette partie aussi (*montre le chiffre des centaines*) […] et si y'en a encore plus c'est avec cette partie (*montre le chiffre des milliers*). »

Des questions se posent sur l'appropriation par les autres élèves (ceux qui n'avaient pas trouvé) de la technique montrée au tableau et sur son adaptation pour d'autres contraintes car les conversions entre unités de numération sont restées invisibles. Sans cela on ne peut comprendre pourquoi entourer ces deux chiffres là et pourquoi pas d'autres. Pour le cas sans millier ni centaine, l'adaptation de cette technique risque alors d'être difficile.
Pour la deuxième collection sans millier (1321), Mme F a volontairement utilisé un nombre plus petit (d'après l'entretien de fin de séance). Davantage d'élèves trouvent le nombre de centaines (4 sur les 5 observés), ce que l'on peut interpréter comme un effet de la phase collective précédente.
Pour le cas sans millier ni centaine, aucun élève ne réussit à trouver le nombre de dizaines de 1321. Un élève utilise seulement les unités simples (1321U) et un autre les unités simples auquel il ajoute les dizaines isolées (2D 1301U). Ces deux élèves ont bien trouvé une réponse correcte mais ne répondant pas à l'attente de l'enseignante. On voit ici l'intérêt de limiter le nombre d'unités de chaque ordre pour éviter cela. Deux autres élèves trouvent 13 dizaines et 21 unités : ils semblent chercher à réutiliser la technique montrée par les élèves précédemment, ce qui pourrait confirmer la difficulté d'adaptation que nous avons évoquée.

Gestion des phases collectives de conclusion par l'enseignante.
Pour la première commande avec contrainte (8004), après avoir laissé deux élèves expliquer leur technique, Mme F ne les amène pas à les justifier. C'est Mme F qui indique que huit milliers est en fait égal à quatre-vingt centaines mais sans donner la relation entre milliers et centaines sur laquelle cela s'appuie. L'entretien de fin de séance avec Mme F nous a permis de comprendre que cela était lié à l'impossibilité pour elle de faire référence aux groupements avec le matériel des bûchettes à cause de la taille du nombre proposé (8004) :

> « là mon huit-mille-quatre ça y est je les ai perdus et là j'avais aucun moyen de les rattraper parce que je n'avais pas quatre-vingt centaines. […] Je pense que le choix des nombres est pertinent il faut faire très attention parce qu'il faut pouvoir, quand l'enfant est perdu, vérifier et avec huit-mille-quatre c'est pas possible ».

Il est possible que, pour Mme F, la référence au principe décimal ne se fasse que par le retour au matériel. Cela est cohérent avec ce que nous avons observé jusque là : quand elle évoque les relations entre unités elle ressort le matériel. Il semble également que la vérification pour Mme F ne puisse se faire qu'avec le matériel. Ces deux points sont liés : c'est la vérification qui permet à Mme F de faire émerger les relations entre unités, en appui sur le matériel. Cela pourrait être lié au fait que les élèves ne se sont pas encore approprié les conversions entre unités : celles-ci ne peuvent pas jouer le rôle de critère de validité ici.

Pour la commande suivante, Mme F prend en charge la vérification en demandant : « combien ça fait de bûchettes treize centaines ? ». Une élève répond mille-trois-cent sans que l'on sache vraiment comment elle fait. Utilise-t-elle une conversion de centaines en milliers et centaines ? Utilise-t-elle une règle de calcul ? Le savoir en jeu n'est pas explicite dans cette façon de vérifier. De plus, seule une vérification apparaît dans la phase collective : la technique utilisée par l'élève reste invisible.

Pour la dernière commande (aucun élève n'a trouvé une réponse correcte), les différentes réponses sont invalidées sous la responsabilité de l'enseignante qui demande : « combien ça fait de bûchettes ? » (elle a déjà fait le travail de vérification avec ces élèves lors de la phase de recherche). Les conversions éventuelles restent toujours invisibles lors de la vérification. Contrairement à la situation de dénombrement, la prise en compte des erreurs lors des phases collectives par Mme F ne permet pas l'émergence des savoirs en jeu. Il aurait par exemple été possible de demander ici combien de dizaines il faut pour faire 3 milliers puisque 32 dizaines ne suffisent pas. Finalement Mme F donne la réponse.

Institutionnalisation des savoirs.

Mme F organise une synthèse en fin de séance en montrant les quatre manières différentes de décomposer le nombre 1321. Comme les élèves n'ont pas trouvé le dernier cas (nombre de dizaines) elle leur dit que l'activité « n'a pas marché du tout ». Elle explique alors qu'il existe deux façons différentes de faire ses décompositions : « soit, le plus simple, on s'occupe de la position de chaque chiffre dans le nombre, soit par contre après il faut s'intéresser à la quantité c'est-à-dire au nombre de centaines ou au nombre de dizaines ». Mais le détail des techniques reste invisible. Elle précisera juste par la suite qu'il faut s'appuyer sur le fait qu'un millier c'est dix centaines. Comme dans la situation de dénombrement, le savoir en jeu est explicité mais ici, l'absence d'une formulation claire de technique, rend difficile le lien avec ce qu'ont montré les élèves au tableau (pour 8004).

On remarquera enfin que, quand elle tente d'expliquer qu'un millier et trois centaines est égal à treize centaines, après avoir écrit « 13 centaines » au tableau elle écrit « 10 + 3 » au-dessous, sans unités (qui sont juste données à l'oral). On retrouve donc ici (comme pour le dénombrement) le fait que les conversions entre unités restent invisibles au tableau, elles sont seulement évoquées à l'oral. Les unités de numération sont utilisées à l'écrit uniquement pour les bons de commande. Cela ne facilite pas l'appropriation par les élèves de ce travail de conversion.

Conclusion

Le fait de mettre une contrainte sur le stock du marchand pose un véritable problème aux élèves qui ne pensent pas au début que l'on peut faire des milliers en utilisant des centaines.

La vérification des réponses même si elle est toujours sous la responsabilité de l'enseignante permet de les relancer dans une nouvelle recherche. L'enseignante fait alors expliciter leur technique aux deux élèves qui ont trouvé. Mais elle ne reprend pas leur formulation et ne les amène pas à la justifier : les conversions entre unités restent alors invisibles. Cela semble lié au fait que la référence aux conversions est encore très attachée au contexte des bûchettes pour l'enseignante (et pour les élèves ?) mais ici elle a choisi un nombre trop grand pour l'utiliser. De plus ce choix de grand nombre et l'absence d'un support pour la recherche font obstacle à certaines techniques (comme les conversions avec dessin) qui auraient pu permettre aux élèves d'entrer dans le problème.
Le fait que des élèves expriment la technique de troncature pour le premier cas avec contraintes semble amener Mme F à proposer des contraintes liées à la recherche du nombre de centaines puis de dizaines dans un nombre à quatre chiffres, ce que l'on peut penser qu'elle connait mieux comme type de tâches (« nombre de »). Mais les élèves n'arrivent pas à adapter cette technique pour la recherche du nombre de dizaines, qui apparait comme un saut trop important. Pourtant dans la ressource nous avions proposé des exemples se limitant aux relations entre centaines et milliers, tout comme dans la fiche préparée par Mme F.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme F (deuxième partie de sa séquence)

Activités proposée : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
<u>Variante S_{Cv1} « Marchand de bûchettes » (S3)</u>	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	Technique de troncature montrée dans le tableau de numération. Relations entre unités : dans un millier il y a cent dizaines, il y a dix centaines.
Exercice d'entraînement.	Dénombrer une réunion de collections ou une collection partiellement groupée. *Bûchettes.*	*Non observée.*
<u>Situation complémentaire : jeu des décompositions</u>	Décomposer un nombre de différentes manières avec unités de numération. *Hors contexte.*	*Non observée.*
<u>Variante S_{Cv2} « Commandes de timbres »</u>	Commander une collection (décomposer un nombre). *Timbres.*	*Non observée.*

Figure 109 : tableau de déroulement de la deuxième partie de la séquence de Mme F

Mme F choisit de travailler à nouveau le dénombrement de collections après la première variante des commandes, ce qui est lié aux difficultés observées dans la séance et à la discussion que nous avions eue en fin de séance. Avant de travailler la deuxième variante elle propose le jeu des décompositions. Nous avons eu l'idée de ce jeu à partir des bons de commandes qu'elle avait écrits dans un tableur (sur le TNI) dans la séance observée. Nous lui avons préparé une feuille de tableur à l'avance avec des formules permettant de calculer le montant de la commande une fois les nombres d'unités écrits. Cela permet un contrôle des réponses des élèves.
Elle termine sa séquence par les commandes de timbres, sans proposer d'autre exercice ou situation complémentaire.

Finalement, le bilan que fait Mme F de sa séquence est assez mitigé car il reste des élèves en difficulté sur les conversions :

> « Cette séquence, je suis très sceptique. Je ne pense pas que les enfants comprennent tous. Ils savent utiliser le tableau mais ne sont pas tous capables d'expliquer. Les enfants en difficulté sont toujours en difficulté : les 20 centaines ne sont pas 2 milliers. […] Après je pense qu'il faut écrire. Je leur ai demandé de l'écrire. Je me demande dans quelle mesure il ne faudrait pas que ce soit appris à la manière d'une règle. Nous, on l'a appris une fois en autodictée. C'est de colère, on a écrit au tableau : dans une dizaine il y a 10 unités … Je pense que c'est quelque chose qui doit être un passage obligé. […] Dans l'urgence tu te contentes de leur faire apprendre que dans 1 dizaine y'a 10 unités … et après tu fais tes situations mais est-ce qu'ils font le lien ? »

Lors de l'entretien final, elle explique également que les unités de numération posent des difficultés aux élèves (« les mots dizaines, centaines, milliers on est dans une abstraction auquel les élèves n'accèdent pas »). Elle explique le peu d'exercices dans sa séquence par le fait que cela n'est pas proposé dans la ressource (« s'ils avaient été construits je pense que je les aurai faits mais mon rythme de classe ne me laisse pas le temps de tout construire »).

Conclusion sur la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme F

La première séance (S_{Cv1}) ne permet pas encore aux élèves d'élaborer une technique de conversion permettant de traiter les commandes sans millier ni centaine. Même si certains élèves utilisent la troncature pour la recherche du nombre de centaines, ils ne réussissent pas à l'adapter à la recherche du nombre de dizaines (dans un nombre à quatre chiffres). Nous faisons l'hypothèse que ce qui rend difficile cette adaptation est l'absence de travail de conversion :

- à l'écrit par l'enseignant lors des phases collectives, avec unités de numération ;
- par les élèves lors de la recherche individuelle, cela pouvant être une conséquence du premier point.

Les conversions entre unités de numération restent le fait de l'enseignante, à l'oral. Leur utilisation par les élèves n'est ni amenée par le milieu, ni par le contrat.
Mme F est allée au-delà de ce qui était préconisé dans la ressource (travail sur relations entre deux unités d'ordres consécutifs). Elle a peut-être sous-estimé les connaissances mises en jeu dans la recherche du nombre de dizaines dans un nombre supérieur à mille.
Les exercices proposés dans les séances suivantes lui ont toutefois permis de revenir sur ce problème et de travailler des décompositions variées. Mais elle signale que des élèves ont encore des difficultés importantes sur les conversions en fin de séquence.

II.3 Analyse de la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme E

Nous n'avons observé que la variante S_{Cv1} dans la classe de Mme E.

Variante S_{Cv1} : « Marchand de bûchettes »

<u>Description du déroulement</u>
En annexe III.3.

<u>Les choix de Mme E</u>
Mme E ne travaille que les commandes de collections dans cette séance.

Dès le début les élèves ont une ardoise pour écrire leur réponse. L'enseignante dit le nombre oralement mais ne donne pas toujours le nombre écrit en chiffres. À partir du quatrième cas, elle donne aux élèves une fiche sur laquelle les nombres sont écrits en chiffres. Des bons de commande sur lesquels sont écrites les contraintes éventuelles sont déjà préparés. Mme E utilise les unités de numération pour décrire ce qu'il faut commander (milliers de bûchettes, etc.). Sur une affiche qui est au tableau elle a dessiné chaque groupement obtenu avec le matériel des bûchettes et le nom de l'unité de numération juste en-dessous.
Elle choisit de traiter les trois premiers cas collectivement (les élèves écrivent leur réponse sur l'ardoise) puis pour les deux autres cas sans contraintes elle laisse un temps court de recherche individuelle.
Pour les cas avec contraintes, elle propose systématiquement un temps de recherche individuelle avant la conclusion collective. Les contraintes proposées sont variées : pas de millier (deux fois de suite), pas de centaine, un seul millier, pas de dizaine, etc. Ainsi les conversions entre différentes unités sont en jeu mais pas la construction d'une technique particulière comme la troncature. À l'écrit (sur la fiche) les contraintes sont données en unités de numération, mais à l'oral elles sont également formulées par l'enseignante en termes de boites, sachets, …
Durant toute la séance la taille des nombres reste toujours inférieure à 5000. Le matériel peut ainsi être utilisé par l'enseignante en cas de besoin pour la plupart des commandes. Il est présent sur son bureau.

Tableau synoptique du déroulement

Temps	Tâches	Phases. Organisation	Techniques et éléments technologiques
1		Rappel. Collectif	
2	Commander une collection de bûchettes (décomposer un nombre) Commande de deux-mille-cinq-cent (2500) bûchettes	Présentation, recherche et conclusion. Collectif	Dans une boite il y a mille bûchettes.
3			
4			
5			
6			
7	Commande de « mille six cent cinquante bûchettes »	Présentation, recherche et conclusion. Collectif	Une boite c'est un millier.
8			
9			
10	Commande de « deux mille deux bûchettes ».	Présentation, recherche et conclusion. Collectif	
11			
12			
13	Commande de deux-mille-six-cent-quinze (2615) bûchettes (écrire le résultat sur la fiche, dans un bon de commande).	Présentation. Collectif	
14			
15			
16		Rech. Individuel	
17		Conclusion. Collectif	
18			
19	Commande de quatre-mille-six-cent-cinquante-trois (4653) bûchettes.	Prés., rech. et concl. Coll. Ind. et coll.	
20	Commande de quatre-mille-six-cent-cinquante-trois (4653) bûchettes mais il n'y a plus de boite de mille.	Présentation. Coll.	
21		Recherche. Individuel	
22			
23			
24			
25		Conclusion.	Dix sachets ça fait mille bûchettes

26		Collectif	Technique de vérification pour réponse erronée : comptage de cent en cent, dix en dix, un en un.
27			
28			
29			
30			
31	Commande de trois-mille-deux-cent-quarante-deux (3242) bûchettes, pas de boite.	Présentation. Coll.	
32		Recherche. Individuel	
33			
34		Conclusion. Collectif	Trois milliers c'est pareil que 30 centaines.
35			
36	Commande de trois-mille-deux-cent-quarante-deux (3242) bûchettes, pas de sachet.	Présentation. Coll.	
37		Recherche. Ind.	
38		Conclusion. Collectif	Dans une centaine il y a dix paquets de dix, donc dans deux centaines il y a vingt paquets de dix.
39			
40	Commande de 3167 bûchettes, il n'y a plus qu'un millier de bûchettes.	Présentation. Coll.	
41		Recherche. Individuel	
42			
43			
44			
45		Conclusion. Collectif	Technique pour vérifier une réponse erronée : Si j'ai dix sachets ça fait mille bûchettes, donc trente sachets ça fait trois-mille bûchettes. Si je rajoute un sachet de cent ça fait trois-mille-cent.
46			
47			
48			
49	Commande de trois-mille-sept-cent-quarante-cinq (3745) bûchettes, pas de paquet de dix.	Présentation. Coll.	
50		Recherche. Individuel	
51			
52			
53		Conclusion. Collectif	
54			
55	Commande de trois-mille-sept-cent-quarante-cinq (3745) bûchettes, pas de paquet de dix et seulement six sachets.	Présentation, recherche et conclusion. Collectif	
56			
57	Commander une collection.	Collectif (synthèse)	
58			

Figure 110 : tableau synoptique du déroulement de S_{Cv1}, classe de Mme E

Analyse du déroulement

Les premières commandes sans contraintes.

Les cas sans contrainte ne semblent pas poser de difficulté aux élèves. Ainsi quand Mme E leur donne la fiche, elle leur laisse un temps très court de recherche et fait des corrections très rapides. La seule erreur observée concerne une confusion entre dizaines et bûchettes seules pour 2002. Mme E profite de ces premiers cas pour faire travailler les élèves avec les unités de numération qui sont dans les bons de commande et qu'elle demande aussi aux élèves d'utiliser à l'oral pour décrire la commande : pour l'élève qui propose « une boite » elle demande de reformuler avec « millier ». Pourtant quand elle reformule la consigne donnée sur la fiche pour le premier cas avec contrainte elle dit « pas de boite ». Le contexte a donc encore une place importante.

Les élèves ont les connaissances pour contrôler les réponses proposées en appui sur le travail fait dans les séances précédentes. Mais Mme E fait quand même venir des élèves au tableau pour réaliser une des commandes avec le matériel. Il nous semble que cela lui sert principalement à faire le lien entre les unités de numération et les différents groupements.

Du côté des élèves.
Notons que quand Mme E propose le premier cas avec contrainte elle précise dès la consigne qu'elle pourra donner aux élèves plein de centaines. D'autres types de commandes seraient possibles avec des dizaines ou unités simples pour faire des milliers. Mais nous n'avons pas observé de telles conversions de la part des élèves.
Dès le premier cas avec contrainte (4653 bûchettes et pas de millier) les élèves rencontrent des difficultés. L'erreur prévue de non prise en compte du nombre de milliers apparaît (6C 5D 3U). Elle est observée jusqu'en fin de séance. Par exemple pour la commande de 3745 bûchettes sans dizaine nous avons observé quatre élèves qui écrivent 3M 7C 0D 5U).
Les conversions posent des difficultés aux élèves comme Mme E nous le signale lors de l'entretien de fin de séance. C'est ce qui pourrait expliquer qu'elle prenne en charge ce travail lors des phases collectives pour invalider les réponses des élèves. Comme nous l'avions déjà vu, la situation de dénombrement n'a pas permis de faire travailler les élèves sur les conversions entre unités. L'enjeu ne peut pas être pour Mme E de les réinvestir dans ce problème, mais plutôt de construire ces connaissances. Les commandes avec des cas variés de contraintes permettent bien de confronter les élèves à cet enjeu. Mais de nombreux élèves sont encore en difficulté en fin de séance. Pour expliquer cela nous pouvons avancer deux hypothèses :

- les élèves qui ne savent pas convertir entre unités pourraient être bloqués dans leur recherche du fait qu'ils n'écrivent rien sur leur feuille. Par exemple s'ils avaient fait un dessin ils auraient pu faire un comptage ou bien des groupements en référence au matériel des bûchettes. Nous n'avons observé aucun élève faire un dessin, même si les dessins ont servi dans la situation de dénombrement à représenter les collections. Ils auraient aussi pu faire des essais de conversions entre unités. Nous n'en avons pas vu non plus. Ce dernier point pourrait être lié au fait que les conversions entre unités apparaissent toujours à l'oral dans la classe (cf. analyse des phases collectives).
- les techniques utilisées par les élèves sont invisibles (cf. analyse des phases collectives), ce qui ne facilite pas leur appropriation. Pourtant des groupements (voire des conversions) apparaissent (sous la responsabilité de l'enseignante), lors de la vérification des réponses des élèves. Cette absence de visibilité des techniques pourrait être liée au choix de Mme E (conformément aux propositions de la ressource) de travailler sur des contraintes variées. Peut-être qu'en ne proposant qu'un travail avec absence de millier, la technique de troncature au rang des centaines aurait pu émerger.

Gestion des phases collectives de conclusion par l'enseignante.
Lors des phases collectives, Mme E prend en compte les erreurs en interrogeant les élèves qui les ont faites. Elle s'appuie sur les connaissances des élèves pour invalider certaines réponses. Par exemple, pour la première commande avec contrainte, elle écrit la réponse 6C 5D 3U au tableau et la fait dénombrer par les élèves. Elle est aussi amenée à faire utiliser un comptage avec le matériel car cela ne semble pas suffire pour certains élèves.
Pour d'autres réponses erronées, par exemple 1M 31C 6D 7U pour 3167 avec un seul millier, elle fait réaliser les groupements, en appui sur l'évocation du matériel : elle fait chercher le

nombre de bûchettes dans 10 sachets, puis dans 30 sachets pour en déduire le nombre dans 31 sachets. Il n'y a pas de conversion entre unités : cela reste contextualisé aux groupements matériels. De plus c'est le passage des sachets aux bûchettes (unités simples) qui est sollicité et non celui des sachets aux boites et sachets (milliers et centaines). De même pour la première commande avec contrainte (4653 bûchettes et pas de millier) alors qu'un élève explique la conversion à effectuer (avec les centaines on peut faire un nouveau millier) elle reformule en montrant le matériel : « dix sachets ça fait mille ».
À d'autres moments elle rappelle (ou fait rappeler) les conversions entre unités. Par exemple, pour expliquer qu'il faut 32 centaines pour la commande de 3242 (pas de millier), elle fait rappeler le nombre de centaines dans 3 milliers. Ces conversions apparaissent presque toujours à la demande de l'enseignante. Les conversions se font uniquement à l'oral. Au tableau, il n'y a que les commandes (justes ou erronées) qui sont écrites.
Lors des phases collectives Mme E s'attache surtout à faire invalider les réponses erronées. Pour les commandes correctes elle évalue souvent sans faire le travail de vérification. Par exemple pour la première commande avec contrainte (4653 bûchettes et pas de millier), la réponse 6M 5D 3U est vérifiée deux fois, alors que l'autre réponse 46C 5D 3U ne fait l'objet d'aucune vérification. Ce phénomène est observé pour toutes les commandes suivantes, hormis pour 3242 (pas de millier) où la justification effectuée permet une vérification.

Institutionnalisation des savoirs.
Lors de l'institutionnalisation de fin de séance (synthèse) Mme E évoque le fait d'avoir trouvé des « décompositions » de nombres différentes de « d'habitude ». Elle donne un exemple d'une telle décomposition, avec unités de numération mais dans le contexte des bûchettes (milliers de bûchettes, etc.). Seule la tâche est évoquée, avec une décontextualisation du fait que Mme E parle maintenant de « décomposition ». Même si les groupements ou conversions entre unités sont apparues lors des phases collectives (pour vérifier), elles ne sont pas institutionnalisées ici.

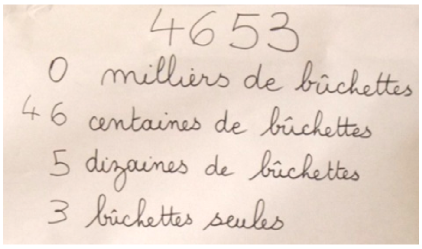
Conclusion
Mme E a proposé un jeu sur les variables didactiques assez proche de ce qui est proposé dans la ressource. Cela a bien permis l'émergence des conversions entre unités pour certains élèves qui ont réussi à adapter les conversions en fonction des contraintes posées par l'enseignante. Cependant il semble qu'un nombre non négligeable d'élèves reste en difficulté puisque ceux-ci n'écrivent que des nombres à un chiffre pour chaque unité. Le jeu sur les contraintes n'est pas suffisant pour leur permettre de dépasser cette erreur.
Ces difficultés pourraient être liées au fait que les élèves ne s'autorisent pas à faire un dessin pour réaliser des groupements (ou dégroupements) mais aussi à l'absence de travail préalable sur les conversions entre unités dans la situation de dénombrement. Ce dernier point ne permet pas aux élèves de contrôler les réponses (justes ou erronées). C'est l'enseignante qui prend en charge ce contrôle, mais les conversions qui apparaissent principalement pour vérifier les réponses erronées des élèves, se font uniquement à l'oral. Les techniques et technologies en jeu ne sont pas institutionnalisées.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de Mme E (deuxième partie de sa séquence)

Activités proposée : directement extraite de la ressource ou non (n° séance observée)	Types de tâches / *contexte*	Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)
Variante S_{Cv1} « Marchand de bûchettes » (S3)	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	Quelques conversions apparaissent lors des vérifications des réponses des élèves.
Variante S_{Cv2} « Commandes de timbres » (en deux séances)	Commander une collection (décomposer un nombre). *Timbres.*	*Non observée.*
Exercices d'entraînement sur ardoise	Conversions et nombre de. *Hors contexte.*	*Non observée.*
Exercices sur cahier : conversions et nombre de.	Conversions et nombre de. *Hors contexte. Exemples :* 13 centaines = …, 28 dizaines et 3 centaines = … Combien y'a-t-il de centaines dans un millier ? Combien de centaines dans 1097 ? dans 1998 ?	*Non observée.*

Figure 111 : tableau de déroulement de la deuxième partie de la séquence de Mme E

Il n'y a pas de trace écrite de synthèse dans les cahiers des élèves. Mme E a fait une affiche montrant un exemple de décomposition d'un nombre :



Les savoirs en jeu sont invisibles sur cette unique trace écrite de synthèse.
Pour la variante des commandes de timbres, elle signale qu'elle l'a découpée en deux séances pour ne pas travailler tout de suite le nombre de carnets de dix. Ils ont utilisé les deux types de commande : par défaut et par excès (« à chaque fois on mettait les deux possibilités »). Dans l'entretien final elle évoque aussi la difficulté que pose le changement de contexte pour les élèves : « Ça pose un problème à chaque fois que l'on change de matériel. Un timbre c'est un vrai objet, on n'est plus dans un matériel de numération ».
Mme E a proposé des exercices de conversions entre unités et « nombre de » après les commandes. Elle ne reprend pas l'exemple proposé dans la ressource de conversions entre unités de numération (par exemple entre centaines et milliers).
Il est possible que ce choix pour les derniers exercices de la séquence ait été influencé par les exercices proposés dans l'évaluation sur les nombres à quatre chiffres (envoyée en fin de séquence).
Mme E a fait une évaluation de fin de période au mois de décembre (pendant sa séquence). Les tâches évaluées sur la numération sont écrire/nommer et décomposer en EPDC. On retrouve ici l'influence des contraintes institutionnelles. Il y a donc un certain décalage entre la séquence proposée et cette évaluation : tout le travail mettant en jeu le principe décimal de la numération n'est pas évalué et nous n'avons pas relevé d'exercices spécifiques au cours de la séquence sur les tâches évaluées.

Conclusion sur la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de Mme E

La première séance (S_{Cv1}) permet de mettre en jeu des conversions variées. Un certain nombre d'élèves rencontrent des difficultés dans le dépassement de l'erreur d'écriture de

nombres à un chiffre pour chaque unité, ce qui pourrait être lié au fait d'avoir proposé trop de cas sans contrainte.
L'enseignante n'institutionnalise pas les techniques et technologies citées dans la ressource. Dans les phases collectives de conclusion elle fait un travail de vérification des commandes erronées des élèves. La seule trace écrite de synthèse proposée par l'enseignant dans cette deuxième partie de sa séquence concerne un exemple de décomposition qui ne met pas en évidence de conversion entre unités. Un exercice de conversions décontextualisé est toutefois proposé en fin de séquence ; il s'agit de convertir toujours en unités simples, conformément aux conversions qui sont principalement travaillées dans la séance observée, sous la responsabilité de l'enseignante pour les vérifications des réponses des élèves.

II.4 Analyse de la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de M. B

Variante S_{Cv1} : « Marchand de bûchettes »

<u>Description du déroulement</u>
En annexe III.3.

<u>Choix de M. B</u>
M. B ne propose qu'un seul type de tâches dans cette séance : celui correspondant au problème des commandes (décomposer un nombre). Il commence et termine par des cas sans contrainte. Pour les cas avec contraintes il utilise des contraintes variées qui permettent de mettre en jeu des relations entre différentes unités.
Le fait que le dernier cas soit sans contrainte nous semble lié à une volonté de la part de M. B de terminer les séances par des cas plus faciles permettant la réussite de tous les élèves, comme cela avait été observé pour le jeu des paris (séance précédente).
M. B a préparé une fiche sur laquelle tous ces cas sont écrits à l'avance (voir en annexe III.3, dans la description de la séance). Les unités disponibles sont écrites en unités de numération et dessinées (une seule pour chaque unité). Un bon de commande avec unités de numération est utilisé pour que les élèves écrivent leur réponse.
M. B propose trois cas avec le même nombre. On peut penser qu'il cherche à montrer aux élèves qu'un nombre peut avoir des décompositions différentes.
Pour l'organisation de la classe, M. B a choisi de laisser les élèves chercher individuellement chaque commande, puis d'organiser un travail de groupes (par deux) pour vérifier les réponses trouvées (avec possibilité de changer de commande éventuellement) et enfin de faire une phase de conclusion collective. Pour leur recherche, les élèves ont un cahier. M. B les autorise à aller voir le matériel disposé au fond de la classe si besoin.

<u>Tableau synoptique du déroulement</u>

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches</th><th>Phases. Organisation</th><th>Techniques et <u>éléments technologiques</u></th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">Commander une collection de bûchettes (décomposer un nombre)</td><td rowspan="5">Présentation du problème. Collectif</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="4">Commande de 2615 bûchettes</td><td rowspan="4">Recherche. Individuel</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>10</td><td rowspan="64">Commande de 2615 bûchettes, pas de millier.

Commande de 2615 bûchettes, pas de centaine

Commande de 3167 bûchettes, seulement 1 millier de bûchettes.

Commande de 4020 bûchettes.</td><td rowspan="25"></td><td rowspan="25"></td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
<tr><td>33</td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td><td rowspan="8">Vérification.
Par groupes de 2 élèves.</td><td rowspan="8"></td></tr>
<tr><td>36</td></tr>
<tr><td>37</td></tr>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
<tr><td>41</td></tr>
<tr><td>42</td></tr>
<tr><td>43</td><td rowspan="31">Conclusion.
Collectif</td><td rowspan="31">Deux techniques de vérification :
- Par le calcul : par exemple pour 2 milliers, 6 centaines, 1 dizaine, 5 unités on cherche combien de bûchettes avec deux milliers : deux mille, etc. Puis calcul : 2000 + 600 + 10 + 5 = 2615. Pour 0 millier, 26 centaines, 1 dizaine, 5 unités on cherche combien de bûchettes avec vingt-six centaines : deux-mille-six-cent, etc. puis on calcule : 2600 + 10 + 5 = 2615.
- Par le tableau de numération : pour 2 milliers, 6 centaines, 1 dizaine, 5 unités on place les chiffres correspondants dans le tableau :<table><tr><td>M</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr></table>Pour 0 millier, 26 centaines, 1 dizaine, 5 unités on place les nombres dans le tableau :<table><tr><td>M</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td>0</td><td>26</td><td>1</td><td>5</td></tr></table>puis on « transfère » le 2 des centaines dans les milliers, en effaçant le zéro.

NB : pour savoir si vingt-et-une centaines font deux-cent-dix, comme le dit un élève, M. B utilise aussi la technique de vérification par comptage oral en unités simples avec le matériel : cent, deux-cents, … deux-mille-cent.</td></tr>
<tr><td>44</td></tr>
<tr><td>45</td></tr>
<tr><td>46</td></tr>
<tr><td>47</td></tr>
<tr><td>48</td></tr>
<tr><td>49</td></tr>
<tr><td>50</td></tr>
<tr><td>51</td></tr>
<tr><td>52</td></tr>
<tr><td>53</td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>55</td></tr>
<tr><td>56</td></tr>
<tr><td>57</td></tr>
<tr><td>58</td></tr>
<tr><td>59</td></tr>
<tr><td>1h00</td></tr>
<tr><td>1h01</td></tr>
<tr><td>1h02</td></tr>
<tr><td>1h03</td></tr>
<tr><td>1h04</td></tr>
<tr><td>1h05</td></tr>
<tr><td>1h06</td></tr>
<tr><td>1h07</td></tr>
<tr><td>1h08</td></tr>
<tr><td>1h09</td></tr>
<tr><td>1h10</td></tr>
<tr><td>1h11</td></tr>
<tr><td>1h12</td></tr>
<tr><td>1h13</td></tr>
</table>

Figure 112 : tableau synoptique du déroulement de S_{Cv1}, classe de M. B

Analyse du déroulement

Du côté des élèves.

Rappelons qu'il n'y a que six élèves de CE2 dans la classe. Cela a permis une observation de chacune de leurs réponses (ces réponses sont données en annexe III.3, dans la description de la séance). Deux élèves font des erreurs dès la première commande (2615 sans contrainte). Ces erreurs sont difficilement interprétables (1M 5C 0D 4U et 200M 0C 80D 5U), il est difficile d'en comprendre l'origine. Ces élèves vont ensuite faire des erreurs pour toutes les autres commandes (hormis peut-être pour un des deux dont nous n'avons pas observé le résultat pour la dernière commande). On voit donc l'intérêt d'organiser une phase collective de conclusion après la recherche des premiers cas sans contraintes.
Parmi les quatre autres élèves, un seul réussit les cas avec contrainte (avec une erreur pour la quatrième commande : 60C au lieu de 6C). Cet élève utilise l'unité d'ordre immédiatement inférieur pour constituer les unités absentes du stock (par exemple 20C pour faire 2M). Les autres élèves ne font pas de conversion (ils réussissent les cas sans contrainte). Parfois ils ne tiennent pas compte de l'unité absente (par exemple pour la deuxième commande un élève écrit 0M 1C 6D 5U) ou bien ils ajoutent le nombre correspondant à l'unité absente au nombre d'unités de l'ordre immédiatement inférieur ou supérieur (par exemple pour la deuxième commande deux élèves écrivent 0M 8C 1D 5U, pour la troisième commande, l'un des deux écrit 8M 0C 1D 5U). Ces élèves ne cherchent pas à faire un dessin pour réaliser la collection mais tentent plutôt une « manipulation » directe à partir de l'écriture chiffrée. Ils ajoutent ainsi des milliers et des centaines, par exemple, mais sans convertir les milliers en centaines.
M. B leur laisse la possibilité de vérifier leurs commandes, d'abord tout seuls, avec le matériel s'ils veulent (il propose avec le matériel ou bien avec le dessin ou encore avec un tableau de numération), puis à deux. Nous avons pu constater que cette vérification n'est pas sans poser de difficultés aux élèves. Nous avons par exemple observé un élève dénombrer sa commande (comptage en unités simples avec matériel) et trouver un nombre différent de ce qui était demandé tout en validant sa commande. Un autre dessine 12 sachets, 10 paquets et 5 bûchettes et écrit que ça fait bien 2615. Un troisième élève vérifie avec le tableau de numération, mais avec des erreurs dans le placement des nombres. Par exemple 1M 21C 60D 7U devient :

c	d	u	c	d	u
0	2	1	0	0	0
0	0	6	0	0	0
0	0	0	0	0	7
0	2	7	0	0	7

Ainsi les connaissances supposées construites dans la situation de dénombrement (en particulier ici pour dénombrer une collection partiellement groupée avec le tableau de numération) ne fonctionnent pas ici comme critère de validité. Si un travail avait été fait, avant de passer à cette situation, sur les conversions entre unités, cela aurait pu permettre un meilleur contrôle de leurs réponses de la part des élèves.

Gestion de la phase collective de conclusion par l'enseignant.
Lors du travail de vérification par groupes de deux, les élèves n'arrivent pas toujours à se mettre d'accord sur une réponse commune. Cela rejoint donc le constat précédent de manque de connaissance pour les conversions et entraîne certains dérives : les élèves gardent chacun leur réponse ou bien un élève change systématiquement pour avoir les mêmes réponses que son voisin (même si elles sont fausses).

Il nous semble donc que cette étape n'a pas vraiment permis d'engager les élèves dans un travail autour des conversions entre unités, comme on pouvait le prévoir. Nous n'avons pas observé le groupe dans lequel se trouvait l'élève qui a effectué les conversions.
Le choix de M. B de proposer tous les cas à chercher avant de faire une conclusion collective présente donc certains inconvénients puisque les élèves ne réussissent pas à vérifier par eux-mêmes leur réponse et ne cherchent donc pas à modifier leur technique. Ils ne prendront conscience de leurs erreurs que lors de la phase collective, mais ils ne pourront alors plus chercher une autre stratégie.
Lors de la phase collective finale de conclusion, M. B revient sur chacune des commandes successivement en demandant les réponses de tous les groupes et en les vérifiant par deux méthodes différentes. Il ne demande jamais aux élèves leur technique directe (pour passer de l'écriture en chiffres à la décomposition en unités), mais seulement leur commande. A partir de ces commandes il montre deux vérifications permettant de remonter de la commande à l'écriture chiffrée. Ainsi les techniques directes sont invisibles durant toute la séance.
Concernant ces deux techniques de vérification, il apparait que l'utilisation des EAC amène l'enseignant à faire des conversions en unités simples alors que l'utilisation du tableau de numération l'amène à faire des conversions entre unités d'ordres consécutifs (dans les deux cas ces conversions sont parfois implicites). Nous allons préciser cela.

Première méthode de vérification introduite par l'enseignant : conversions.
La première méthode de vérification consiste à déterminer le nombre d'unités simples correspondant à chaque unité. Par exemple pour la commande de 2165 bûchettes, sans millier, il y a trois propositions différentes : 8C 6D 5U, 20C 61D 5U et 21C 6D 5U. La vérification consiste à donner le nombre de bûchettes pour 8C, puis 6D et 5U et à recomposer le nombre obtenu (800 + 60 +5). La vérification de cette première proposition met en jeu des connaissances anciennes. Pour les autres la difficulté consiste à trouver le nombre de bûchettes dans 20C et 61D ou bien dans 21C. C'est M. B qui prend en charge cette vérification en demandant le nombre de bûchettes dans une poche puis dans deux et en concluant que vingt centaines ça fait deux-mille. Il repasse donc systématiquement par les unités simples. Pour 61D les élèves ne savent pas. M. B se met alors à compter : un, deux, …, soixante-et-un sans que ce comptage ne permette davantage de trouver la réponse. Il conclut alors que ça fait « six-cent-dix ». Le procédé est le même pour les autres commandes. Finalement durant toute cette phase, la technique d'écriture d'un nombre supérieur à dix unités d'un certain ordre en unités simples restera invisible. C'est pourtant un point crucial de la séance puisque cela met en jeu les conversions entre unités et pourrait permettre aux élèves de se construire une technique pour faire ces conversions directement à partir de l'écriture en chiffres (technique directe).
Il aurait été possible ici pour M. B d'écrire les conversions en unités de numération au tableau. Par exemple pour 61D : 10D = 1C, donc 60D = 6C et 61D = 6C 1D = 610 ou directement 10D = 1C donc 60D = 6C et 61D = 6C 1D = 610. D'ailleurs M. B nous a signalé avant le début de la séance qu'il souhaitait justement reprendre ce qui est proposé sur le site, les écritures du type : 21 centaines = 20 centaines + 1 centaine = 2 milliers + 1 centaine. Dans le feu de l'action, il ne les utilise finalement pas. Même si certaines relations sont évoquées à l'oral (dix paquets de cent ça fait mille, il faut dix paquets de cent pour avoir un millier de bûchettes) elles sont peu nombreuses et toujours dans le contexte des bûchettes. Il n'y a pas de conversion avec unités de numération écrites au tableau.

Deuxième méthode de vérification introduite par l'enseignant : utilisation du tableau de numération.

La deuxième méthode de vérification amenée par M. B consiste à écrire la commande dans un tableau de numération puis à effectuer des transformations dans le tableau de façon à avoir un seul chiffre par colonne. La raison de ces transformations qui apparait dans la classe est le fait que l'on ne peut pas écrire un nombre à deux chiffres dans le tableau de numération (comme l'indiquent une élève puis M. B). Cela pourrait faire partie du contrat lié à l'utilisation du tableau. M. B explique par exemple, pour vérifier la commande de 20C 61D 5U : « si je mets vingt centaines ici, je ne peux pas le garder comme ça ». Cela l'amène alors à faire des « transferts » de chiffres d'une colonne à l'autre : « le deux il faut le transférer dans les mille » (toujours pour les 20 centaines). Pour cette commande il justifie par la conversion entre unités : « J'ai vingt centaines, ça fait deux milliers » puis pour 26C : « vingt-six centaines c'est aussi deux milliers et six centaines ». Ce n'est pas le cas pour les commandes suivantes où les élèves expliquent juste le transfert à effectuer (par exemple pour 1M 21C 6D 7U un élève dit qu'il faut mettre le deux dans les milliers). Les unités de numération sont alors principalement utilisées pour nommer les colonnes du tableau. M. B n'attend pas des élèves qu'ils explicitent les conversions justifiant ces « transferts ».
En fin de séance lorsque M. B écrit 4 dans la colonne des milliers et 2 dans celle des dizaines, il apparaît un autre élément du contrat lié à l'utilisation du tableau : il faut écrire les 0 en cas d'absence d'unités isolés à certains ordres (comme dans l'écriture chiffrée). En effet, suite à une question d'un élève sur le 0 de la colonne des centaines, M. B explique qu'on « est obligé de le mettre ».
Il considère donc les règles d'écriture liées à l'écriture en chiffres comme règles d'utilisation du tableau de numération. D'ailleurs quand le nombre est écrit dans le tableau de numération, son écriture en chiffres n'est pas donnée à côté. Réciproquement, dans le tableau de numération, seule l'écriture avec un seul chiffre par colonne et avec les 0 lors de l'absence d'unité isolée est conservée au tableau. Les autres écritures sont effacées, elles ne sont que provisoires. Il n'y a donc pas de trace des conversions effectuées dans le tableau[131].

Institutionnalisation des savoirs.

Il n'y a pas de synthèse de fin de séance (tout comme pour la séance précédente). Ce que M. B met en avant au cours de la séance, ce sont les deux techniques de vérification présentées ci-dessus. Les techniques directes sont invisibles. Les conversions, même si elles sont aussi en jeu dans les vérifications proposées, ne sont pas institutionnalisées.
M. B n'institutionnalise pas non plus la possibilité d'avoir différentes décompositions pour un même nombre, même si les cas qu'il propose s'y prêtent bien (trois décompositions différentes de 2615).

[131] Par exemple une écriture sur plusieurs lignes comme ci-dessous permettrait d'avoir une telle trace (pour 20C 61D 5U qui met en jeu deux conversions) :

M	C	D	U
0	20	61	5
2	0	61	5
2	6	1	5

La valence instrumentale du tableau pour les conversions pourrait ainsi être mise en évidence.

Conclusion

M. B choisit de faire chercher les élèves sur différentes commandes et d'organiser une phase de conclusion collective seulement à la fin. Mais la vérification des commandes par les élèves leur pose des difficultés. Cela ne leur permet donc pas de prendre conscience de leurs erreurs ni d'élaborer une technique de conversion (seul un élève réussit les cas avec contrainte, mais dès le début de la recherche).

La phase collective ne permet pas, non plus, une prise en charge des conversions entre unités par les élèves. M. B prend la responsabilité de la vérification en proposant deux méthodes sans que leur justification soit un enjeu pour les élèves. La première met en jeu des conversions en unités simples, la deuxième s'appuie sur des « transferts » de chiffres d'une colonne à l'autre du tableau de numération dont la justification n'est jamais à la charge des élèves.

Finalement les conversions ne sont pas institutionnalisées par l'enseignant. Au mieux, elles apparaissent à l'oral dans la phase de conclusion (jamais à l'écrit), toujours sous la conduite de l'enseignant. Nous pensons que ce n'est pas suffisant pour permettre leur appropriation par les élèves.

M. B poursuit sa séquence avec la variante des commandes de timbres, que nous allons maintenant étudier.

Variante S_{Cv2} : « Commandes de timbres », classe de M. B

Description du déroulement

En annexe III.3.

Les choix de M. B

M. B travaille le type de tâches de commande de collections, dans le contexte des timbres. Il propose trois commandes (sur les quatre prévues sur la fiche). Pour la première, les élèves peuvent commander des plaques de 100 mais aussi des carnets et timbres à l'unité. Pour les deux autres ils ne peuvent commander que l'unité demandée..

A partir de la possibilité proposée dans la ressource de travailler les commandes par défaut ou par excès, M. B a choisi de faire les deux en commençant par le cas le plus facile (par défaut) et de travailler le nombre de centaines (deux premiers cas) et de dizaines (troisième cas) comme cela est proposé dans la ressource.

Comme dans la ressource, M. B ne propose pas de cas « simples » avant de poser le problème (ce qui fait une différence avec les autres séances).

M. B considère ces problèmes comme des problèmes de « vie courante » (entretien d'avant la séance). Il propose donc sur la fiche une organisation liée à la résolution de ce type de problème dans sa classe (contrat) : un cadre pour la recherche et une ligne pour écrire la phrase réponse.

Pour le déroulement, M. B change par rapport à la séance précédente, ce qui peut être lié à une discussion que nous avions eue à la suite de celle-ci où je lui avais indiqué que Mme E proposait une petite phase de correction entre chaque commande pour la variante des commandes de bûchettes. Ainsi, il alterne lui aussi recherche individuelle et conclusion collective pour chaque cas.

Tableau synoptique du déroulement

Temps	Tâches	Phases. Organisation	Techniques et éléments technologiques
1 2 3	Commander une collection : 2647 timbres.	Présentation. Collectif.	

<table>
<tr><td>4</td><td rowspan="30">Combien de plaques de 100 timbres ?</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="13">Recherche.
Individuel.</td><td rowspan="13"></td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="11">Conclusion.
Collectif.</td><td rowspan="11">Première technique : 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2647
Simplification d’écriture : (26×100 = 2600) + (4×10) + (1×7) = 2647
Deuxième technique : m c d u
2 6 4 7
26 centaines 4 dizaines 7 unités</td></tr>
<tr><td>24</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td></tr>
<tr><td>33</td></tr>
<tr><td>34</td><td rowspan="19">Commander une collection : 2324 timbres. Combien de plaques de 100 timbres ? Pas de plaque de 10, ni de timbres à l’unité.</td><td rowspan="3">Présentation.
Collectif.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
<tr><td>36</td></tr>
<tr><td>37</td><td rowspan="5">Recherche.
Individuel.</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
<tr><td>41</td></tr>
<tr><td>42</td><td rowspan="11">Conclusion.
Collectif.</td><td rowspan="11">Un élève explique sa technique ainsi :
m c d u
2 3 2 4
1
2 4 2 4
Il faut commander vingt-quatre plaques.</td></tr>
<tr><td>43</td></tr>
<tr><td>44</td></tr>
<tr><td>45</td></tr>
<tr><td>46</td></tr>
<tr><td>47</td></tr>
<tr><td>48</td></tr>
<tr><td>49</td></tr>
<tr><td>50</td></tr>
<tr><td>51</td></tr>
<tr><td>52</td></tr>
<tr><td>53</td><td rowspan="11">Commander une collection : 3409 timbres. Combien de plaques de 10 timbres ? Pas de plaque de 100, ni de timbres à l’unité.</td><td rowspan="2">Présentation.
Collectif.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>55</td><td rowspan="6">Recherche.
Individuel.</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>56</td></tr>
<tr><td>57</td></tr>
<tr><td>58</td></tr>
<tr><td>59</td></tr>
<tr><td>1h00</td></tr>
<tr><td>1h01</td><td rowspan="3">Conclusion.
Collectif.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>1h02</td></tr>
<tr><td>1h03</td></tr>
</table>

1h04			
1h05			

Figure 113 : tableau synoptique du déroulement de S_{Cv2}, classe de M. B

Analyse du déroulement

Du côté des élèves.

Pour la première commande les élèves utilisent soit une addition itérée de 100, de 10 et de 1 pour avoir 2647 ou un dessin de paquets de cent. Un seul élève n'arrive pas à résoudre. Il n'y a pas d'utilisation directe de la troncature pour déterminer le nombre de centaines. On peut remarquer un travail plus riche dans la phase de recherche que lors de la séance précédente où les élèves cherchaient une réponse directe dans le bon de commande. Cela peut être lié au fait que l'enseignant laisse ici un cadre pour la recherche et précise le contrat : utiliser ce cadre pour faire un dessin, une opération ou un tableau. On peut penser que les techniques utilisées relèvent du comptage en unités simples : les élèves contrôlent le nombre de « 100 » ou de paquets de cent dessinés par un comptage de cent en cent jusqu'à deux-mille-six-cent. Nous n'avons rien vu nous permettant de supposer l'utilisation d'une conversion. Pourtant ces techniques seront abandonnées lors de la recherche de la deuxième commande.

En effet, lors de la phase collective de conclusion de cette première commande, après la présentation de la technique par addition itérée par une élève, un élève fait remarquer qu'il suffisait de regarder le 26 de 2647. Il vient montrer cette technique au tableau. La formulation n'est pas reprise par l'enseignant mais il semble bien que les élèves s'en soient emparés. Pour la deuxième commande nous observons en effet quatre élèves qui trouvent directement le nombre de centaines (un élève utilise une multiplication par 100). Un autre fait une erreur en essayant d'utiliser cette technique (232 centaines). Elle est à nouveau formulée par un élève lors de la phase de conclusion de cette deuxième commande (il dit qu'il a pris les deux premiers chiffres).

Cela fait aussi une différence avec la séance précédente : les élèves peuvent s'appuyer sur la phase collective pour se construire une technique plus efficace.

Les élèves qui réussissent passent directement du comptage en unités simples à la technique de troncature. Ils n'utilisent apparemment pas les conversions, car la troncature n'est pas justifiée dans la classe. Or pour la dernière commande il faut adapter cette technique au cas du nombre de dizaines, ce qui nécessite de la contrôler avec les conversions entre unités (qui deviennent ici plus complexes : relation millier/dizaine et centaine/dizaine) ou bien avec la multiplication par 10 et 100 (le comptage est trop coûteux). Aucun élève n'arrive à faire cette adaptation pour trouver le nombre de dizaines dans un nombre à quatre chiffres. Le travail qui a été fait dans la classe avant ce cas ne leur en donne pas les moyens.

Enfin, nous avons noté des difficultés importantes de la part des élèves dans cette séance concernant la réponse à apporter (nombre de plaques de cent timbres par exemple) après la recherche. Les élèves font par exemple des confusions entre le nombre total de timbres et le nombre de plaques de cent. Pour la première commande, trois élèves ont une technique correcte mais ne concluent pas correctement. Cette difficulté est amplifiée avec la deuxième commande où les élèves doivent commander le nombre de plaques de cent par excès. On retrouve alors deux élèves qui concluent par le nombre total de timbres et un autre par le nombre de plaques par défaut (23 au lieu de 24).

Gestion des phases collectives de conclusion.

Comme dans la séance précédente, M. B s'attache, dans les phases de conclusion, à vérifier les différentes commandes proposées par les élèves, en particulier les réponses erronées. Par exemple pour la première commande il évalue 26 centaines mais fait vérifier 40 dizaines (en passant par le tableau de numération avec transfert du 4 dans la colonne des centaines). Pour la deuxième commande un élève signale que 23 centaines est égal à 2300 car on rajoute les zéros à droite. La règle des zéros apparaît alors comme un moyen de contrôle. Ce sera aussi le cas pour la dernière commande où l'enseignant fait vérifier 3500 carnets de 10 par la multiplication 3500x10. Cette règle apparait comme un moyen de contrôle efficace, mais finalement les conversions entre unités de numération n'apparaissent pas, que ce soit dans les techniques utilisées par les élèves dans les phases de recherche ou dans les vérifications effectuées en collectif. Elles permettent de justifier la technique de troncature ou de multiplication par 100 ou 10, mais cette justification n'est pas un enjeu pour l'enseignant.

Institutionnalisation des savoirs.
M. B n'institutionnalise pas de savoirs. Il laisse des élèves formuler leur technique mais ne fait pas de synthèse finale sur ce qu'il y a à retenir de cette séance. Pour des raisons pratiques, la séance s'arrête alors que la conclusion du dernier cas n'est pas terminée.
Le lien avec la variante précédente n'est pas explicité, ni par les élèves, ni par l'enseignant. Il semble pourtant que des élèves ont fait ce lien puisque certains ont dessiné des poches pour les plaques de cent timbres. Mais l'enseignant ne revient pas sur ce lien, ce qui est peut-être lié au fait que la séance s'arrête au cours de la dernière phase collective.
Notons aussi que l'enseignant utilise principalement les expressions plaques de cent, carnet de dix lors des phases collectives, et non les unités de numération qui sont pourtant utilisées par des élèves. L'ostensif utilisé pour décrire les unités dans la consigne du problème semble donc avoir une influence importante sur l'ostensif utilisé dans les phases collectives. Cela pourrait être lié pour cette séance au fait que la décontextualisation et plus généralement l'institutionnalisation des connaissances construites par les élèves n'est pas un objectif de l'enseignant.

<u>Conclusion</u>
Les élèves font une recherche plus riche que dans la séance précédente : ils utilisent des techniques de comptage en unités simples (par dessin ou addition itérée). La phase collective permet à un élève de montrer la troncature que des élèves vont s'approprier pour le cas suivant. Cependant la commande de carnets de dix apparaît comme un saut très important pour les élèves qui n'arrivent pas à adapter leur technique. Cela pourrait être lié à l'absence de visibilité des éléments technologiques en jeu (les conversions entre unités de numération) sur lesquels il semble nécessaire de s'appuyer pour cette adaptation.

Récapitulatif de la mise en œuvre de la situation de dénombrement dans la classe de M. B (deuxième partie de sa séquence)

Activités proposée : <u>directement extraite de la ressource</u> ou non (n° séance observée)	**Types de tâches / *contexte***	**Principaux éléments de savoirs institutionnalisés (techniques et technologies)**
<u>Variante S_{Cv1} « Marchand de bûchettes » (S2)</u>	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	Deux techniques de vérification de commandes sont mises en évidence dans les phases collectives : par le calcul et par le tableau de numération (« transfert »).
Exercices d'entraînement « Marchand de bûchettes ?	Commander une collection (décomposer un nombre). *Bûchettes.*	*Non observée.*

»		
Variante S_{Cv2} « Commandes de timbres » (S3)	Commander une collection (décomposer un nombre). *Timbres.*	L'enseignant n'institutionnalise pas de savoir ou savoir-faire.
Exercices d'entraînement « Commandes de timbres ».	Commander une collection (décomposer un nombre). *Timbres.*	*Non observée.*
Exercices d'entraînement	Dénombrer une collection représentée (déjà groupée) et écrire un nombre en chiffres à partir d'écritures diverses (EUN, EAC, EPDC, nom du nombre). *Hors contexte.*	*Non observée.*
Situation complémentaire : « Jeu des familles »	Déterminer différentes décompositions d'un nombre. *Hors contexte.*	*Non observée.*
Situation complémentaire : « Avec la calculatrice »	Avancer/reculer dans la suite écrite. *Hors contexte.*	*Non observée.*

Figure 114 : tableau de déroulement de la deuxième partie de la séquence de M. B

M. B propose des séances d'exercices d'entraînement après les deux séances observées. Il revient ensuite sur des exercices de dénombrement de collections avant de proposer des situations complémentaires du site permettant de travailler les décompositions variées de nombres hors contexte (jeu des familles) ainsi qu'avancer/reculer dans la suite écrite en utilisant les décompositions variées de nombres.
M. B n'a pas proposé d'évaluation au cours de la séquence, il en propose seulement une quelques semaines après la dernière situation. Sa séquence s'étale sur un temps assez long (plus de deux mois). M. B n'a pas réalisé de trace écrite (ni dans les cahiers, ni sur une affiche).

Conclusion sur la mise en œuvre de la situation de commande dans la classe de M. B

Dans la variante S_{Cv1} (marchand de bûchettes), les difficultés prévues apparaissent. Cela peut être lié à l'utilisation du bon de commande et au fait que l'on commence par proposer des décompositions sans contrainte. Il n'y a pas de technique institutionnalisée par l'enseignant qui ne montre que des techniques de vérification des commandes proposées par les élèves. Le choix d'organisation de la séance ne permet pas aux élèves de s'appuyer sur la phase collective pour se relancer dans une recherche. Cependant M. B propose une séance d'exercices d'entraînement reprenant cette variante.
Dans la variante S_{Cv2}, les commandes de timbres, nous n'observons pas d'utilisation de la technique de troncature pour la première commande, ce qui peut être lié au changement de contexte. Les élèves semblent utiliser des techniques de comptage en appui sur un dessin ou une addition itérée. Ces techniques n'étaient pas apparues dans la séance précédente, ce qui peut être lié au fait de demander la réponse dans les bons de commande. La troncature est formulée par des élèves lors des phases collectives. Cependant ils n'arrivent pas à adapter cette technique au cas de la recherche du nombre de dizaines qui apparaît comme un saut important.
De plus il n'y a toujours pas de savoirs institutionnalisés par l'enseignant. M. B se centre toujours sur la vérification des réponses des élèves (principalement les réponses erronées). Les conversions entre unités de numération restent invisibles. Cependant la reprise de la situation de commande ainsi que le travail sur la recherche de différentes décompositions (jeu des familles) dans des exercices peut permettre à des élèves d'élaborer une technique

de troncature et/ou à l'enseignant de la mettre en évidence. Il nous semble cependant peu probable qu'elle ait été mise en relation avec les conversions entre unités de numération.

III. Retour sur l'analyse *a priori* de la situation de commande et sur sa description dans la ressource

Nous organisons le retour sur la situation de commande de la même manière que pour la situation de dénombrement (cf. chapitre 9, §III). Ce retour concerne principalement la variante S_{Cv1} (« marchand de bûchettes ») qui a été observée dans les quatre classes du groupe de travail, alors que S_{Cv2} (« commandes de timbres ») n'a été observée que dans une classe. Nous évoquerons rapidement cette dernière à la fin.

Les choix des valeurs des variables didactiques dans la mise en scène de la SF et leur description dans la ressource.

<u>Les contraintes sur le stock du marchand</u>
A partir des exemples de commandes avec contraintes proposés dans la ressource nous avons pu observer des différences dans le choix des contraintes faits par les enseignants. Ces différences peuvent traduire des choix au niveau de l'enjeu de la séance. Par exemple, Mme A ne propose que des cas avec absence de millier (dans le stock), ce qui semble lié à une volonté de travailler uniquement le lien entre centaine et millier pour le moment (nombre de centaines dans un nombre à quatre chiffres). Mme F choisit les contraintes suivantes : pas de millier et pas de millier ni centaine, ce qui pourrait traduire une volonté de travailler le « nombre de » centaine et dizaines dans un nombre à quatre chiffres. Mais cela occasionne un blocage chez les élèves qui n'ont pas les moyens de trouver le nombre de dizaines. Ce constat renforce notre choix de limiter les conversions à deux unités d'ordres consécutifs.
Enfin, conformément à ce qui est proposé dans la ressource, deux enseignants (Mme E et M. B) utilisent diverses contraintes (pas de centaine, 1 seul millier, pas de dizaine, etc.) ce qui pourrait traduire une volonté de travailler des conversions plus variées (centaines/dizaines, dizaines/unités). Mais il est difficile de connaître précisément l'enjeu des enseignants car ils n'institutionnalisent pas de savoir ou savoir-faire en fin de séance. Nous y reviendrons.
Pour les cas avec contraintes il est possible de limiter le nombre d'unités de chaque ordre pour amener les élèves à ne pas commander 2165 bûchettes à l'unité par exemple comme cela est indiqué dans la ressource. Aucun enseignant ne l'a fait. En fait ce type de commande en unités simples n'est apparu que dans deux classes : celle de Mme A et Mme F. La première l'a accepté et la deuxième a suggéré que ce type de commande était trop long à réaliser. Nous estimons qu'il n'est donc pas nécessaire de surcharger la description de la situation avec cela mais juste de signaler le problème aux enseignants et les laisser le gérer.
Concernant notre choix de mise en scène de la SF avec des contraintes variées, il nous apparaît *a posteriori* judicieux de simplifier cette variante en jouant uniquement sur la présence/absence d'unités à un certain ordre dans le stock afin de clarifier l'enjeu en visant l'élaboration de techniques directes de décompositions à partir de l'EC comme la troncature (1234 = 12C 34U par exemple) mais aussi éventuellement d'autres décompositions comme par exemple 1234 = 1M 23D 4U ou 1234 = 1M 2C 34U, etc. Les cas « pas de millier » ou « pas

de centaine » (un à la fois) sont à privilégier. Les cas avec contraintes plus complexes sur le stock pourraient être proposés en exercice.

La taille des nombres à commander

Cette variable didactique n'est pas explicite dans la ressource. Nous observons une progressivité dans la taille des nombres proposés dans toutes les classes mais, pour les deux enseignantes qui proposent plusieurs cas de commandes sans contrainte, le premier avec contrainte se trouve alors être un nombre supérieur à 4000, car elles continuent d'augmenter la taille des nombres malgré l'introduction des contraintes (8004 pour Mme F et 4653 pour Mme E). Ce qui est proposé dans la ressource ne permet pas une vigilance des enseignants sur la taille des nombres, au moins pour le premier cas avec contrainte. Or l'analyse *a priori* a montré que certaines techniques sont très coûteuses avec de grands nombres : comptage à partir d'un dessin ou d'une addition itérée de 100 ou conversions à partir d'un dessin de la collection. Cela réduit donc les possibilités pour les élèves[132].

De plus, la taille des nombres influence la difficulté des conversions. En effet, même les élèves qui utilisent les conversions entre unités ne le font peut-être pas encore directement, comme par exemple 4M = 40C. Certains peuvent utiliser plusieurs fois de suite[133] la relation 1M = 10C, pour en déduire que 4M = 40C.

Enfin, le fait d'avoir un nombre pas trop élevé de milliers permet à l'enseignant d'utiliser le matériel lors de la phase collective pour faire ou défaire des groupements si besoin. C'est ce qui a, semble-t-il, gêné Mme F dans le fait d'avoir un grand nombre.

Il faut donc prévoir de modifier la ressource pour rendre la description de cette variable didactique plus explicite. En particulier il est possible d'indiquer aux enseignants de ne pas prendre des nombres trop grands pour le premier cas avec contrainte.

Les erreurs, les connaissances prévues dans l'analyse a priori *et leur description dans la ressource*

Commandes sans contrainte

Les premières commandes sans contrainte ne semblent pas poser de difficulté aux élèves. Dans la classe de Mme A, dès la première commande sans contrainte, un élève propose de commander des centaines pour faire des milliers (26C pour 2615), ce qui permet tout de suite de mettre cette possibilité d'avoir un nombre à deux chiffres dans le contrat. Du coup, le cas qui suit (pas de millier) pose moins de difficulté que dans les autres classes. Cela peut aussi être lié au fait que, dans cette classe, les élèves se sont davantage entraînés aux conversions dans des exercices suite aux situations de dénombrement, ce qui est conforme à nos hypothèses.

Commandes avec contraintes

Dans les classes de Mme F, Mme E et M. B nous observons des difficultés importantes chez les élèves pour les commandes avec contraintes. Les erreurs principales sont celles prévues dans l'analyse *a priori* : les élèves ne tiennent pas compte des conversions et cherchent à

---

[132] Le choix de Mme F (8004 pour la première commande sans millier) est peut-être la principale cause des difficultés rencontrées par les élèves dans sa classe. C'est ce qu'elle nous dira d'ailleurs lors de l'entretien final. Au contraire, dans la classe de Mme A le premier cas avec contrainte (2615, pas de millier) permet à la plupart des élèves d'utiliser une techniques s'appuyant sur le dessin de la collection.

[133] Nous l'avons constaté lorsqu'un élève de Mme A explique sa technique de façon contextualisée au matériel par un raisonnement que l'enseignante résume ainsi au tableau : « 10 sachets : 1 boite, 10 sachets : 1 boite, 6 sachets ». Cela serait plus difficile à faire pour le nombre 8004 où il faudrait itérer huit fois ce processus, ce qui amène à utiliser un raisonnement multiplicatif : si 1M = 10C, 8M c'est 8 fois plus, donc 8 fois 10C soit 80C.

écrire des nombres à un seul chiffre pour chaque unité, comme dans une décomposition canonique. Par exemple dans le cas d'absence de millier, ils ne donnent que le nombre de centaines, dizaines et unités isolées ou ajoutent le nombre de centaines isolées au nombre de milliers (par exemple 6C 1D 5U ou 8C 1D 5U pour 2615). Seule une minorité d'élèves dans ces classes réussit le premier cas avec contrainte (pas de millier) dès la première phase de recherche individuelle. Ce type d'erreur peut s'interpréter par un phénomène de contrat. La situation de commande vise justement une rupture de ce contrat pour montrer qu'un nombre peut se décomposer de différentes manières, même si les élèves ont déjà dû rencontrer cela pour les nombres inférieurs à mille. Nous observons aussi des erreurs où les élèves obtiennent des nombres à plusieurs chiffres pour certaines unités. Elles sont plus rares et plus difficilement interprétables.
Les élèves ne perçoivent pas toujours spontanément leurs erreurs, même dans le cas de réponses comme 6C 1D 5U ou 8C 1D 5U alors qu'ils doivent commander plus de mille bûchettes. Nous l'avons observé en particulier dans une classe quand l'enseignant demande aux élèves de vérifier leur commande lors de la phase de recherche individuelle.
Une fois la première commande sans millier trouvée par au moins un élève, même si sa technique n'est pas formulée, nous avons observé que les autres élèves peuvent se reconstruire une technique de troncature par induction à partir de ce premier exemple, peut-être tout simplement prendre les deux chiffres situés à gauche pour le moment. Cependant en l'absence d'éléments technologiques (conversions) accompagnant cette technique, conformément à nos prévisions, nous avons pu observer que son adaptation à d'autres contraintes sur le stock du marchand est rendue difficile. Les élèves ne savent pas quels chiffres il faut utiliser. Les conversions semblent nécessaires pour la généralisation de la technique de troncature. Comme nous l'avons souligné pour la situation de dénombrement il est possible que la ressource ne mette pas suffisamment en avant les liens entre les situations : quand l'enseignant travaille sur le dénombrement, la ressource ne lui permet pas de prendre conscience de l'intérêt de faire faire des conversions aux élèves pour la suite de la séquence.
Il est possible que l'absence d'explicitation des conversions entre unités, notamment à l'écrit, ait pour conséquence de créer des différences importantes entre les élèves. Certains se construisent des techniques mentales s'appuyant éventuellement sur ces relations, d'autres restent bloqués car ils envisagent difficilement la possibilité de faire des unités d'un certain ordre en utilisant des unités de l'ordre immédiatement inférieur. Cela pourrait être un des éléments à institutionnaliser pour cette variante.

Le choix des ostensifs et leur description dans la ressource

<u>La désignation du nombre à commander</u>
Pour le nombre qui est à commander, trois enseignants le donnent en chiffres, ce qui est lié au fait qu'ils utilisent une fiche sur laquelle les différentes commandes sont écrites. Mais un de ces enseignants, qui commence par donner trois cas qui ne sont pas sur la fiche, n'écrit le nombre au tableau que pour le premier. Une autre n'a pas donné de fiche aux élèves. Elle donne alors uniquement le nombre à l'oral. Cela pourrait être un choix de sa part pour laisser aux élèves la responsabilité de l'écriture en chiffres. Mais cela pourrait aussi

confirmer le constat de transparence du lien entre écrit et oral observé lors de la situation de dénombrement[134].

La désignation des groupements pour la commande : les bons de commande

Il est possible que le format des « bons de commande » restreigne l'activité des élèves en ne laissant aucune place aux essais de conversion par exemple. Ce qui nous fait penser cela est le fait que dans le cas d'une enseignante (Mme A) qui ne les utilise pas et qui laisse les élèves chercher sur une feuille, cela permet à certains élèves de faire des dessins quand les nombres ne sont pas trop élevés. Dans les autres classes nous n'avons pas observé d'élèves faire des dessins des collections pour faire des groupements. De plus, Mme A nous a indiqué qu'elle a utilisé les bons de commande dans la séance suivante mais que les élèves ont rencontré alors beaucoup plus de difficultés que dans la séance observée.

Cet effet négatif des bons de commande peut aussi se constater dans la classe de M. B dans le sens inverse de Mme A : il les utilise pour la première variante mais pas pour la deuxième, pour laquelle il laisse un cadre pour la recherche des élèves. Dans cette deuxième séance les élèves utilisent pour leur première recherche des techniques de comptage par dessin ou additions itérées que nous n'avions pas observées dans la première séance où ils avaient tous écrit directement une commande.

La ressource ne devrait donc pas mettre en avant ces bons de commande, peut-être juste en suggérer l'utilisation possible tout en indiquant l'intérêt de laisser un espace de recherche pour les élèves.

Les constats que nous venons de faire suggèrent également que le fait de faire un dessin pour simuler les groupements de la collection pourrait aider certains élèves qui ne savent pas encore faire les conversions mentalement. Il pourrait être indiqué dans la ressource que les élèves peuvent résoudre le problème en faisant un dessin de la collection. Il serait aussi possible de supprimer (ou modifier) les bons de commande afin de favoriser différentes approches du problème par les élèves.

La désignation des groupements pour la commande : les unités de numération

Pour la description des groupements, seules les unités de numération sont utilisées dans la ressource. Les noms des groupements matériels (mots « boites », « sachets », …) y sont totalement absents. Cependant une enseignante (Mme A) continue de ne pas utiliser les unités de numération mais toujours les mots « boites », etc. Pour cette enseignante, les unités de numération servent principalement pour décrire les noms des rangs de l'EC (ou des colonnes du tableau de numération).

Les trois autres enseignants utilisent une fiche d'exercices sur laquelle figurent des bons de commande avec unités de numération. Ils sont ainsi tous amenés à utiliser cet ostensif. Mais les unités de numération ne sont pas utilisées à l'écrit lors des phases collectives pour faire des conversions, elles apparaissent seulement dans les bons de commande pour écrire la commande. Pourtant cela est proposé dans la ressource, à la fois dans la description de la *situation* et dans les *éléments de synthèse*. Nos observations montrent que ces conversions ne sont pas effectuées par les enseignants. Une enseignante (Mme A) fait quelque chose qui s'en rapproche mais de manière contextualisée aux bûchettes[135] et en guidant beaucoup.

[134] Nous avions observé lors du dénombrement que tous les enseignants ne fournissaient pas de support écrit aux élèves pour donner leur réponse, ce qui n'est pas le cas ici où il faut donner une écriture en unités de numération. Cela renforce l'idée que quand la solution est seulement le nombre écrit en chiffres, une solution donnée à l'oral peut apparaître comme équivalente pour les enseignants (dans la situation de dénombrement).

[135] Comme ici par exemple pour traduire le groupement de 26 sachets en 2 boites et 6 sachets :

10 sachets : 1 boite   10 sachets : 1 boite   6 sachets

Dans les autres classes, soit la vérification ne se fait pas (évaluation de la part de l'enseignant), soit les conversions entre unités ne se font que vers les unités simples sans explication (passage de 26C à 2600 directement par exemple).
Le fait de mettre les unités de numération dans le milieu (par l'intermédiaire des bons de commande) a sans aucun doute favorisé leur utilisation par les enseignants. Cependant il pourrait être difficile de permettre aux enseignants de s'approprier leur utilisation pour les conversions entre unités avec une ressource. L'utilisation d'écritures abrégées pour les unités de numération pourrait ne pas être suffisante pour cela.

<u>Le tableau de numération</u>
Trois enseignants n'utilisent pas le tableau de numération contrairement à la situation de dénombrement. Rappelons qu'il n'apparaît pas non plus dans la ressource, ce qui pourrait témoigner de l'influence de la ressource à ce sujet. Cela pourrait aussi être lié au fait qu'il y a des conversions entre unités à faire et que cette valence instrumentale du tableau n'est pas utilisée par les enseignants.
Le quatrième enseignant utilise le tableau et y fait des conversions qui apparaissent comme le « transfert » d'un chiffre d'une colonne à une autre du tableau de numération. Ces conversions ne laissent pas de trace à l'écrit car l'enseignant efface les chiffres au fur et à mesure qu'il les déplace d'une colonne à l'autre au lieu d'écrire sur plusieurs lignes. Cela renforce le constat d'utilisation du tableau selon les règles de l'EC (cf. situation de dénombrement) : on écrit un et un seul chiffre par rang.

Les savoirs de la numération et leur description dans la ressource.

Malgré la description dans la ressource d'une technique de conversion à institutionnaliser, dans trois classes aucune technique « directe » n'est formulée. Les enseignants donnent seulement à voir des techniques de vérification de la réponse[136].
Dans la dernière classe comme l'enjeu est de travailler le *nombre de* (cf. choix des contraintes : pas de millier, puis pas de millier ni de centaine), l'enseignante entoure le nombre de dizaines pour montrer aux élèves le résultat, sans rien dire de plus. Lors de l'institutionnalisation de fin de séance, elle revient sur cette technique en expliquant la conversion à partir d'un exemple : « au lieu de dire qu'il y a un millier et trois centaines, on a treize centaines parce qu'un millier c'est dix centaines » comme cela est proposé dans la ressource. Cependant cette institutionnalisation fait suite au blocage rencontré par les élèves dans la situation et on peut se demander si elle peut se « raccrocher » à ce que les élèves ont réellement fait dans la séance.
Dans la situation de dénombrement les enseignants mettent en avant une technique directe dans les phases de conclusion et non une technique inverse pour vérifier, comme dans cette variante de la situation de commande. L'utilisation d'une technique inverse permettant de vérifier les réponses des élèves semble donc un phénomène qui est lié à cette situation. D'ailleurs, dans la thèse de Mounier (2010) nous avons retrouvé le même phénomène que celui observé ici dans une situation analogue (la situation des « ziglotrons », extraite du manuel Cap Maths[137]) mais dans une classe de CP :

[136] Ce phénomène a déjà été observé par Mercier et Assude (2007) dans un autre contexte : « le renvoi systématique des élèves aux procédures de vérification interdit l'évolution d'un jeu d'action en jeu de formulation et le développement collectif d'une technique faible ».
[137] « Cap Maths», Hatier 2005, de Charnay, Dussuc et Madier.

> Les séances ont permis de fournir implicitement des indications aux élèves sur la stratégie à adopter […]. Cependant aucune stratégie n'a été institutionnalisée ni même réellement exposée puisque ce sont les stratégies de validation […] qui ont été l'enjeu des débats collectifs (p.326)

Ce qui est alors mis en évidence ce sont des passages de nombres dits à leur écriture en chiffres et/ou à une désignation en termes de paquets de dix et boutons tout seuls et non l'inverse, ce qui rejoint notre constat.

Il est aussi possible que les enseignants fassent spontanément une vérification, car le passage de l'écriture en unités de numération à l'écriture en chiffres est tout simplement plus naturel que l'inverse, d'autant plus qu'il a été travaillé dans les séances précédentes (dénombrement).

Même si l'enseignant n'organise que des vérifications des commandes dans les phases de conclusion, il pourrait finir la séance par une institutionnalisation des techniques utilisées par les élèves. Or cette évolution, de la vérification vers la technique directe, ne s'observe pas dans les classes (sauf peut-être dans celle de Mme F). Certes, ce travail unique de vérification laisse une certaine responsabilité aux élèves dans l'élaboration d'une technique directe (pour trouver les commandes), mais c'est peut-être aussi ce qui explique que certains élèves restent en difficulté tout au long de la séance (phénomène que nous n'avions pas observé pour la situation de dénombrement). Ils ne peuvent pas directement s'appuyer sur ce que l'enseignant montre au tableau.

Les modifications à apporter pourraient être davantage au niveau de la mise en scène de la SF plutôt que de la description de la situation car ce phénomène nous semble assez robuste. Il pourrait alors être intéressant de chercher des moyens pour rendre nécessaires les formulations des élèves dans la situation de commande, comme par exemple avec une situation de formulation.

À partir des formulations de techniques proposées par les élèves il resterait à faire émerger les conversions permettant d'adapter ces techniques à différentes contraintes.

Un mot sur la variante « commandes de timbres »

La mise en œuvre de cette variante n'a été observée que dans une seule classe (M. B). Cette observation nous a permis de constater que, même si aucun élève ne fait immédiatement le lien avec la situation précédente en utilisant une technique de troncature, l'absence de bons de commande et la possibilité de faire une recherche dans un cadre dédié de la feuille, a permis aux élèves de s'engager dans des stratégies de comptage. C'est lors de la mise en commun collective qu'un élève qui a induit la technique de troncature par mise en correspondance de la commande et du nombre de départ explicite cette technique pour les autres. Cependant son adaptation à la commande de carnets de dix apparaît comme un saut très important pour les élèves qui n'arrivent pas à l'adapter, faute d'associer à cette technique la technologie de conversion entre unités (avec unités de numération). Tout cela rejoint des constats que nous avons déjà faits. Les modifications de la SF et de la ressource nous semblent être plus importantes pour la première variante, celle-ci visant davantage un réinvestissement des connaissances des élèves.

Chapitre 11

Conclusion de l'expérimentation

Apports complémentaires sur l'usage de la version 1 de la ressource et modifications envisagées

L'objectif de ce chapitre est de compléter notre bilan de l'usage de la ressource, déjà commencé aux chapitres 9 et 10, et d'envisager des modifications possibles. Ces compléments prennent en compte des résultats des évaluations des élèves, les séquences réalisées par les enseignants du groupe libre et ce que les enseignants nous disent de leur usage de la ressource dans les entretiens.
Dans le §I, nous revenons sur les résultats des élèves aux évaluations proposées afin de mettre en évidence les principaux apprentissages et les difficultés résistantes. Dans le §II, nous indiquerons quelques constats sur les pratiques des enseignants qui ne nous semblent pas liés à une situation particulière ; c'est pourquoi nous ne les avons pas donnés avant. Dans le §III, après une analyse de l'usage de la ressource pour la conception d'une séquence (complétant celle déjà faite pour les enseignants du groupe de travail), nous proposons des modifications du canevas didactique et de sa description dans la ressource. Enfin, dans le §IV, en nous appuyant sur les analyses de la mise en œuvre des deux situations principales (chapitres 9 et 10), nous proposons des modifications de ces situations et de leur description.
Certaines des modifications proposées ont été prises en compte pour la conception d'une version 2 de la ressource. Nous en donnerons des illustrations à travers des extraits de cette version.

I. Retour sur les apprentissages des élèves à partir des résultats des évaluations

Pour avoir un nombre suffisamment important d'élèves nous prenons en compte les résultats des évaluations des deux groupes d'enseignants. Sur l'ensemble des sept classes, environ cent élèves qui ont été évalués. On trouvera dans les annexes III.4 et III.5, les évaluations proposées aux élèves ainsi qu'en annexe III.6 les résultats détaillés par item pour chaque classe.
Ce que nous comparons ici, ce sont les résultats de l'évaluation initiale sur les nombres à trois chiffres et de l'évaluation finale sur les nombres à quatre chiffres. Du fait de la nouveauté du travail sur les nombres à quatre chiffres (alors que les nombres à trois chiffres sont travaillés depuis le CE1), nous pouvons nous attendre à des résultats un peu plus faibles pour l'évaluation finale. Cependant une différence trop importante pourrait témoigner de lacunes de la ressource proposée aux enseignants.
Nous commençons par décrire l'évolution des résultats pour chaque exercice entre l'évaluation initiale et celle finale avant de donner une interprétation globale des résultats.

Exercices 1 et 2 : écrire/nommer ($T_{Tn/ec}$ et $T_{Tec/n}$)

Les deux premiers exercices évaluent le passage du nombre écrit en lettres au nombre écrit en chiffres et réciproquement.
On observe une légère baisse des résultats des élèves écrire les nombres en chiffres (de 90% à 83% de réussite), avec des difficultés pour les nombres comportant au moins un 0 (huit-mille-neuf par exemple). Cette difficulté est amplifiée pour le dernier cas (mille-cent-un) pour lequel on n'entend qu'une fois « un » alors qu'il faut écrire trois fois le chiffre 1. Il est donc possible que cette légère baisse soit liée aux difficultés supplémentaires posées par l'écriture des nombres à quatre chiffres.
Pour le type de tâches inverse (nommer) les résultats sont stables entre les deux évaluations.

Exercices 3 et 5 : recomposer ($T_{Teunc/ec}$ et $T_{Teun/ec}$)

Ce sont les deux exercices pour lesquels on observe la meilleure progression des élèves : de 71% de réussite à 81% pour l'exercice 3 (sans conversions en jeu) et de 31% à 49% pour l'exercice 5 qui met en jeu des conversions. Ce dernier reste toutefois encore source importante de difficultés. Cela témoigne d'une meilleure prise en compte des trois conditions de la technique de juxtaposition : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité et présence de nombres à un chiffre à chaque rang de l'EC. Examinons cela plus en détail.
Pour la recomposition mettant en jeu la première condition uniquement (1C 9M 3U 5D) la progression est minime (de 76% à 81%) mais les résultats étaient déjà élevés.
On observe une nette progression pour les recompositions mettant en jeu le chiffre 0 (2ème condition). Par exemple recomposer 6C + 9U est réussi par 68% des élèves dans l'évaluation initiale alors que 6M + 2U est réussi par 82% des élèves dans l'évaluation finale.
De même on note une progression importante des élèves pour des recompositions mettant en jeu des conversions (3ème condition) même si les résultats restent plus faibles. Par exemple, alors que seulement 21% des élèves réussissent à recomposer 21D + 3C dans la première évaluation, 47% réussissent à recomposer 12C + 3M dans la deuxième évaluation.

Exercice 4 : comparer deux nombres (T_C)

Ce type de tâches n'est pas travaillé dans la ressource. Il s'agit plus de contrôler qu'il n'y a pas de baisse des résultats liée justement à cette absence. Les résultats sont en effet un peu plus faibles que pour la première évaluation (passage de 95% à 88%). Il est possible que les enseignants aient moins investi ce type de tâches qu'à leur habitude.

Exercice 6 : nombre de (T_{Cnd})

Les résultats entre les deux évaluations sont proches (52% pour la première et 49% pour la deuxième) alors que ce type de tâches est l'objet d'un travail important dans la ressource (situation de commande). Il n'y a pas de progression des élèves hormis pour le *nombre de* correspondant à l'unité de plus haut rang de l'EC (ce qui revient à chercher le *chiffre des*) : dans l'évaluation initiale, le nombre de centaines dans 260 (qui revient au chiffre des centaines) est réussi par 53% des élèves alors que dans l'évaluation finale le nombre de milliers de 3260 est réussi par 69% des élèves.

Exercice 7 : conversions (T_{Ceun})

Pour les conversions les résultats sont également proches avec une très légère progression (de 45% à 50%) même s'ils restent, là aussi, peu élevés. Sans doute est-ce à mettre en lien avec la quasi absence d'exercices de conversions entre unités de numération que nous avons constatée.
Cela ne concerne pas la comparaison des deux évaluations mais nous remarquons, en comparant les résultats aux items c et d pour les nombres à quatre chiffres qu'il n'y a pas de sens de conversion mieux réussi par les élèves (centaines vers milliers ou milliers vers centaines).

Exercice 8 : nombre de (problème en contexte)

La progression des élèves est importante pour le problème de commande : de 26% à 44% de réussite. On peut penser que cela est une conséquence du travail sur la situation de commande de collections. Le travail effectué a pu permettre aux élèves de mieux identifier que ce problème relève de la recherche du *nombre de* (les pourcentages de réussite des exercices 6 et 8 sont assez proches).

Exercice 9 : addition posée (problème en contexte)

Les résultats des élèves sont en légère hausse mais restent autour de 50% alors qu'un travail a été fait sur l'addition posée (et sur la retenue) dans la situation des paris. Les difficultés peuvent être liées au fait que l'addition intervient dans un problème en contexte (achats) et qu'elle comporte trois nombres, ayant des nombres de chiffres différents.

Interprétation globale des résultats et retour sur les situations

L'amélioration la plus significative concerne le type de tâches de traduction d'EUN en EC, qui montre que les élèves tiennent davantage compte des conditions de la technique de juxtaposition et en particulier des deux premières (respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité dans l'EC). Pour la troisième (présence d'un nombre à un chiffre à

chaque rang de l'EC), qui met en jeu les conversions entre unités, la hausse est importante mais ces cas ne sont réussis que par la moitié des élèves environ.
Finalement pour les exercices mettant en jeu des conversions (exercices 5 à 8) on obtient des résultats autour de 50% de réussite, ce qui montre à la fois une légère progression des élèves sur ce point mais rend compte des difficultés encore importantes pour beaucoup d'entre eux, comme nous l'avons observé dans les classes.
Ces résultats viennent confirmer les analyses faites dans les chapitres 9 et 10.
La variante de dénombrement S_{Dv2} permet bien aux élèves de prendre davantage en compte les deux conditions : respect du rang de chaque unité et présence de chaque unité dans l'EC, comme nous l'avions observé dans les classes où les élèves dépassent rapidement les premières erreurs d'écritures dues à la simple juxtaposition des nombres. Cela nous a permis de confirmer l'intérêt du jeu sur les deux variables didactiques pour cette variante : l'ordre de présentation des unités et le nombre d'unités isolées de chaque ordre (qui est inférieur ou égal à neuf) en particulier la présence/absence d'unités isolées pour amener à utiliser le chiffre 0 (notamment au rang des centaines, nouveau par rapport aux nombres à trois chiffres) et dépasser la simple juxtaposition de chiffres sans prise en compte du rang des unités.
Dans la variante mettant en jeu les conversions (S_{Dv3}) les élèves utilisent les deux stratégies pointées dans l'analyse *a priori* : réunion des unités de même ordre des deux collections puis dénombrement de la collection obtenue ou bien dénombrement de chaque collection puis addition posée des deux nombres obtenus. Des erreurs dues à des juxtapositions des nombres (sans prise en compte des trois conditions) apparaissent aussi dans S_{Dv3}, comme prévu puisque cela permet de définir les nombres-paris, et elles fournissent en général un nombre à 4 ou 5 chiffres, pour lequel le contrôle par les élèves est plus difficile. Mais la mise en œuvre de cette variante n'a pas permis aux élèves de travailler les conversions comme nous l'avions prévu.
Pour la situation de commande d'une collection, dans S_{Cv1}, nous avons observé des difficultés importantes pour les commandes avec contraintes. Certains élèves ne tiennent pas compte des conversions et cherchent à écrire un seul chiffre pour chaque unité. Nous avons constaté que ces difficultés perdurent au cours de la séance pour un nombre non négligeable d'élèves dans certaines classes, phénomène que nous n'avions pas observé pour les séances de dénombrement. Cela peut être lié à la complexité de la situation, conséquence d'un jeu sur les variables didactiques trop varié.
Même quand les élèves réussissent, lors des phases collectives, à induire à partir d'un exemple de commande écrit au tableau une technique de troncature, il est difficile pour eux de l'adapter à d'autres contraintes, comme nous l'avons vu dans une classe pour la recherche du nombre de dizaines. L'appui sur les conversions entre unités est alors une technologie nécessaire pour cette adaptation, mais elle n'est pas suffisamment disponible.

II. Quelques constats sur les pratiques des enseignants observés

Nos analyses des séances des chapitres 9 et 10 nous ont permis de mettre en évidence certains constats sur les pratiques des enseignants observés que nous allons présenter ici.
Ces constats ne nous semblent pas liés à une situation particulière.

Des phases de rappel

La plupart des enseignants font une phase de rappel de ce qui précède en début de séance et cela aide à la dévolution de la suite. Dans la situation de dénombrement, nous avons observé des rappels spontanés (non indiqués dans la ressource) dans toutes les classes observées avant de proposer S_{Dv2}. Cela facilite la dévolution de cette variante S_{Dv2} car il s'agit du même problème. De même pour la séance portant sur S_{Dv3}, le rappel du dénombrement d'une collection totalement groupée (proposé dans la ressource) facilite la dévolution de S_{Dv3}. Pour la première variante de commande (S_{Cv1}), aucun des enseignants observés ne propose de rappel concernant le dénombrement mais tous font au moins un (jusqu'à quatre pour Mme F) cas de commandes sans contrainte pour commencer, conformément à ce qui est proposé dans la ressource.

Absence d'appui sur les formulations des élèves

Dans les classes observées nous avons constaté que les enseignants ne s'appuyaient pas sur les formulations des élèves pour passer à une formulation complète des savoirs et techniques. Les enseignants prennent à leur charge les éléments technologiques (explication et justification des techniques).

Pour la situation de dénombrement, alors que les enseignants font bien émerger des techniques dans la classe, aucun parmi les trois observés pour S_{Dv2} ne s'appuie sur les formulations des élèves. Lors des phases collectives l'enseignant interroge les élèves sur leur résultat et fait émerger les erreurs des élèves. Cela permet d'évaluer (juste/faux) les réponses et de faire émerger les savoirs en jeu. Mais c'est l'enseignant qui montre la technique attendue. Il est possible que cela soit lié à des pratiques des enseignants peut-être renforcées par la description détaillée des éléments de savoir dans la ressource. Il semble difficile de dépasser ce constat par l'intermédiaire d'une ressource.

Un découpage privilégié du déroulement amenant à une succession de nombreuses phases de recherches individuelles et de conclusions collectives

Pour S_{Dv2}, les trois enseignantes observées, après le rappel de la séance précédente, mettent en place une alternance de courts moments de recherche suivis de phases collectives de conclusion pour chaque collection à dénombrer. Pour S_{Dv3}, on peut observer le même déroulement général. M. B, lui, ne fait pas de phase de rappel. De plus il laisse chercher les élèves individuellement puis organise un long moment de présentation des différentes techniques avant de les évaluer dans la phase de conclusion.

Pour les deux variantes, tous les enseignants font chercher les élèves individuellement. Cela pourrait être lié à des habitudes de fonctionnement de la classe.

L'observation des mises en œuvre de S_{Dv2} et S_{Dv3} par les enseignants met aussi en évidence une institutionnalisation prématurée du savoir en jeu (en particulier dans les classes de Mme A et Mme F). Elles peuvent avoir été amenées par ce découpage de séance.

Pour la situation de commande, dans S_{Cv1}, trois enseignantes proposent pour chaque commande une recherche individuelle suivie d'une conclusion collective, comme elles l'avaient fait pour les variantes de dénombrement. M. B, lui, propose une recherche individuelle suivie d'un travail de vérification en groupes de deux élèves et d'une conclusion collective. Mais, pour les élèves en difficulté sur ce problème (la plupart), la vérification ne permet pas toujours d'invalider les commandes pour relancer les élèves dans la recherche (le milieu est insuffisant pour cela). Du coup, c'est seulement lors de la phase collective qu'ils ont accès à la validité de leur réponse ainsi qu'à une réponse correcte. Mais comme il n'y a pas d’autre commande proposée immédiatement après, ils ne peuvent pas se relancer dans la recherche.

III. Le canevas didactique et sa description dans la ressource. Modifications envisagées.

Rappelons que, même si la version 1 de la ressource propose cinq situations-clés (passages obligés) et des situations complémentaires, la conception complète d’une séquence avec des exercices d’entraînement, des traces écrites, des évaluations, … est à la charge de l’enseignant. Nous allons revenir sur ce travail de conception d’une séquence à partir de ce que les enseignants nous disent de leur utilisation du site sur ce point (§1), puis en étudiant les séquences effectivement réalisées par les enseignants des deux groupes (§2) et nous terminerons par un bilan sur le canevas didactique et sa description dans la ressource en envisageant des modifications éventuelles (§3).

III.1 Retour sur l’utilisation par les enseignants des éléments pour construire une séquence

Avant de revenir sur les éléments de la ressource utilisés par les enseignants pour la construction de leur séquence, nous allons brièvement indiquer ce qu’ils nous ont dit concernant le support (site internet) de la ressource ainsi que sur leur utilisation des apports généraux sur la numération (partie intitulée « La numération décimale »).

Retour sur le choix du support

Le choix d’un support numérique diffusé sur internet semble bénéficier d’une bonne acceptabilité de la part des enseignants. La plupart consultent déjà souvent des sites internet pour leur travail de préparation. Certains ont utilisé la possibilité offerte d’imprimer des pages.
Cependant une enseignante qui avait accepté de faire partie du groupe libre n’a pas souhaité créer un compte sur le site pour l’utiliser et n’a pu de ce fait participer à l’expérimentation. Il pourrait être préférable de prévoir un accès libre pour une prochaine version du site.
Une enseignante (Mme F) nous a suggéré d’utiliser les possibilités de travail collaboratif liées à ce support en intégrant un outil « commentaires » pour chaque situation, ce qui permettrait de voir comment certains enseignants mettent en place la situation dans leur classe, proposent des exercices, etc. Cela pourrait l’aider à mieux adapter les situations en prenant en compte différentes remarques de ses pairs.

L’utilisation des apports généraux sur la numération par les enseignants

La première partie du site contient des apports que nous considérons comme importants pour les enseignants. Cependant des questions liées à leur visibilité dans le site semblent se poser, ainsi que sur leur utilité, du moins telle qu’elle est perçue par les enseignants.
Tous les enseignants nous font part de l’intérêt du rappel des deux principes de la numération dans la première page des apports pour l’enseignant. Même si tous connaissent ces savoirs, ils apprécient qu’ils soient clairement explicités. Voici ce qu’en dit par exemple une enseignante :

> « La première partie ça permet de remettre en mémoire si on a des besoins. Quand tu expliques les deux aspects de la numération, c'est bien ça. Pour ceux pour qui c'est pas très clair ça leur permet de se remettre dans le bain. Ça, ça peut être utile. Rien que ça, l'aspect décimal … Ça c'est important » (Mme A).

Concernant les apports sur l'usage du matériel, les unités de numération, le constat sur ce que l'on trouve habituellement dans les manuels, les difficultés des élèves, cela ne semble pas avoir été lu par tous les enseignants. Certains expliquent qu'il est important de montrer que ce qui se fait dans les manuels usuels n'est pas toujours satisfaisant. La plupart soulignent l'intérêt de présenter les erreurs usuelles des élèves car, comme le dit Mme J,

> « Parler des types d'erreurs c'est important, ça peut être une aide, mais en même temps je pense que c'est un passage obligé : dans la classe ils vont forcément les faire ces erreurs là et je dirais même c'est mieux qu'ils les fassent pour se rendre compte que c'est des erreurs et qu'il ne faut pas rester dessus » (Mme J).

La plupart du temps, le lien avec les techniques opératoires n'est pas mentionné par les enseignants.
Même s'ils ne les ont pas tous consultés, les enseignants sont donc unanimement d'accord pour laisser ces apports dans la ressource, ce qui témoigne d'une bonne acceptabilité de cette partie. Ils veulent se laisser la possibilité d'aller les consulter si besoin. Voici ce qu'en dit Mme F lors de la réunion collective dans le groupe de travail :

> « Tu sais, je crois que finalement, quand on a commencé, tous on a lu les deux aspects de la numération puis le reste pas trop. Après on se jette tout de suite dans nos situations. Là on fait notre situation on la fait avec nos élèves et puis après on va aller voir ce qui manque. Mais c'est pas au départ » (enseignante Mme F).

Une fois que les enseignants ont commencé leur séquence ils ne regardent plus la première partie. Des modifications de la ressource permettant une meilleure articulation de ces apports avec les situations pourrait être prévue. Pour ne pas surcharger la description des situations, il est possible de prévoir des liens hypertextes pour renvoyer à ces apports depuis la description des situations ou des *éléments de synthèse*.

L'utilisation des éléments pour la construction d'une séquence par les enseignants

La troisième partie du site (« La séquence ») n'est pas vraiment utilisée par les enseignants. Certains expliquent qu'ils l'ont regardée la première fois qu'ils sont allés sur le site mais qu'ils n'y sont pas retournés par la suite, comme par exemple Mme G : « j'y suis allée. J'ai lu tout ça en tout début. Avant d'attaquer » ou Mme H : « Ah je me souviens je l'ai vu ça, mais je ne m'en suis pas servie ». Mme A explique qu'elle n'a pas regardé cette partie qu'elle n'a pas trouvée utile :

> « Ça, on le retrouve dans les situations. C'est pas utile. J'ai regardé mais sans plus. Je m'en suis pas vraiment servie. En fait ce que tu recherches ce sont les situations que tu peux mettre en place dans ta classe. »

M. B signale que cette partie sur la séquence n'était « pas très claire » et qu'il a « eu du mal à aller voir, à imprimer » et qu'il était un peu « perdu ». Mme E ne se souvient même plus de son existence.
Tout cela témoigne de problèmes liés à la fois à l'utilisabilité et à l'acceptabilité de cette partie du site. Elle n'est pas adaptée à la façon de préparer des enseignants. Par exemple, il semble que l'entrée par les types de tâches soit trop déconnectée des situations proposées. Pour leur préparation de séances les enseignants semblent entrer principalement par les

situations ou exercices qu'ils vont proposer à leurs élèves (deuxième partie du site). Le fait que cette partie soit située dans la partie basse du site a pu aussi la rendre moins visible.
Par contre, le tableau avec les situations-clés et les situations complémentaires (deuxième partie du site) a été utilisé par certains. Par exemple Mme A signale, concernant ce tableau, qu'au départ il peut paraître complexe (« au départ tu te représentes pas du tout la séquence ») mais que finalement une fois que l'on s'est penché dedans, il permet de mieux voir l'enchaînement des situations. Mme J indique aussi qu'elle l'a utilisé : « ça me donnait une idée plus globale de l'ensemble ».
Une enseignante (Mme G) nous signale un problème de visibilité du canevas didactique proposé dans la ressource :

> « On n'a pas une bonne vue globale, peut-être que ça manque une vue globale. Et peut-être que ça pourrait être une entrée pour ta présentation. […] Oui parce qu'en fait quand j'ai cherché par où je commence je vais faire quoi, ça veut dire quoi, voilà … effectivement je me suis dit mais on va où ? Je savais quand même, mais effectivement oui. Je me suis retrouvée à tout lire, pour voir ah oui là ça va être ça. […] et peut-être que oui ça pourrait être annoncé dès le départ. Pour travailler telle notion et faire hop et après détailler davantage ».

Cela est aussi relevé par Mme E qui explique « alors qu'au départ on était parti sur une prise de renseignement générale et on se retrouve au cœur », c'est-à-dire dans une situation précise. Elle aurait aimé trouver une description plus globale : « on attend de voir quel type d'activité on va avoir à faire, quel objectif il y a derrière, dans quelle partie du programme on est, etc. ».
Pour une meilleure utilisabilité il pourrait donc être envisagé des modifications de la ressource qui donneraient une meilleure visibilité au canevas didactique général proposé car la présentation actuelle amène des enseignants à regarder toutes les situations pour avoir une idée globale de la séquence. La partie sur la séquence dans la version 1 ne semble pas adaptée aux usages des enseignants : il faut repenser cette description du canevas davantage en lien avec les situations proposées.

III.2 Retour sur les séquences réalisées par les enseignants du groupe libre

Les séquences des enseignants du groupe de travail ont déjà été décrites en deux fois dans les chapitres 9 et 10. Nous allons maintenant présenter celles des enseignants du groupe libre et nous analyserons ces séquences dans le §II.3, selon les choix effectués par les enseignants pour les situations complémentaires, les exercices d'entraînement, les traces écrites de synthèses et les évaluations.

Séquence de Mme G

Activités directement extraite de la ressource	**Autres activités inspirées ou non de la ressource**	**Types de tâches / *contexte***
Situation « Combien de bûchettes ? »		Dénombrer une collection « en vrac ». *Bûchettes.*
Situation « Compte de bûchettes »		Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*
	Exercice sur ardoise de recompositions du type : 3m 2c 7u = ?	Recomposer un nombre. *Décontextualisé.*
	Exercices sur ardoise : des nombres dictés, lesquels ont 7 milliers ? Puis ranger ces nombres du plus petit au plus grand, etc.	Traduction oral/écrit. Chiffre des. Ranger des nombres par ordre croissant.

		Décontextualisé.
Situation « Le jeu des paris » (1 seul cas traité)		Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*
Situation complémentaire : papier millimétré.		Dénombrer une collection organisée. *Papier millimétré.*
Situation « Marchand de bûchettes »		Nombre de. *Bûchettes.*
Situation complémentaire : le jeu des décompositions.		Décomposer/recomposer un nombre de différentes façons. *Décontextualisé.*
	Calcul rapide sur ardoise (plusieurs fois) : exercices de conversions entre unités (si j'ai 3 milliers combien de centaines ? …)	Conversions entre unités. *Décontextualisé.*
Situation « Commandes de timbres » (plaques de 100)		Nombre de. *Timbres.*
Situation complémentaire : le jeu des familles.		Décomposer/recomposer un nombre de différentes façons. *Décontextualisé.*
Situation « Commandes de timbres » (carnets de 10)		Nombre de. *Timbres.*
Reprise du jeu des familles.		Décomposer/recomposer un nombre de différentes façons. *Décontextualisé.*

Figure 115 : Séquence de Mme G

Trois affiches de synthèse ont été réalisées au cours de la séquence :

- Une avec un tableau de numération et les relations entre unités (par exemple 1 millier = 10 centaines = 100 dizaines = 1000 unités), le dessin du matériel ainsi que le matériel collé (bûchettes, paquet de 10, sachet).
- Une sur la situation de commandes de bûchettes : différentes commandes pour un même nombre.
- Une sur les différentes décompositions d'un nombre : 2615. Avec en haut les unités de numération m, c, d, u (mais pas dans un tableau de numération). Par exemple 26 centaines et 1 dizaine et 5 unités : 26 est entouré ainsi que 1 et 5 et à côté est écrit 26 centaines et 1 dizaine et 5 unités (comme dans la ressource).

Mme G a participé à une évaluation commune à toute l'école (où il y a plusieurs classes de CE2) pendant la séquence. Voici les types de tâches évaluées :

- Ecrire/nommer
- Comparer, ranger des nombres, les placer sur une droite numérique, compléter des suites de nombres
- « Nombre de » centaines, « nombre de » dizaines (dans des nombres à 3 et 4 chiffres), « chiffre des » milliers, « chiffre des » centaines, etc.
- Décomposer, recomposer des nombres. Plus précisément : recomposer à partir d'une EUN (4m 7d = …, 31c 5d[138] = …, 6c 2m = …), recomposer de manière canonique d'EPDC en EC et décomposer de manière canonique en EAC.

[138] Le seul cas mettant en jeu une conversion peut se traiter par une juxtaposition du nombre de centaines et de milliers.

Séquence de Mme H

Activités directement extraite de la ressource	Autres activités inspirées ou non de la ressource	Types de tâches / *contexte*
Situation « Combien de bûchettes ? » (les groupements ont été réalisés à l'avance par l'enseignante).		Dénombrer une collection. *Bûchettes.*
Situation « Compte de bûchettes »		Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*
	Exercices (quotidiens, sur plusieurs débuts de séances) sur ardoise comptes de bûchettes ».	Dénombrer une collection groupée. *Bûchettes.*
	Exercices de dénombrements de cubes (matériel multi-base représenté).	Dénombrer une collection groupée. *Cubes.*
Synthèse sous la forme d'une affiche : bûchettes et tableau de numération / les groupements réalisés.		
	Exercices sur l'écriture de nombres en lettres, en chiffres.	Écrire/nommer. *Décontextualisé.*
Situation « Le jeu des paris »		Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*
Situation « Marchand de bûchettes »		Décomposer. *Bûchettes.*
	Exercices (quotidiens, sur plusieurs débuts de séances) de « marchand de bûchettes ».	Décomposer. *Bûchettes.*
Trace écrite sur les « règles d'échanges » (principe décimal : 1 dizaine = 10 unités …)		
Situation « Commandes de timbres » (plaques de 100)		Nombre de. *Timbres.*
Synthèse collective sous la forme d'une affiche (inspirée des éléments synthèse du site) qui donne lieu à une trace écrite dans le cahier. Trouver différentes façons d'obtenir 2806 bûchettes (avec des contraintes).		
Situation « Commandes de timbres » (carnets de 10)		Nombre de. *Timbres.*
Situation complémentaire des « tickets de tombola ».		Nombre de. *Tickets de tombola.*
Situation complémentaire : qui a le plus de timbres ?		Comparer. *Timbres.*
Situation complémentaire : combien de rubans ?		Nombre de. *Contexte de longueurs de rubans.*

Figure 116 : Séquence de Mme H

Plusieurs traces écrites ont été proposées (indiquées dans le tableau) ; elles s'inspirent toutes des éléments de synthèse proposés dans la ressource.
D'autres exercices d'entraînement ont été proposés régulièrement mais nous ne savons pas à quels moments précis de la séquence :

- Dictées de nombres sur ardoise (T_{Ceun} : conversions en unités simples, comme 12 centaines = … , 23 dizaines = …)
- Ecris le nombre correspondant ($T_{Teun/ec}$: 18 centaines + 2 milliers)
- Comparer les nombres, ranger les nombres (sous forme d'exercices, de rituels)
- Situer les nombres les uns par rapport aux autres (sous forme d'exercices, de rituels)

D'autres situations (complémentaires) sont envisagées pour la suite :

- Le jeu des familles
- La calculatrice

Séquence de Mme J

Activités directement extraite de la ressource	Autres activités inspirées ou non de la ressource	Types de tâches / *contexte*
	Exercices (jeu du furet + exercices écrits)	Avancer/reculer dans une suite de nombres de un en un, dix en dix, etc.
	Exercice	Compléter des graduations (de 100 en 100, 10 en 10, 1 en 1) en dépassant mille.
Situation « Combien de bûchettes ? » (les groupements ont été réalisés à l'avance par l'enseignante).		Dénombrer une collection. *Bûchettes.*
	Exercice	Lecture et écriture de nombres
	Exercice	Comparaison de nombres
	Exercice	Lecture et écriture de nombres
Situation « Compte de bûchettes » avec plus de 10 unités à un certain ordre pour les derniers cas		Dénombrer une collection groupée ou partiellement groupée. *Bûchettes.*
	Exercice : tâche inverse (à partir du nombre représenter une collection)	Construire une collection à partir d'un nombre donné. *Bûchettes.*
Situation « Marchand de bûchettes »		Nombre de. *Bûchettes.*
Situation « Le jeu des paris »		Dénombrer une réunion de deux collections. *Bûchettes.*
Situation « Commandes de timbres »		Nombre de. *Timbres.*

Figure 117 : Séquence de Mme J

Dans l'entretien Mme J signale qu'elle a aussi proposé à l'oral sur ardoise au cours de la séquence des exercices de recherche du *nombre de* centaines et d'autres exercices pour écrire/nommer.

Mme J a complété son affiche faite sur les nombres à trois chiffres, un tableau de numération avec le matériel de son manuel, en y ajoutant un dessin du matériel des bûchettes et des timbres. Dans leur classeur, les élèves ont aussi une représentation schématique des groupements de bûchettes.

Mme J a fait une évaluation en février, après la séquence (elle n'avait pas eu mon évaluation à ce moment là). Voici les types de tâches proposés :

- Écrire/nommer
- Comparer
- Ranger les nombres dans l'ordre croissant
- Compléter des suites de nombres de un en un, dix en dix, de cent en cent.
- Placer des nombres sur la droite numérique (droite de 10 en 10)
- Décomposer de manière canonique (exemple 1560 = 1000 + 500 +60).

Nous allons maintenant passer à l'analyse de ces séquences ainsi qu'à celles du groupe de travail.

III.3 Analyse des séquences réalisées par les enseignants des deux groupes

Cette analyse se fait à partir des questions suivantes :
- Les situations-clés proposées : sont-elles toutes utilisées ? Dans quel ordre ? Comme dans la ressource ?
- Les situations complémentaires : lesquelles sont utilisées ? A quels moments ?
- Des exercices d'entraînement sont-ils construits par les enseignants à la suite des situations-clés ?
- Des problèmes ou exercices d'entraînement sont-ils proposés pour travailler d'autres types de tâches ?
- Quelles traces écrites de synthèse sont faites par les enseignants ? Lien avec les éléments de synthèse proposés dans la ressource ?
- Les évaluations éventuelles (en plus de l'évaluation proposée dans le cadre de l'expérimentation) : quels types de tâches sont évalués ?

Pour tous les enseignants, nous nous appuyons sur les entretiens individuels de fin de séquence. Pour les enseignants du groupe de travail nous complétons avec nos observations et ce qui ressort des deux réunions de travail[139].
Nous rappellerons pour chaque enseignant son appartenance au groupe de travail (GT) ou au groupe libre (GL). Nous reviendrons à la fin de ce paragraphe sur des spécificités éventuelles des séquences construites par les enseignants du groupe libre afin de déterminer des effets éventuels de notre présence (sur le GT).

Les situations-clés

Hormis une enseignante (Mme J, GL), tous les enseignants ont mis en œuvre toutes les situations-clés dans l'ordre proposé dans la ressource.
La modification apportée par Mme J consiste à proposer la variante du « jeu des paris » après la situation de commande. Cela est lié au fait qu'elle a proposé des collections partiellement groupées dès la variante des « comptes de bûchettes » pour mettre en jeu le principe décimal.

---

[139] Pour le groupe de travail nous avons fait une première réunion collective dont l'objectif était de discuter de la mise en œuvre des situations, de la séquence, des adaptations à apporter à ce qui est proposé dans la ressource, etc. L'adresse du site a été donnée une dizaine de jours avant cette réunion pour que les enseignants puissent le consulter avant de venir. Ils ont bien tous pris connaissance du site avant de venir mais de manière différente :
- Mme A l'a consulté environ 10 min, 1 semaine avant la réunion (19 pages consultées),
- M. B : 1h20, juste avant la réunion (52 pages),
- Mme E : 30 min, la veille de la réunion (28 pages),
- Mme F : 20 min, juste avant la réunion (37 pages).

Ces informations ont été obtenues à l'aide d'un module de statistiques incorporé dans le site web. Les échanges prévus entre enseignants sur la mise en œuvre des situations ou sur la construction d'une séquence à partir de ces situations n'ont pas eu lieu (ce qui nous a amené à faire une présentation des différentes situations). Nous faisons l'hypothèse que cela est lié au fait qu'ils n'ont en général pas assez étudié les situations proposées. Il est possible qu'il y ait justement trop de choses à regarder sur le site (ou du moins pour cette première fois) et qu'il aurait été préférable de cibler ce que nous souhaitions leur faire travailler. Du coup les discussions ont plutôt porté sur leurs outils de classe (manuels, matériel de numération) ainsi que sur les erreurs des élèves à l'évaluation initiale.
Cette réunion ne nous a donc finalement pas apporté d'informations concernant les choix de séquences des enseignants du groupe de travail.

Les exercices d'entraînement

Comme cela est indiqué dans la ressource, les exercices d'entraînement sont à la charge des enseignants. Certains enseignants du GT (Mme F et Mme E) enchaînent les variantes de la situation de dénombrement de collection sans proposer d'exercices d'entraînement entre les séances (du moins avant la variante du jeu des paris). Mme F cherche à suivre à la lettre le contenu de la ressource :

> « Moi de toute façon toutes les situations je les ai faites exactement comme elles étaient précisées sur le site. Moi, j'ai eu aucun recul, j'ai appliqué ce qui était noté et je suivais exactement. Je collais au plus près. J'étais dans une démarche où je cherchais une solution pour faire passer ma numération, donc j'essaie et je colle au plus près. Maintenant, après, l'année prochaine, avec plus de recul, peut-être que j'adapterai un peu plus ». (Mme F, entretien final).

Cela peut s'expliquer par ses contraintes (lié à sa classe à trois niveaux) qui lui laissent moins de temps de préparation pour chaque niveau que les autres enseignants ou encore par un manque de recul sur les propositions de la ressource qui l'amène à en faire une analyse par l'action pour les évaluer *a posteriori*.
D'autres enseignants proposent systématiquement une séance d'exercices après chaque variante (sauf la première où l'on constitue les groupements). Certains reprennent alors exactement le même problème en changeant les collections (M. B par exemple), d'autres en profitent pour travailler d'autres types de tâches en lien avec les savoirs travaillés. Par exemple Mme J et Mme G (GL) font travailler écrire/nommer et comparer. Dans la première partie de la séquence, nous n'avons pas observé d'exercices de décompositions/ recompositions de nombres utilisant les EAC ou EPDC, contrairement à ce que l'on peut voir habituellement dans les manuels. Les enseignants du GT ne proposent pas d'exercices sur d'autres types de tâches que ceux travaillés dans les situations principales. Cela pourrait être un effet de notre présence.
Nous pensons qu'il est important de proposer des exercices de conversions entre unités suite au jeu des paris dont l'objectif est justement d'amener à faire des conversions. Notre étude des contraintes institutionnelles a mis en évidence que ce travail est absent de beaucoup de manuels scolaires et invisible dans les programmes. L'entraînement des élèves n'en est alors que plus essentiel car on peut penser que ce travail n'a pas été fait pour les nombres à trois chiffres. Pourtant nous n'avons relevé de tels exercices que dans deux classes (Mme G du GL et Mme E du GT) avec des conversions comme par exemple 3 milliers = … centaines dans une classe et dans l'autre des conversions principalement en unités simples comme 13 centaines = … qui peuvent être considérés comme des traductions d'écritures. Il semble donc essentiel de mettre davantage en évidence ce type de tâches dans la ressource, puisque, dans cette version, les conversions sont indiquées principalement dans la troisième partie du site sur la construction d'une séquence, partie non utilisée par les enseignants.
Pour la situation de commande, les enseignants passent parfois plusieurs séances à traiter différentes commandes, ce qui revient à des exercices d'entraînement. Ils utilisent aussi davantage les situations complémentaires (cf. paragraphe suivant).
Les entretiens nous montrent que seule une enseignante (Mme E, GT) travaille le type de tâches « nombre de » en dehors de tout contexte (par exemple « combien de centaines dans 1097 ? »). Cela pourrait être lié aux exercices de l'évaluation finale (envoyée en fin de séquence) dans laquelle figure ce type de tâche. Alors que dans les manuels usuels la

numération est souvent travaillée hors contexte (dans des tâches écrire/nommer, décomposer, ranger des nombres, *nombre de*, etc.), on observe ici le phénomène inverse. Cela est lié à notre ressource dont toutes les situations principales sont en contexte (bûchettes, timbres) et peut-être à un manque de vigilance des enseignants au sujet de la décontextualisation, qui fait partie du processus d'institutionnalisation.

L'expérimentation a permis à une enseignante (Mme F, GT) de prendre conscience de la nécessité de faire davantage d'exercices d'entraînement entre les situations tout en faisant des propositions de modifications de la ressource pour tenir compte de ses contraintes de préparation :

> « Quand je vais m'en servir l'année prochaine, ce qui manque c'est des activités ritualisées entre chaque exercice. […] Est-ce qu'il faut faire des échanges tous les jours ? Sûrement. Moi je m'en rends compte parce que j'ai tout le cycle. Qu'est-ce qui est difficile ? Les décimaux, les unités de longueur, la monnaie. Le système décimal n'apparaît pas comme une évidence aux enfants. […] Et les exercices entre les séances. S'ils avaient été construits je pense que je les aurais faits, mais mon rythme de classe ne me laisse pas le temps de tout construire. […] C'est pas de grandes fiches d'exercices dont ils ont besoin, c'est un exercice pertinent au bon moment et presque chaque jour sur une période courte. […] Je pense aussi qu'il faut des fiches d'exercices. Quelque chose qui va durer peut-être un quart d'heure. Il faut pouvoir y revenir souvent mais brièvement » (Mme F, entretien final).

Les enseignants du groupe de travail auraient sûrement besoin d'une année supplémentaire pour prendre un peu plus de libertés pour la construction de leur séquence.

Nous pouvons envisager de modifier la ressource dans le sens indiqué par Mme F (proposer des fiches d'exercices) pour mieux l'adapter aux contraintes de temps de préparation de certains enseignants, quitte à perdre l'intérêt que nous avions pointé de laisser faire ce travail aux enseignants pour favoriser l'appropriation des enjeux de la séquence.

Le réinvestissement dans d'autres contextes et les situations complémentaires

Comme cela est indiqué dans la ressource, des situations complémentaires ont été proposées pour renforcer le principe décimal de la numération, dans d'autres contextes (ou hors contexte).

Globalement elles sont peu utilisées, surtout par les enseignants du GT. Elles sont parfois proposées seulement à la fin de la séquence. Certains enseignants prévoient d'en utiliser après la séquence, en prolongement (la séquence sur la numération peut s'étaler sur un temps long).

Pour le dénombrement d'une collection, seule la situation « combien de carreaux » est utilisée (par Mme G, GL). Mme H (GL) propose un exercice de dénombrement dans le contexte des cubes multi-base. Les enseignants se limitent donc, pour la plupart, à dénombrer des collections dans le contexte des bûchettes. Par ailleurs, la situation « combien de carreaux ? » permet de laisser une certaine responsabilité aux élèves dans la constitution des groupements permettant le dénombrement par la technique de juxtaposition. Même Mme G qui l'a utilisée n'a peut-être pas perçu cet intérêt. Elle nous indique en effet qu'elle a proposé ce travail parce que le « jeu des paris » n'a pas fonctionné dans sa classe, alors que les enjeux de ces deux situations ne sont pas vraiment les mêmes.

Pour la situation de commande, le jeu des familles a été utilisé par deux enseignants (Mme G du GL et M. B du GT). Une seule enseignante (Mme H, GL) a utilisé les situations de comparaison (« qui a le plus de timbres ? ») et de recherche du « nombre de » (« la tombola », « combien de rubans ? »). Cela pourrait être lié au fait que ces situations portent sur des contextes différents de celui des bûchettes. En effet, dans les entretiens, nous avons

remarqué que des enseignants pointent le changement de contexte comme une difficulté pour les élèves, ce qui pourrait les amener à l’éviter ou du moins à le repousser.
Dans certaines classes, la variante des timbres semble avoir justement posé des difficultés importantes aux élèves, difficultés liées à ce changement de contexte, comme l’explique par exemple Mme J (GL), qui semble toutefois avoir pris conscience de l’intérêt de ce changement :

> « En fait le passage aux timbres je ne pensais pas que ça allait poser autant de problèmes que ça. Le changement de support. Il a fallu reprendre avec des nombres à trois chiffres et comme je le craignais on est repassé avec les bûchettes, histoire de rappeler comment on faisait avec les bûchettes et que c’était la même chose avec les timbres. J’ai essayé au départ de rien suggérer mais ça passait pas. Avec les timbres c’était dur. C’était très dur. […] Je crois qu’il faudra reprendre ce support là, voire d’autres encore différents, de les multiplier avec les craies, les boites de craies ». (Mme J, entretien final)

Mme A (GT), elle, met en avant l’intérêt d’utiliser un matériel « référent » et de rester dans le contexte de ce matériel, notamment pour les élèves les plus « fragiles » :

> « Soit ça peut être bénéfique, pour être moins dans le truc bûchettes mais les plus fragiles ils auront moins de référents. Jeanne je lui aurais introduit des timbres, de la monnaie elle aurait été perdue. C’est pas dit que ça aide. Il faut un matériel référent ». (Mme A, entretien final)

Le changement de contexte[140] ne semble pas être un enjeu important pour certains enseignants, malgré les préconisations faites dans la ressource. Il est possible que cela soit un effet involontaire du fait d’avoir proposé dans la ressource quatre situations-clés à la suite dans le même contexte. Mais, comme le suggère l’extrait de l’entretien avec Mme A, cela peut aussi être lié à une volonté de certains enseignants de repousser ce moment qu’ils savent difficile pour les élèves, comme nous l’avions déjà constaté dans la pré-expérimentation. Cela pourrait expliquer le fait que certaines situations complémentaires ne sont pas utilisées ou seulement en fin de séquence. Enfin, cela peut être lié au temps que les enseignants souhaitent accorder à cette séquence. Ils nous indiquent tous que ce travail les a amenés à passer beaucoup plus de temps sur la numération qu’ils ne le font habituellement.
La ressource n’est pas une aide pour permettre aux enseignants d’identifier le jeu sur les différents contextes. Par exemple, Mme E (GT) demande, lors de la réunion finale avec le groupe de travail, à propos du tableau récapitulatif des situations principales et complémentaires :

> « Et moi y’a un truc que là, comme ça, que j’ai mis du temps à comprendre, dans un autre contexte, est-ce que c’est une situation que je dois, enfin que je peux faire juste dans la même séance ou juste après ou est-ce qu’il faut que je fasse mes 5 situations et quand j’ai fait mes cinq avec mes bûchettes je prends mes autres contextes ? »

Voici ce que lui répond M. B : « le tableau moi je comprends ainsi : si tu fais les trois situations 1, 2 3, tu peux refaire la même chose avec un autre matériel […] sans avoir fait les situations 4 et 5 ». La ressource a donc pu suggérer à certains enseignants de ne travailler les situations que dans un seul contexte et de prévoir des changements de contextes seulement

[140] La décontextualisation des connaissances ne se réduit pas à la rencontre de différents contextes. Par exemple, il faut aider les élèves à structurer les ressemblances entre les matériels rencontrés, ce qui peut se faire par l’utilisation des unités de numération dans la mise en œuvre des séances plutôt que de décrire à chaque changement de contexte les groupements avec un nouveau vocabulaire lié à ce contexte.

à la fin. Il y a donc des modifications importantes à prévoir dans la ressource concernant le processus de décontextualisation.

Les traces écrites de synthèse

Certains enseignants font très peu ou pas du tout de traces écrites de synthèse sur les savoirs en jeu dans les situations. C'est le cas par exemple d'une enseignante (Mme E, GT) qui se limite à une affiche où sont dessinés les différents groupements matériels avec le nom de l'unité correspondante en dessous. Un autre (M. B, GT) fait une trace écrite mais directement sur le tableau donc provisoire. Cette trace montre le lien entre chaque unité (dont un dessin est donné dans le contexte des bûchettes) et sa position dans l'écriture en chiffres, comme l'affiche faite par Mme J. Mme F (GT) fait aussi une unique trace écrite sous forme d'une affiche où sont données les relations entre les différentes unités successives (avec groupements matériels collés sur l'affiche).

Pour la situation de dénombrement, cinq enseignants (dont les trois du GL) font une trace écrite montrant la relation entre chaque unité et son écriture en chiffres. Quatre enseignants (dont deux du GL) font une trace écrite sur les relations entre unités. Ces traces écrites prennent la forme d'affiches collectives sauf pour une enseignante qui fait écrire la synthèse dans le cahier de leçon des élèves.

Pour la situation de commande seulement deux enseignants (du GL) font une trace écrite. Cette trace contient différentes décompositions (ou commandes) d'un même nombre. Elle est faite sous forme d'une affiche collective dans les deux classes.

Il semble que les enseignants s'appuient sur les *éléments de synthèse* proposés dans la ressource pour construire leur trace écrite de synthèse. Mais ils n'en gardent que la description des savoirs (principe de position et principe décimal). Les techniques (savoir-faire) ne sont en général pas décrites dans ces synthèses. Les deux exceptions concernent la trace écrite de Mme A qui reprend presque mot pour mot les *éléments de synthèse* donnés pour le dénombrement d'une collection et celle de Mme H qui montre différentes décompositions d'un nombre en soulignant les chiffres utilisés dans l'écriture en chiffres (technique de troncature). Ce peu de trace écrite de synthèse sur la situation de commande est cohérent avec nos observations de classe où les techniques sont souvent peu visibles dans la classe.

Le contenu des traces écrites de synthèse est donc très condensé et ne pointe que le savoir principalement en jeu. Ces traces contiennent peu (ou pas) de texte : ce sont plutôt des dessins, tableaux, égalités (1 millier = 10 centaines, etc.), … qui sont utilisés.

Les évaluations éventuelles

Trois enseignantes (Mme E du GT, Mme G et Mme J du GL) nous ont indiqué qu'elles ont fait une évaluation pendant la séquence. Il semble que ce soient des évaluations proposées tous les ans à la même période de l'année. Nous pouvons remarquer que ces enseignants ne tiennent pas compte du travail effectué dans leur séquence pour modifier le contenu de cette évaluation par rapport aux années précédentes, ce qui témoigne d'une stabilité de ces évaluations. Ainsi ces évaluations concernent principalement écrire/nommer, les types de tâches liés à l'ordre (comparaison, rangement, placement de nombres sur la droite numérique, …) et les décompositions/recompositions canoniques (principalement en EAC ou EPDC). Dans celle de Mme G, il y a également les types de tâches « chiffre des » et « nombre de » ainsi que recomposer à partir d'une EUN avec plus de dix unités à un ordre (31c 5d), mais il ne s'agit pas d'un ajout suite à la séquence puisque cette évaluation est reprise d'une

année sur l'autre. Ce sont les seuls exercices mettant en jeu les conversions que nous avons observés dans les évaluations proposés par les enseignants. Aucune conversion entre deux unités dont aucune n'est l'unité simple, n'est proposée. On retrouve ici un effet des contraintes institutionnelles pointées en partie I.
L'évaluation que nous donnons aux enseignants n'a pas pour but de se substituer aux évaluations de classe des enseignants. Cependant Mme A (GT) nous indique qu'elle utilisera l'évaluation de l'expérimentation comme évaluation de classe. Pour les autres enseignants nous ne savons pas quelles évaluations ils vont proposer suite à la séquence.
Ainsi les évaluations utilisées par certains enseignants, reprises des années précédentes, pourraient faire obstacle à l'institutionnalisation des conversions entre unités si les élèves ne sont pas évalués sur ce type de tâche. A contrario, amener les enseignants à prendre en compte les conversions dans leurs évaluations pourrait permettre une meilleure institutionnalisation de ce type de tâches et un travail plus approfondi d'entraînement. C'est parfois quand les enseignants voient l'évaluation finale de l'expérimentation qu'ils prennent conscience des types de tâches hors contexte à faire travailler (les conversions en particulier). C'est par exemple ce que nous indique Mme J (GT) lors de l'entretien final. La ressource ne suffit pas pour permettre aux enseignants de prendre conscience de la nécessité de ce travail. Il pourrait être intéressant de mettre en évidence dans la ressource un exemple d'évaluation à proposer aux élèves en fin de séquence. Il est possible que cela « parle » davantage aux enseignants que la partie III sur la construction d'une séquence où les types de tâches à travailler sont indiqués.
Enfin, on peut noter un contraste entre les exercices sans contexte proposés dans ces évaluations (aucun problème en contexte) et le travail proposé par les enseignants au cours de la séquence où justement nous avons relevé peu d'exercices hors contextes. Cela renforce notre constat de transparence du travail nécessaire de décontextualisation.

Des spécificités des séquences des enseignants du groupe libre ?

Peut-on identifier des différences entre les séquences des deux groupes ? Nous ne pouvons pas affirmer que cela est l'effet de l'expérimentation (étant donné le peu d'enseignants concernés) mais nous avons pu constater certaines différences dans la proposition d'exercices ou de situations complémentaires dans d'autres contextes. Les enseignants du GL restent moins « collés » aux situations principales et à leur contexte (bûchettes). Ils proposent davantage d'exercices d'entraînement et utilisent aussi davantage les situations complémentaires proposées dans le site, alors que les enseignants du GT, quand ils proposent des exercices, se limitent souvent à une entraînement de la situation travaillée juste avant en restant dans le même contexte.
Nous avons aussi observé, pour ce qui concerne les exercices de comparaison, qui occupent en général une place importante dans les manuels et les programmes (cf. Partie I), que les enseignants du GL les intègrent davantage à leur séquence que ceux du GT. Ces derniers ont peut-être sous-investi certaines tâches de numération dont on peut penser qu'ils les travaillaient avant, comme les décompositions canoniques en EAC ou EPDC ou la comparaison[141]. Cela peut aussi être lié à des questions de temps[142].

[141] Cet effet balancier un est phénomène que l'on peut rapprocher de ce que Sierpinska (2006) appelle « loi de radicalisation » qu'elle explique ainsi : la recommandation, « ne faites pas seulement X, comme vous l'avez toujours fait ; faites aussi Y » devient : « il n'est pas correct de faire X, il est correct de faire Y. » (p.34)
[142] Je dois faire Y dans le temps où je faisais X donc je n'ai plus le temps de faire X.

Pour les évaluations, des enseignants du GL s'appuient sur les mêmes que les années passées, mais du coup certaines ne tiennent pas compte d'une partie du travail réalisé dans cette séquence.
Nous avons aussi observé qu'une enseignante du GL avait modifié l'ordre dans lequel étaient proposées les situations principales dans la ressource.
Enfin, les enseignants du GL font davantage de traces écrites, notamment pour la situation des commandes.
Il est donc possible qu'il y ait un effet de l'expérimentation sur la construction des séquences des enseignants. Les enseignants du GL prennent davantage de libertés avec ce qui est proposé dans la ressource, se détachent plus facilement des situations-clés. Les enseignants du GT cherchent à faire leur séquence tout en testant les situations (contrat d'expérimentation), ce qui pourrait les amener à surinvestir les situations-clés. Ils pourraient se donner plus de libertés lors d'une deuxième année d'utilisation, comme le suggère une enseignante.

III.4 Retour sur un choix général pour la ressource concernant les exercices et évaluations. Propositions de modifications.

Un des choix généraux annoncés dès la partie II de la thèse était de laisser une certaine autonomie à l'enseignant pour la conception d'une séquence, à partir des propositions de situations de la ressource. Cependant l'expérimentation nous a amené à revenir sur ce choix concernant la proposition d'exemples d'exercices et d'évaluations pour les élèves, qui pourrait notamment permettre de donner une meilleure visibilité au type de tâches de conversion entre unités.

Des exemples d'exercices d'entraînement

L'expérimentation a montré les inconvénients de notre choix initial de laisser la conception des exercices d'entraînement sous la responsabilité des enseignants. En effet, dans les entretiens certains nous font part de contraintes de temps de préparation qui rendent difficile pour eux ce travail. Proposer des exercices tout faits présente l'intérêt d'inclure des exercices de conversions entre unités afin de pallier l'absence de ce type de tâche observée dans l'expérimentation (cf. II.5).
Les propositions d'exercices peuvent aussi concerner des entraînements aux variantes principales dans des contextes variés ou sans contexte.
La proposition d'exercices pourrait induire des organisations des séquences des enseignants différentes de ce que nous avons vu dans l'expérimentation. Par exemple, il est possible de travailler les savoirs de numération sur des courts moments de débuts de séances, possibilité suggérée par plusieurs enseignants après l'expérimentation.
Enfin, il est possible d'inclure aussi dans les exercices proposés quelques-uns portant sur des types de tâches non travaillés dans les situations proposées comme la comparaison ou les décompositions/recompositions utilisant les ostensifs EAPD ou EPD, afin d'exercer la vigilance de l'enseignant (ne pas abandonner une partie du travail sur la numération).
Il peut être intéressant de prévoir une possibilité de modification des exercices par l'enseignant en les proposant dans une version « traitement de texte ». Ils pourront ainsi les adapter à leur classe, leurs élèves (pour la différenciation), etc. conformément à ce qu'ils nous ont suggéré dans les entretiens.

Pour la conception de ces exercices il pourrait alors être utile de s'appuyer sur le concept d'*assortiments didactiques* (Esmenjaud-Genestoux 2002)[143].

Des exemples d'évaluations

Il pourrait être utile de proposer des exemples d'évaluations dans la ressource pour plusieurs raisons. Tout d'abord, comme pour les exercices, cela permet de pointer certains types de tâches à évaluer, donc à travailler dans la séquence[144], et qui ne sont pas toujours présents dans les évaluations. Ensuite, pour une utilisation de la ressource en formation d'enseignants, nous pensons qu'intégrer nos deux évaluations conçues pour l'expérimentation peut être intéressant car nous avons pu constater qu'elles permettent de motiver le travail sur la ressource. En effet, les évaluations que donnent les enseignants à leurs élèves ne leur permettent pas toujours de voir certaines difficultés. Les évaluations de l'expérimentation permettent de mettre en évidence certaines réussites des élèves mais aussi les difficultés pour certaines recompositions canoniques et surtout pour les tâches mettant en jeu le principe décimal et de voir les progrès éventuels des élèves (entre évaluation initiale et finale) et ce qu'il reste encore à travailler.
Afin de ne pas décourager les enseignants, il peut être envisagé de signaler la difficulté des exercices par des petites étoiles par exemple. Le nombre d'items par exercice et la difficulté de certains items pourraient aussi être revus un peu à la baisse par rapport à celle de l'expérimentation, tout en gardant les mêmes types de tâches. Cela permettrait aussi d'avoir une évaluation plus proche, en termes de temps de passation, de ce qui est proposé habituellement dans les classes.
Dans la version 2 nous avons proposé les deux évaluations de l'expérimentation, sans faire de telles adaptations.

III.5 Les modifications envisagées pour le canevas didactique et pour sa description dans la ressource

Nous allons maintenant revenir sur les modifications envisagées au canevas général comme mise en scène de la SF, sur sa description dans la ressource ainsi que sur certains apports pour l'enseignant (apports sur la numération et prolongements) proposés dans la ressource.
Nous donnerons des exemples de modifications qui ont déjà été prises en compte dans une version 2 de la ressource (annexe CD-ROM ou sur internet[145]). Mais cette version ne tient pas compte de tous nos résultats d'analyses de la version 1 car elle a été conçue avant la fin de notre travail de thèse. Elle a même fait l'objet d'une expérimentation avec des enseignants dont nous n'avons pas eu le temps d'étudier les données.

Mise en scène de la SF

Dans la mise en scène de la SF, nous avons proposé un canevas didactique dont le point de départ consiste à passer d'une collection (puis d'une EUN) à une désignation de sa quantité

[143] Nous avons commencé à le faire pour la version 2 de la ressource, mais ce travail demande à être approfondi.
[144] La relation entre exercices à travailler dans la séquence et exercices d'évaluation n'est cependant peut-être pas aussi nette que cela. Nous avons par exemple observé que des exercices décontextualisées sont proposés en évaluation mais pas dans les séances.
[145] Disponible à l'adresse suivante : http://numerationdecimale.free.fr/ (consulté le 08/07/2013).

en EC avant de traiter le problème inverse. L'expérimentation ne nous a pas amené à réfuter ce choix. Elle a même mis en évidence l'intérêt du début de ce canevas didactique pour renforcer le principe de position. C'est la partie mettant en jeu les conversions qui soulève le plus de questions, nous y reviendrons dans le §III.
Voici les modifications que nous envisageons.

<u>Introduction d'une variable de contexte dans la mise en scène des situations</u>
Nous avons mis en évidence l'importance de la variable de contexte dans nos analyses. Elle doit être prise en compte dans les situations, afin que les connaissances des élèves ne soient pas attachées à un unique contexte, d'autant plus que nous utilisons un matériel de référence qui peut induire cela. Ainsi d'une variante à l'autre nous proposons un jeu à la fois sur l'organisation de la collection (ou du stock pour les commandes) et un jeu sur le contexte (y compris « sans contexte »).

<u>Introduction encore plus précoce des EUN, utilisation d'écritures abrégées</u>
Il semble important de désigner un ostensif privilégié dès que faire se peut (autre que l'EC et le nom des nombres) : les unités de numération. Celles-ci doivent être utilisées à l'oral (l'enseignant peut initialiser ce processus) et à l'écrit (l'enseignant doit proposer de telles écritures y compris pour désigner collections ou des nombres). C'est un pré-requis aux conversions entre unités qui devront se faire dans ces deux registres.
Nous proposons donc d'introduire les EUN dès le tout début du canevas dans les énoncés des problèmes. Il pourra être utilisé pour décrire des groupements dans différents contextes. Cela pourrait permettre aux élèves de s'approprier les unités de numération comme unités de compte. Nous proposons d'utiliser une écriture abrégée en unités de numération avec les lettres M, C, D, U dans la ressource pour faciliter l'utilisation à l'écrit.
Cette utilisation des EUN laisse la possibilité aux enseignants, s'ils le souhaitent, d'utiliser une expression contextualisé au matériel choisi (par exemple 3 centaines de bûchettes). L'utilisation de dessins pour décrire la collection ne nous semble pas être une étape nécessaire entre la collection matérielle et les EUN car elle retarde inutilement l'introduction de cet ostensif. Il est même possible d'indiquer que parfois elle se pose en obstacle.

<u>Exercices de conversions entre unités</u>
Les conversions ne sont pas l'objet d'un jeu spécifique dans la SF : elles pourraient pourtant être travaillées dans tous les jeux avec un choix des variables didactiques approprié.
Les enseignants ne sont pas familiers avec les exercices de conversions entre unités : il est nécessaire de leur en fournir des exemples tout faits ainsi que des exemples d'évaluation pour les élèves.
Etant donné l'importance de ce type de tâche dans le canevas, nous pensons même qu'il serait profitable d'entraîner très régulièrement les élèves aux conversions dans des petits exercices proposés en début de séance. Cela peut être proposé aux enseignants.

Description du canevas didactique dans la ressource

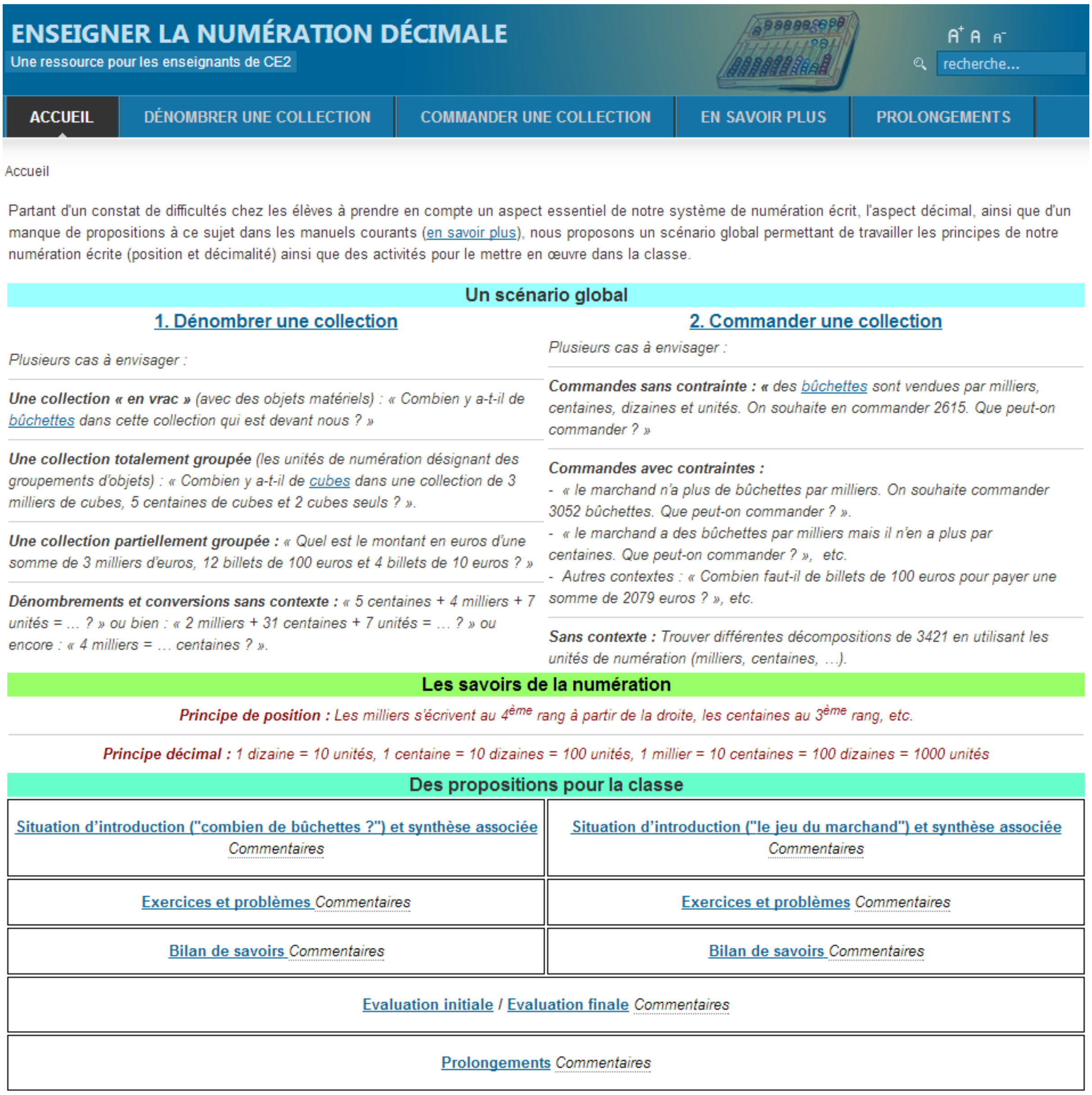
Suite à certains problèmes d'utilisabilité de la ressource pour avoir une vue globale du canevas didactique (notamment pour leurs premières visites du site) et pour construire une séquence, il apparaît nécessaire de repenser la description de ce canevas en meilleure articulation avec les situations.

<u>Découpage en deux situations principales avec leurs variantes</u>
Le fait de donner à voir, non pas cinq mais seulement deux situations principales, le dénombrement et la commande d'une collection, devrait clarifier la vision du canevas

didactique pour l'enseignant. Il est important de mettre en évidence les différentes variantes obtenues en jouant sur l'organisation de la collection ainsi que sur les contextes, conformément à nos choix de mise en scène de la SF.

Visibilité du canevas dans la ressource

Pour permettre aux enseignants de comprendre et d'utiliser le canevas didactique nous proposons d'en donner la description dès la page d'accueil du site afin que ce soit en quelque sorte un passage obligé pour la navigation dans le site. Voici la page d'accueil que nous proposons pour une version 2 de la ressource en tenant compte de ce principe :



ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE
Une ressource pour les enseignants de CE2

recherche...

ACCUEIL | DÉNOMBRER UNE COLLECTION | COMMANDER UNE COLLECTION | EN SAVOIR PLUS | PROLONGEMENTS

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants (en savoir plus), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

1. Dénombrer une collection	2. Commander une collection
Plusieurs cas à envisager :	*Plusieurs cas à envisager :*
***Une collection « en vrac »** (avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de bûchettes dans cette collection qui est devant nous ? »*	***Commandes sans contrainte :** « des bûchettes sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »*
***Une collection totalement groupée** (les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de cubes dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».*	***Commandes avec contraintes :*** *- « le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».* *- « le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.* *- Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.*
***Une collection partiellement groupée :** « Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »*	
***Dénombrements et conversions sans contexte :** « 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = … ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = … ? » ou encore : « 4 milliers = … centaines ? ».*	***Sans contexte :** Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, …).*

Les savoirs de la numération

***Principe de position :** Les milliers s'écrivent au 4ème rang à partir de la droite, les centaines au 3ème rang, etc.*

***Principe décimal :** 1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines = 100 unités, 1 millier = 10 centaines = 100 dizaines = 1000 unités*

Des propositions pour la classe

Situation d'introduction ("combien de bûchettes ?") et synthèse associée Commentaires	Situation d'introduction ("le jeu du marchand") et synthèse associée Commentaires
Exercices et problèmes Commentaires	Exercices et problèmes Commentaires
Bilan de savoirs Commentaires	Bilan de savoirs Commentaires
Evaluation initiale / Evaluation finale Commentaires	
Prolongements Commentaires	

Figure 118 : Proposition de page d'accueil pour la version 2 de la ressource

On y retrouve tout ce qui nous semble essentiel pour une bonne appropriation du canevas didactique tout en y associant des propositions pour la classe.

Les apports pour l'enseignant sur la numération et les prolongements

Ces éléments de la ressource ne sont pas beaucoup utilisés par les enseignants. Leur articulation avec les situations et le canevas général pourrait être améliorée via des liens hypertextes.

<u>Les apports sur la numération pour l'enseignant</u>
Cette partie est peu consultée par les enseignants, mais il est important qu'elle leur permette d'approfondir certains aspects s'ils en ressentent le besoin. Elle peut aussi être considérée pour une utilisation par les formateurs d'enseignants.
Pour le moment nous envisageons de conserver des apports sur les points suivants :

- **Les deux aspects de la numération**
- **Les difficultés des élèves**
- **La numération dans les manuels de CE2**
- **Le matériel, les unités et le tableau : les outils de la numération**

Cette partie pourrait être enrichie par différents constats que nous avons faits dans les classes au cours de nos expérimentations. Ce travail n'a pas été fait dans la version 2 de la ressource.

<u>Les prolongements</u>
Cette partie aussi est également peu consultée par les enseignants et peut aussi être considérée pour la formation des enseignants. Cependant il nous paraît de chercher des moyens pour qu'elle soit davantage investie par les enseignants. C'est l'objectif des modifications que nous proposons. Nous visons que les enseignants s'approprient le lien entre la numération et le calcul posé, le calcul mental ou les grandeurs et mesures du système métrique : nous proposons d'expliciter ce lien mais aussi de proposer des exemples de situations ou d'exercices qui le mettent en œuvre. Nous avons en effet observé qu'en l'absence de propositions pour la classe les enseignants n'utilisaient pas ces apports.
Les entretiens avec les enseignants ont permis de constater que ce travail sur les nombres à quatre chiffres amenait certains d'entre eux à se poser des questions sur les nombres jusqu'au million. Il est important de prendre en compte cette question dans la ressource pour montrer aux enseignants la poursuite de la construction, selon les mêmes principes, mais avec l'introduction des classes. Par exemple, nous proposons dans la version 2 de la ressource une situation de dénombrement d'une très grande collection partiellement groupée, qui permet d'introduire la dizaine de milliers et la centaine de milliers. Nous indiquons des éléments de synthèse pour l'institutionnalisation de leur rang dans l'EC ainsi que pour la lecture des grands nombres avec le principe des classes.

IV. Les situations et leur description dans la ressource. Modifications envisagées.

IV.1 Retour sur la description générale des situations dans la ressource

Rappelons que chaque situation est présentée selon ce découpage :

- les *savoirs en jeu* (en appui sur l'organisation mathématique ponctuelle),
- la *situation* (description des enjeux, du matériel, du problème avec des exemples, des variables didactiques),

- des *éléments de synthèse* (comme pour les savoirs en jeu mais avec des éléments contextualisés à la situation),
- des *compléments* éventuels qui peuvent porter sur la mise en œuvre de la situation, des variantes, des prolongements …

Le paragraphe intitulé *les savoirs en jeu* est jugé utile par deux enseignants (Mme H et M. B). Mais plusieurs enseignants indiquent que cela fait une répétition avec les *éléments de synthèse*.
Concernant la description des *situations*, les enseignants en ont un retour positif. C'est « clair », « complet ». M. B nous indique qu'il apprécie la liberté qui est laissée à l'enseignant pour la mise en œuvre. Mais, dans la réunion finale avec le groupe de travail, des enseignants signalent qu'ils aimeraient que les descriptions soient plus « cadrées », avec par exemple des indications de durées. Aucun enseignant ne nous indique qu'il y a trop de choses à lire dans ce paragraphe.
Les *éléments de synthèse* sont utilisés par tous les enseignants excepté Mme J qui ne les a pas consultés. Mme G explique que cela permet de pointer les savoirs en jeu (tout ce qu'il faudra dire aux élèves, ce qu'il ne faut pas oublier), d'autres indiquent que ça permet de savoir où ils vont, de « voir la finalité » (Mme A). Des enseignants déclarent également que cela leur a servi à construire la trace écrite de synthèse qu'ils feront avec les élèves. Une enseignante (Mme G) souhaiterait que les *éléments de synthèse* soient directement prêts pour les élèves («Prêt à consommer ! »).
Pour l'ensemble de chaque situation, les enseignants du groupe de travail (réunion finale) trouvent qu'il y a trop de chose à lire à cause des quatre sous-parties. Certains se sentent obligés de tout lire au risque sinon d'oublier des choses. Ils proposent de réduire la description en gardant seulement celle de la *situation* et des *éléments de synthèse* et en rendant facultative (avec système de lien hypertexte) la lecture des *savoirs en jeu*, pour ceux qui voudraient « se rafraîchir la mémoire ».

IV.2 Les modifications prévues pour les situations et pour leur description dans la ressource

Le retour sur les deux situations et sur leur description dans la ressource a déjà été effectué dans les chapitres 9 (§III) et 10 (§III). Des modifications ont alors été proposées. Nous allons maintenant les préciser et, lorsqu'elles ont été prises en compte pour la version 2 de la ressource, en donner des exemples précis.

Pour la description des deux situations principales

<u>Des modifications liées aux constats sur les pratiques des enseignants (cf. §II)</u>
Concernant les rappels de début de séance réalisés par les enseignants, cela était déjà proposé dans la ressource. Les observations confirment leur intérêt pour la dévolution des situations.
L'absence d'appui sur les formulations des élèves nous amène à considérer qu'il faudrait davantage d'indications sur les formulations de connaissances. Non seulement il faut prévoir une formulation finale pour les savoirs visés mais il serait aussi intéressant de proposer des exemples de formulations possibles d'élèves, plus provisoires. Cela pourrait amener les enseignants à davantage les prendre en compte.
Enfin, concernant le découpage des séances effectué par la plupart des enseignants qui peut les amener à des institutionnalisations prématurées des savoirs en jeu, nous pouvons prévoir

des modifications de la description des situations permettant de disposer de quelques cas (par exemple trois ou quatre collections à dénombrer) pour avoir un milieu pour un travail en groupe des élèves avec une mise en commun des connaissances. Les élèves auraient davantage de responsabilité pour le contrôle de leur réponse (qui est pris en charge par les enseignantes dans les séances observées) et pourraient éventuellement modifier leur stratégie dès la phase de recherche. De plus, dans la phase collective de discussion et validation, les élèves pourraient être davantage impliqués si tous les groupes peuvent s'exprimer (alors qu'avec un travail individuel il n'est pas possible de donner la parole à tout le monde ensuite).
Cette dernière proposition ne correspond peut-être pas aux habitudes des enseignants (c'est ce que suggèrent nos observations) mais elle peut permettre de les sensibiliser à la question de la prise en compte des formulations des élèves.
Ces propositions de modifications n'ont pas encore été prises en compte dans la version 2 de la ressource.

<u>Conséquences des modifications de la description du canevas didactique</u>
Les modifications du canevas didactique et de sa description nous amènent à repenser la description des situations dans la ressource.
Nous avons proposé un découpage par situations. Mais la présentation en continu des différents problèmes et exercices relevant d'une même situation pourrait entraîner une perte de visibilité de certains passages essentiels de la progression qui se situent dans les variantes d'une même situation.
Par exemple il est opportun de réaliser les deux premières variantes de la situation de dénombrement pour conclure sur la position du millier dans l'EC avant de poursuivre. La première variante des commandes permet l'émergence des différentes décompositions d'un nombre ainsi que des conversions entre unités. Nous proposons dans la version 2 de les mettre en évidence comme « situations d'introduction », dans une partie à part des exercices et problèmes. Dans les exercices et problèmes nous proposons d'expliciter les différents cas à traiter, comme par exemple la variante de dénombrement d'une collection partiellement groupée qui est aussi un passage obligé de la progression.
Voici donc les différents éléments correspondant à chaque situation que nous proposons dans la version 2 :

- les différents cas à envisager
- **situation d'introduction**
- **des exercices et problèmes.**
- **éléments de synthèse.**

Les modifications de la description du canevas didactique amènent aussi à repenser la description des savoirs dans la ressource. Il semble en effet plus approprié de prévoir deux niveaux de synthèse : un premier correspondant aux différentes variantes ou exercices, comme dans la version 1, et un autre plus général reprenant tout ce qui a été vu dans le travail sur la situation (de dénombrement ou de commande) ce qui rejoint les propositions d'institutionnalisation de Perrin-Glorian et ce qu'elle appelle situation de rappel de type 1 ou de type 2 (1993, 1994). Par exemple, dans la version 2 de la ressource, des éléments de synthèse sont proposés dans la description de la « situation d'introduction » ainsi que dans certains problèmes (comme le dénombrement d'une collection partiellement groupée). Pour le deuxième niveau de synthèse (plus général), nous proposons aux enseignants de s'appuyer sur une reprise de la situation principale dans un cas problématique mettant en jeu les savoirs importants. Par la suite, nous préciserons plus en détail le dispositif choisi pour faire la synthèse des savoirs de chacune des deux situations principales car il s'agit d'une modification importante prévue pour notre ressource.

Situation de dénombrement d'une collection

Dans la version 1 de la ressource, nous avons décliné la situation de dénombrement en trois réalisations selon l'organisation de la collection : en vrac, totalement groupée, réunion de deux collections.

<u>Le matériel de référence</u>
Le dénombrement d'une collection en vrac permet de poser le problème du dénombrement d'une grande collection et de construire un matériel de référence. C'est essentiel dans le canevas didactique général pour la dévolution des variantes suivantes. Les enseignants acceptent facilement l'utilisation du matériel de référence (les bûchettes) qui est d'ailleurs souvent vue comme la principale nouveauté du travail proposé. Dans la suite de la séquence, ce matériel est souvent ressorti par les enseignants lors de difficultés des élèves, notamment quand les relations entre unités sont en jeu et cela permet effectivement de relancer les élèves.

<u>L'émergence des conditions de la technique de juxtaposition</u>
Nos analyses du chapitre 9 montrent que la situation de dénombrement peut permettre de faire émerger la nécessité des trois conditions de la technique de juxtaposition : respect du rang de chaque unité, présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) et présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'EC. Pour les deux premières conditions, le jeu sur les variables didactiques « ordre de présentation des unités » et « présence/absence d'unités » pour le dénombrement d'une collection totalement groupée a amené certaines erreurs (prévues) dans la juxtaposition des nombres faite par les élèves, en particulier avec l'absence de centaine isolée. Les enseignants s'approprient bien le jeu sur ces variables didactiques (en lien avec le savoir visé) en proposant des cas variés de collections et ils prennent en compte les erreurs des élèves dans les phases collectives de conclusion, ce qui permet de mettre en évidence le rang du millier. Le principe de position est institutionnalisé par les enseignants sous la forme du tableau de numération, comme dans la ressource.

<u>Le jeu sur les différents contextes</u>
Nous n'envisageons pas de modification aux deux premières variantes de dénombrement d'une collection hormis l'organisation d'un jeu sur la variable de contexte déjà évoqué dans le §II. Sur ce point nous proposons de faire une synthèse mettant en relation les différents groupements au fur et à mesure de leur rencontre. Elle peut par exemple se faire sous forme d'affiche car cela correspond à un mode de trace écrite utilisé par les enseignants. Les unités de numération et les relations entre ces unités apparaissent alors comme un point commun à ces différents contextes. Voici ce que nous proposons[146] dans la version 2 de la ressource :

[146] Il aurait été plus opportun d'écrire les unités à gauche, etc. afin de le différencier d'un tableau de numération.

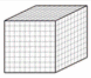
	millier	centaine	dizaine	unité
Bûchettes				
Cubes				
Euros				
	1 millier = 10 centaines	1 centaine = 10 dizaines	1 dizaine = 10 unités	

Figure 119 : proposition d'affiche pour la version 2 de la ressource

<u>Modifications envisagées pour faire émerger la troisième condition (liée aux conversions)</u>

Il apparaît nécessaire de repenser la variante de dénombrement d'une réunion de collections, à la fois pour les enseignants (complexité du choix des nombres-paris à partir de la réunion de collections) et pour l'apprentissage des élèves. Nous avons envisagé deux possibilités : ajouter seulement des centaines et/ou dizaines ou bien remplacer cette variante par le dénombrement d'une collection partiellement groupée (tout en conservant le principe des paris). Cela permet toujours de mettre en jeu la troisième condition de la technique de juxtaposition (présence de nombres à un chiffre dans l'EC). Des quantités comme 2M 15C 8U nous semblent particulièrement intéressantes du fait que la simple juxtaposition des chiffres fournit un nombre à quatre chiffres, ce qui ne permet pas une invalidation immédiate due à la taille du nombre. Nous n'envisageons pas de modification concernant les nombres-paris (tenant compte des erreurs prévisibles des élèves dans la juxtaposition des nombres d'unités) car cela permet d'avoir un enjeu possible de validation lors de la phase de conclusion avec la possibilité de changer de pari. Dans le cas de la réunion de deux collections, les observations de classe ont permis de constater que les élèves font effectivement les erreurs prévues. Le fait de mettre dans le milieu les erreurs possibles des élèves semble amener les enseignants à les prendre davantage en compte. Il faudrait cependant réfléchir à la façon de faire pour que les enseignants ne prennent pas une responsabilité si importante dans la phase de conclusion, ce qui tue l'enjeu de validation prévu.

<u>Présence du type de tâche de conversion entre unités</u>

Comme nous l'avons déjà évoqué dans le §II, il faut prévoir une meilleure intégration de la tâche de conversion entre unités dans cette situation, ce qui peut se faire par l'introduction d'exercices de conversions après cette dernière variante.

<u>La *synthèse des savoirs* pour la situation de dénombrement</u>

Les savoirs à institutionnaliser dans cette situation sont les deux principes de numération en lien avec les recompositions de nombres à partir d'une écriture en unités de numération. L'institutionnalisation doit mettre en évidence les trois conditions de la technique de position. Pour le moment nous n'envisageons pas de réponse à ce problème. Il semble d'abord préférable d'observer les modifications engendrées par nos nouvelles propositions pour cette variante.

Concernant les savoirs à institutionnaliser dans la situation de dénombrement, nous prévoyons une séance de *synthèse des savoirs* adaptée des situations des situations de

rappel[147] de type 2 de Perrin-Glorian (1993) ainsi que des bilans de savoir[148] de Butlen et Pezard (2003). L'objectif de cette synthèse des savoirs est de revenir sur les trois conditions de la technique de juxtaposition. Pour cela nous envisageons de partir du dénombrement d'une collection partiellement groupée et, dans une volonté de dégager des savoirs décontextualisés, de ne pas utiliser un matériel spécifique (même s'il est possible que les élèves parlent de bûchettes ou de cubes au cours de la discussion). Nous évoquons une collection d'objets sans en donner la composition exacte pour amener les élèves à formuler une méthode générale et non à traiter un cas particulier. Des exemples de collections seront donnés ensuite pour voir si la (ou les) méthode(s) des élèves fonctionnent bien.
Voici une consigne possible :

> « J'ai écrit au dos du tableau une collection d'objets (en unités, dizaines, centaines et milliers). Je voudrais savoir combien il y en a en tout. Mais dans cette collection il peut y avoir plus de dix de centaines ou plus de dix dizaines ou plus de dix unités. Pour le moment je ne vous dis pas ce que j'ai exactement. Pouvez-vous me dire comment on fait pour trouver le nombre d'objets en tout ? »

Il est possible d'organiser un travail en petits groupes pour discuter des méthodes. En collectif, les méthodes sont formulées, discutées et testées sur des exemples de collections donnés par l'enseignant.
Les formulations attendues concernent les conditions de la technique de position : $\theta_{CondRang}$ (respect du rang de chaque unité), $\theta_{CondUnité}$ (présence de chaque unité, ce qui peut nécessiter d'utiliser le 0), $\theta_{CondChiffre}$ (présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'EC). Par exemple pour cette dernière condition les formulations attendues peuvent être de ce type : « si on a plus de dix centaines, on peut faire des milliers parce que dix centaines ça fait un millier. On fait pareil avec les dizaines et les unités parce que dix dizaines ça fait une centaine et dix unités ça fait une dizaine ».
Dans la version 2 de la ressource, nous proposons une consigne plus détaillée mais peut-être trop complexe. Une étude complémentaire serait nécessaire pour préciser ce déroulement par rapport à l'objectif visé et étudier sa pertinence pour produire les formulations attendues. En effet, ce fonctionnement pourrait s'avérer assez inhabituel dans des classes ordinaires, ce qui pose des questions sur sa réception par les enseignants. Mais le dispositif que nous proposons peut être adapté de différentes manières comme nous l'indiquons dans la version 2 de la ressource :

> « Seul le contenu de ce bilan reste le même. Il est par exemple possible de poser une question beaucoup plus ouverte en demandant aux élèves ce qu'ils ont appris depuis que

[147] « Les situations de rappel de type 2 portent sur une suite de problèmes sur un thème […]. Chacun des problèmes traités est alors intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau. Au cours d'une telle situation, les formulations évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation qui ont déjà eu lieu ou rencontrer la nécessité de nouveaux. On n'est pas à proprement parler dans une situation de formulation où il s'agit de produire un nouveau langage, ni dans une situation de validation, mais on retravaille les formulations et les arguments déjà produits. […] [Ce type de rappel] a surtout une fonction de décontextualisation et d'ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens avec l'institution de diverses relations » (Perrin-Glorian 1993).

[148] « Notre but est ainsi d'amener les élèves, par un retour collectif et réflexif sur leurs activités, à dépasser le stade de l'action et à prendre de la distance par rapport au contexte de ces activités. En effet, cette situation demandant aux élèves de répondre à la question « qu'est-ce que j'ai appris ? » devrait les amener à se positionner comme sujets en train d'apprendre. […]Elle occupe un moment particulier, spécifique, dans l'enseignement dispensé et devrait initialiser un processus de décontextualisation. (Butlen et Pezard 2003, p.46-50).

> l'on compte des collections. Il est aussi possible de demander des productions écrites à partir desquelles on va pouvoir faire un travail collectif. »

Même s'ils ne l'utilisent pas comme cela est prévu, voire pas du tout, la présence de ce dispositif dans la ressource peut montrer aux enseignants ce qui est visé comme institutionnalisation. Cela peut aussi être utile dans une perspective de formation.

Situation de commande d'une collection

Rappelons que cette situation est une mise en scène du jeu de la SF qui consiste à passer d'une EC à une EUN en tenant compte de contraintes sur le nombre d'unités disponibles dans le « stock ».

<u>Limiter les conversions entre unités</u>
Dans un premier temps nous proposons de limiter les conversions aux unités d'ordres consécutifs (pas de recherche du nombre de dizaines dans des milliers). Cela doit être explicite dans la ressource.

<u>Progressivité dans la taille des nombres</u>
Les analyses montrent l'intérêt de prévoir (et de décrire aux enseignants) une progressivité dans la taille des nombres pour permettre aux élèves de se construire de premières techniques pour les petits nombres par dessins ou additions itérées, ce qui leur permet de s'approprier le fait que pour faire une unité on peut utiliser des unités d'ordres inférieurs. Nous avons observé des difficultés importantes dans les classes à ce sujet. L'utilisation de bons de commandes pourrait limiter l'activité des élèves et est donc à éviter.

<u>Le jeu sur les contextes</u>
Nous proposons de rester dans le contexte des bûchettes pour cette variante afin de permettre une vérification matérielle, mais des exercices permettant de travailler les conversions entre unités et les troncatures dans des contextes différents et hors contexte doivent être proposés.

<u>Clarifier l'objectif visé, faire émerger la troncature avec les conversions</u>
Les analyses faites pour l'expérimentation nous amènent aussi à considérer qu'il faut clarifier l'objectif visé pour que le jeu sur le stock du marchand s'oriente vers cet objectif.
Viser explicitement la technique de troncature et proposer un jeu sur le stock avec absence de millier ou encore absence de centaines (mais avec milliers disponibles) pourrait permettre l'émergence de la technique de troncature avec sa technologie : les conversions en jeu (au moins dans un premier temps).
Une autre façon de faire pourrait consister à se donner deux objectifs dans cette situation : formuler des conversions serait le premier. Par exemple : si on n'a pas de milliers, on peut faire des milliers avec des centaines ; pour 1 millier il faut 10 centaines, pour 3 milliers, il faut 30 centaines, etc. Là aussi on peut jouer sur l'absence de milliers ou l'absence de centaines. C'est seulement dans une deuxième étape que serait visée la technique de troncature, quand les conversions sont bien au point pour les élèves. L'intérêt de cette deuxième option est de ne pas institutionnaliser la troncature trop tôt. Si ce sont les conversions qui sont institutionnalisées, il y a plus de chance que, même si les élèves utilisent la troncature, ils expliqueront pourquoi ils la font ainsi en s'appuyant sur les conversions. Ainsi, la technique (de troncature) pourrait diffuser avec sa technologie (conversions).
Proposer une situation de formulation permettrait de rendre nécessaire le recours à la formulation de la technique visée.

Une situation de formulation pour la situation des commandes de collections

En théorie des situations didactiques (Brousseau 1998), dans une situation d'action, par ses interactions avec un milieu, l'élève se construit un modèle implicite d'action lui permettant de prendre des décisions dans la situation pour résoudre le problème posé. Dans une situation de formulation, ce modèle implicite ne suffit plus, il doit communiquer les stratégies qu'il utilise : « son seul moyen d'action est de formuler ces stratégies » (Brousseau 1998, p. 35). Dans ces situations, l'élève est alors soumis à deux types de rétroactions :

- immédiate de la part de ses interlocuteurs qui lui témoignent qu'ils comprennent ou ne comprennent pas sa suggestion (dans le cas d'un travail en groupes) ;
- différée, de la part du milieu de la situation d'action, quand les formulations proposées sont utilisées dans la situation d'action pour être testées.

Ainsi comme l'explique Margolinas (2003), la situation d'action est incluse dans celle de formulation (en référence ici à la situation de « la course à vingt »[149]) :

> « le jeu existe dès la phase d'action, mais il est toujours présent, dans la situation de formulation, puisque la communication a pour enjeu la réussite d'un élève de l'équipe « le champion » dans le jeu de l'action. On n'est pas dans un schéma où après avoir « manipulé » il s'agirait maintenant de « décrire les manipulations » ni dans un autre dans lequel après avoir « agi », on explicite les mobiles de son action. » (p. 9)

La différence entre une phase de formulation et une situation de formulation est que dans une telle situation, la formulation est contrainte par la situation : il y a une « contrainte sur l'action amenant la nécessité de formulation » (Bosch et Perrin-Glorian, à paraître)[150]. Ce type de condition est rarement réalisé dans les classes ordinaires, où les formulations produites, lors des phases de mise en commun, sont souvent le fait des meilleurs élèves (Margolinas 2003) et :

> « Même si le professeur ne sélectionne pas immédiatement les meilleures formulations dans la phase de bilan et laisse les élèves s'exprimer, cette pratique masque l'absence de travail de formulation de la majorité des élèves qui n'ont fait, au fond, que ce que le professeur leur a demandé individuellement : agir. » (p. 12)

De plus comme le souligne Margolinas (2003), les situations de formulation sont absentes ou très rares dans les manuels de l'école primaire (cela pourrait se limiter aux situations de communication pour l'écriture de programmes de construction de figures qui sont d'ailleurs parfois artificielles). En ce qui concerne la numération et plus particulièrement le cas de la troncature pour la recherche du nombre de centaines dans un nombre à quatre chiffres par exemple (ou même du nombre de dizaines dans un nombre à trois chiffres) nous n'avons pas trouvé de telles situations dans les manuels que nous avons consultés (cf. partie I). De plus, dans les éléments de synthèse décrits dans ces manuels (« mémento », « j'ai appris », etc.), cette technique n'est, en général, pas formulée (invisible), contrairement par exemple à la technique de comparaison de nombres.

[149] Cf. Brousseau 1998.

[150] « La différence principale est […] dans la portée (degré de décontextualisation) de la formulation qui est sollicitée […]. C'est même parce qu'on a un enjeu relatif à la portée de la formulation qu'on ne peut pas obtenir autrement qu'il va valoir la peine de mettre en place une situation de formulation. En effet, si le niveau de formulation obtenu dans la situation d'action est suffisant, il est inutile de mettre en place une situation de formulation qui risquerait de faire perdre du temps aux élèves. » (ibid.)

<u>Concernant la situation de commande d'une collection</u>, on peut alors se demander comment la modifier pour amener des contraintes qui nécessiteront la formulation des techniques construites par les élèves.
L'enjeu de cette situation est de produire des formulations de la technique de troncature avec les conversions associées pour déterminer le nombre de centaines dans un nombre à 3 ou 4 chiffres. Elle a lieu après la situation (d'action) de commande d'une collection à un marchand (avec les modifications proposées précédemment) où les élèves ont été amenés à construire ces techniques de manière implicite avec des contraintes sur le stock du marchand. Dans la situation de formulation, seul le cas où le marchand n'a plus de bûchettes par milliers est considéré.
Nous faisons le choix de ne pas proposer un dispositif de communication avec des élèves émetteurs pour une partie de la classe et récepteurs pour l'autre car nous pensons que cela exige des modalités d'organisation très éloignées des pratiques ordinaires des enseignants.
Voici le problème proposé aux élèves : « Vous allez écrire une méthode pour trouver ce qu'il faut commander au marchand (qui n'a pas de bûchettes par milliers). Votre méthode doit marcher pour n'importe quel nombre ». Les élèves sont par groupes et doivent écrire sur une affiche.
Pour prévoir ces formulations (et les décrire dans la ressource) nous pouvons nous appuyer sur les degrés de décontextualisation de Butlen et Pezard (2003) :

> « Pour les énoncés mathématiques nous avons ainsi distingué trois degrés : l'énoncé formel (théorème, définition, propriété, règle de calcul …), l'énoncé formulé à partir d'un exemple, et l'exemple (ou le contre-exemple) seul sans énoncé de règle généralisante » (p. 57).

En croisant cela avec l'absence/présence de justifications (et donc des conversions), nous obtenons un tableau des différents types de formulations attendues, qui peut être proposé dans la ressource (en complément par exemple afin de ne pas surcharger la description de la situation) :

Savoirs en jeu / Niveaux de décontextualisation	Position	Position et décimalité
Les élèves donnent seulement un exemple	M C D U $\boxed{4\ 3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ 43 centaines, 2 dizaines et 1 bûchette seule.	M C D U $\boxed{4\ 3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ 43 centaines, car 4 milliers = 40 centaines. 2 dizaines et 1 bûchette seule.
Les élèves formulent une règle à partir d'un exemple	M C D U $\boxed{4\ 3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ « Il y a 43 centaines, on s'arrête à la colonne des centaines. On s'arrête parce qu'après c'est les dizaines et les unités. »	M C D U $\boxed{4\ 3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ « Pour le nombre de centaines il faut regarder le rang des centaines et le rang des milliers, parce que 4 milliers c'est 40 centaines. Ca fait 43 centaines, 2 dizaines et 1 bûchette seule. »
Les élèves formulent une règle générale	« Pour trouver le nombre de centaines il faut tracer un tableau et écrire un nombre dans le tableau. On regarde le rang des centaines et ce qui précède. Pour les dizaines et les unités il suffit de regarder les rangs des dizaines et des unités. »	« Pour trouver le nombre de centaines, on regarde le rang des centaines. On prend les milliers aussi parce que dans un millier il y a 10 centaines. Après on regarde les dizaines et les unités »

Figure 120 : Tableau des types d'énoncés attendus (version 2 de la ressource)

Pour la mise en œuvre, les difficultés prévisibles concernent le fait que les élèves ne donnent qu'un exemple seul et ne formulent pas de méthode. Or ce qui est visé est justement la formulation d'une méthode même si elle reste pour le moment contextualisée à un exemple. Il est possible de proposer à l'enseignant, pendant la phase de recherche, de demander aux élèves d'expliquer à l'oral comment ils ont trouvé ce nombre de centaines, ce qui peut faciliter la formulation d'une méthode, puis d'écrire cette méthode. Une autre difficulté peut concerner la phase collective de formulation des méthodes pour validation. Dans la version 2 de la ressource, des éléments sont indiqués permettant de donner une certaine responsabilité aux élèves dans ce travail :

Phase 4. Justification et vérification des méthodes

L'enseignant sélectionne quelques affiches (3 ou 4) qu'il présente aux élèves (au tableau ou sur une feuille …).

En collectif, les élèves doivent chercher si les méthodes fonctionnent pour n'importe quel nombre.

Consigne : « Pour chacune des méthodes vous devez chercher si elles fonctionnent bien pour n'importe quel nombre ».

On peut attendre que les élèves proposent des nombres pour vérifier. S'ils ne le font pas d'eux-mêmes, l'enseignant leur propose de le faire.

Il les encourage à chercher des nombres pour lesquels les méthodes incorrectes ne fonctionnent pas. Par exemple pour amener les élèves à préciser les formulations du type « les deux premiers chiffres » ou « couper le nombre en deux », l'enseignant proposera (si les élèves ne le font pas) de tester avec des nombres de 2 ou 3 chiffres.

Il amènera également les élèves à expliquer pourquoi il faut regarder le rang des milliers aussi et pas seulement le rang des centaines pour trouver le nombre de centaines.

Figure 121 : Propositions pour la phase collective (version 2 de la ressource)

Enfin l'enseignant doit faire une synthèse avec les élèves en écrivant une méthode pour la classe.
Certes les situations de formulation sont rarement présentes dans les manuels de l'école primaire (Margolinas 2003) et peuvent être difficiles à mettre en œuvre dans la classe, mais comme pour la synthèse des savoirs, même si l'enseignant ne l'utilise pas telle quelle, la présence d'une situation de formulation dans la ressource peut l'amener à être plus vigilant sur les formulations des conversions par les élèves dans la mise en œuvre de la situation d'action.
La description de la première variante de la situation de commande pourrait ainsi devenir plus « chargée » que nous le souhaitions, ce qui va à l'encontre de nos principes généraux. Cependant cela peut se justifier par le fait qu'il s'agit de la situation d'introduction (pour les commandes). Pour les problèmes et les exercices nous visons de limiter notre description de la mise en œuvre, des enjeux, etc. à une page A4 au maximum.

<u>La *synthèse des savoirs* pour la situation de commandes</u>
Les savoirs à institutionnaliser pour cette situation concernent le fait qu'un nombre peut se décomposer de différentes manières en lien avec les conversions entre unités, ainsi que la technique de troncature (toujours en lien avec les conversions). C'est déjà ce que nous avions proposé dans la version 1 de la ressource.
Selon le même principe que pour la situation de dénombrement, dans une séance de synthèse des savoirs, afin de dégager des savoirs décontextualisés nous proposons de ne pas utiliser un matériel spécifique (même s'il est possible que les élèves parlent de bûchettes ou de cubes au cours de la discussion). Nous évoquons un nombre à décomposer sans donner la valeur de ce nombre pour amener les élèves à donner une méthode générale et non à traiter un cas particulier. Des exemples seront donnés par la suite pour voir si la (ou les) méthode(s)

des élèves fonctionnent bien. L'important est d'aller vers une formulation qui fonctionne quelle que soit la taille des nombres proposés. Il s'agit donc d'une reprise de la situation de formulation des commandes (situation d'introduction) mais avec la recherche d'une formulation plus générale qui ne se limite pas au nombre de centaines : toutes les unités sont traitées. La recherche du nombre de dizaines dans un nombre à quatre chiffres peut être particulièrement difficile. Elle devra avoir déjà été travaillée dans les problèmes et exercices. Il peut même être envisagé de proposer des nombres à 5 chiffres qui n'ont pas encore été étudiés. La nature itérative des principes de la numération peut être mise en avant dans ces synthèses.
Cela pose les mêmes questions pour la mise en œuvre que le bilan de savoir de la situation de dénombrement.

Un mot pour finir sur la version 2 de la ressource

La version 2 de la ressource est actuellement diffusée sur internet et donc disponible pour tous les enseignants qui souhaitent l'utiliser. Cependant, suite aux modifications effectuées dans cette version, il reste de nombreuses questions à étudier à la fois pour l'apprentissage des élèves et pour la description des situations dans la ressource. De plus de nouvelles propositions ont été faites, non encore prises en compte dans la version 2, et les cycles d'ingénierie doivent se poursuivre. Des pistes de travail sont donc ouvertes au-delà de ce travail de thèse ...

Conclusion générale

Notre travail de recherche vise à identifier des conditions que devrait vérifier une ressource pour aider les enseignants à améliorer leur enseignement de la numération, notamment en prenant davantage en compte le principe décimal. Nous avons étudié plus particulièrement l'enseignement des nombres à quatre chiffres au début du CE2 où le principe décimal fonctionne à plein régime grâce aux quatre ordres d'unités, tout en étant encore enjeu d'apprentissage. Nous avons commencé par une étude de la prise en compte de ce savoir dans l'enseignement actuel de la numération en CE2 ainsi que des connaissances et difficultés des élèves avant de concevoir une ressource sur ce point précis. L'expérimentation a permis de préciser les difficultés des élèves et de recueillir des informations sur les pratiques ordinaires. Notre conclusion se structure ainsi en cinq parties :

1. Des contraintes institutionnelles sur l'enseignement actuel de la numération en CE2
2. Les connaissances des élèves sur la numération et les difficultés résistantes
3. Les pratiques ordinaires des enseignants
4. Des conditions sur une ressource pour enseigner la numération
5. Quelques perspectives

Les limites du travail sont abordées au fur et à mesure des quatre premières parties.

1. Des contraintes institutionnelles pour l'enseignement de la numération au CE2

Notre étude de l'enseignement de la numération a été faite à travers le filtre du principe décimal : nous avons principalement cherché dans les programmes et manuels ce qui pouvait être susceptible de permettre un travail autour de ce savoir et sur les nombres à quatre chiffres au CE2. Sans prétendre faire un panorama complet de l'enseignement de la numération à ce niveau de classe.

Dans la première partie de la thèse nous avons ainsi pointé certaines contraintes institutionnelles concernant le travail en CE2 autour du principe décimal de la numération et

étudié les conséquences possibles sur les séquences construites par des enseignants ordinaires. Les expérimentations des parties II et III nous ont permis de renforcer ou préciser certains résultats.
Dans les programmes et dans les manuels que nous avons étudiés, hormis *ERMEL* (1995, 2005) et *J'apprends les maths* (2003, 2004, 2010), nous avons relevé une place très importante accordée à certains types de tâches mettant en jeu principalement le principe de position : écrire/nommer, comparer et les traductions canoniques d'écritures. Le type de tâche de conversions entre unités est absent des programmes et des manuels pour les nombres à quatre chiffres, comme l'avait déjà relevé Chambris (2010) dans son étude de manuels. Il se peut que la brièveté du texte du programme depuis 2007 entraîne la disparition de la mention du *nombre de* et des décompositions/recompositions diverses.
Dans les manuels étudiés, le *nombre de* est toujours travaillé, souvent à travers la distinction entre le *chiffre des* et le *nombre de.* C'est parfois la seule occasion de mettre en jeu le principe décimal. Dans certains manuels (*ERMEL* et *J'apprends les maths*) les auteurs annoncent leur volonté de travailler la numération selon les deux principes, position et décimalité, qu'ils déclinent en problèmes de dénombrement de collections et de *nombre de* (toujours dans un contexte de collections). Nous avons relevé que l'ouvrage *ERMEL* fournit un terrain propice à un travail sur les conversions entre unités du fait des situations proposées et du choix des valeurs des variables didactiques, même si dans les descriptions des techniques proposées, la place importante donnée aux EPD (écritures selon les puissances de dix, c'est-à-dire utilisant les nombres 1, 10, 100 …) pourrait amener à remplacer les conversions entre unités (donc une explicitation du principe décimal) par des techniques de multiplication par des puissances de dix (phénomène déjà mis en évidence par Chambris 2010).
Dans les manuels, le principe de position n'apparaît souvent qu'à travers des exemples de décompositions ou bien dans le tableau de numération. La technique de juxtaposition, même dans le cas de recompositions canoniques, n'est jamais formulée en texte : elle n'apparaît qu'à travers le tableau de numération qui résume donc la technique et la technologie (nous avons aussi vu dans un manuel un schéma avec des flèches associant chaque chiffre de l'écriture chiffrée au nombre d'unités correspondantes). Et même, dans le manuel *J'apprends les maths*, nous n'avons pas vu de référence explicite au principe de position dans les « j'ai appris ».
Concernant le principe décimal, sa formulation est absente de deux des manuels étudiés alors que l'un d'eux propose plusieurs activités qui sont susceptibles de le mettre en jeu (ce qui peut encore être lié à l'utilisation des écritures selon les puissances de dix). Dans les deux autres manuels le principe décimal est explicité, même si, pour l'un d'entre eux, les activités proposées n'y font pas référence.

2. Les connaissances des élèves et les difficultés résistantes

L'étude des connaissances des élèves commence au chapitre 2 pour les nombres inférieurs à mille, suite aux révisions faites par les enseignants en début d'année de CE2. Elle est ensuite complétée par nos observations de classes ainsi que par les résultats de ces mêmes élèves à une évaluation sur les nombres à quatre chiffres après l'usage de la ressource par leur enseignant. Les évaluations portent sur les types de tâches écrire/nommer, comparer, recomposer (avec des variantes), convertir et *nombre de* : les limites de notre travail sont ici encore liées au fait que nous avons centré notre étude sur certains aspects de l'apprentissage de la numération (certains types de tâches, certains ostensifs). Ces évaluations ne permettent pas de faire une interprétation fine des connaissances et difficultés des élèves. Il s'agit plutôt de se donner un aperçu global, en affinant avec nos observations de classes pour les nombres à quatre chiffres.

Certaines connaissances bien assurées

Nous avons constaté une bonne réussite aux types de tâches écrire/nommer et comparer dans les deux évaluations. Cela peut être relié à leur importance dans les programmes et manuels. Même si la taille des nombres augmente et si le travail de comparaison est parfois moins investi lors de l'usage de la ressource, on peut observer toujours de bonnes réussites pour ces deux types de tâches dans l'évaluation finale.

Difficultés liées à la prise en compte de certaines conditions dans la recomposition de nombres

Pour les recompositions (traductions d'écritures en unités de numération en écritures chiffrées), un jeu sur les variables didactiques a permis de mettre en évidence que certains élèves essaient d'étendre hors de son domaine de validité une technique de juxtaposition de nombres qui fonctionne pour certains cas particuliers. Par exemple, il est possible de recomposer 1m 2c 3d 4u en 1234 par une simple juxtaposition alors que cela ne fonctionne plus pour 1m 2d 3u.
Pour les nombres à trois chiffres, les comparaisons des résultats des élèves aux différents items montrent des difficultés spécifiques liées au respect de chacune des conditions d'application de la technique de juxtaposition. Elles concernent principalement :

- la prise en compte du 0 en cas d'absence d'unité isolée à un certain ordre ;
- la prise en compte des conversions pour les recompositions avec un nombre d'unités supérieur à dix à un certain ordre.

Elles ont été observées aussi pour les nombres à quatre chiffres et nous avons même cherché à les faire émerger avec les situations que nous avons proposées. Notre expérimentation a montré la possibilité d'améliorer la prise en compte de ces conditions, même si, pour les recompositions mettant en jeu des conversions, les difficultés sont encore importantes.

Difficultés des conversions entre unités

Le type de tâche convertir pose des difficultés à de nombreux élèves. Par exemple, en début de CE2, un tiers des élèves environ réussit à convertir 60 dizaines en centaines. Nous avons observé :

- une meilleure réussite pour les conversions « de base » comme 1c = 10d. La connaissance de ces relations de base n'est pas une condition suffisante pour permettre des conversions comme 60 dizaines en centaines par exemple, qui mettent en jeu un raisonnement multiplicatif ou additif itéré.
- une meilleure réussite pour les conversions dizaines/unités que pour les conversions centaines/dizaines. L'appropriation des relations entre unités jusqu'à une certaine tranche ne garantit pas son extension naturelle aux unités d'ordres supérieurs.

L'évaluation sur les nombres à quatre chiffres suggère qu'il n'y a pas de meilleure réussite dans un sens ou un autre pour les conversions (centaines vers milliers ou milliers vers centaines).

Difficulté pour déterminer le nombre de

Le type de tâches *nombre de* pose aussi des difficultés à de nombreux élèves, qu'il soit proposé hors contexte (par exemple moins de 40% des élèves arrivent à déterminer le nombre de dizaines dans 764) ou dans un problème en contexte (30% de réussite, la plupart par des techniques de comptage et non de troncature). Nous faisons l'hypothèse que la faible maîtrise des conversions ne permet pas aux élèves de s'approprier la technique de troncature, ce qui les amène alors à faire des découpages de l'écriture chiffrée inappropriés.

Difficultés pour déterminer des décompositions variées

Dans les classes, pour les nombres à quatre chiffres, nous avons observé des difficultés de prise en compte du fait que dans une unité d'un certain ordre (en particulier le millier) il y a des unités d'ordres inférieurs, connaissance mise en évidence en situation de commande, avec un jeu sur le stock du marchand. Une erreur souvent observée consiste alors à ne pas tenir compte du nombre de milliers (par exemple pour 2165 l'élève commande 1C 6D 5U). Les difficultés augmentent encore pour déterminer le nombre de dizaines dans un nombre à quatre chiffres. D'ailleurs, au vu des difficultés concernant les relations entre unités d'ordres consécutifs, nous n'avons pas considéré la relation entre dizaines et milliers comme un objectif essentiel pour notre ressource.

Des difficultés résistantes

Certaines de ces difficultés sont résistantes. Lors de l'expérimentation, les résultats aux types de tâches convertir et *nombre de* entre l'évaluation initiale et finale restent stables, autour de 50% de réussite. Cela est bien en dessous de ce que nous espérions. Il pourrait en être de même pour les décompositions variées.
Tous ces types de tâches mettent en jeu des conversions entre unités. Une étude complémentaire pourrait permettre de déterminer des liens éventuels entre la réussite aux conversions entre unités et les autres types de tâches.
Il est possible qu'un facteur de résistance au progrès des élèves soit leurs difficultés pour ces mêmes types de tâches pour les nombres à trois chiffres. Le canevas proposé s'appuie en effet sur l'hypothèse de certains acquis pour les nombres inférieurs à mille et vise leur extension au cas des nombres à quatre chiffres, selon le principe de construction itératif décrit au chapitre 1. La stagnation du pourcentage de réussite aux types de tâches cités pourrait alors témoigner d'un apprentissage de cette extension pour les élèves ayant déjà certaines connaissances mais de difficultés persistantes pour les autres. Cela pourrait alors suggérer l'importance de s'assurer d'une bonne compréhension de la numération pour les nombres à trois chiffres.

3. Les pratiques ordinaires des enseignants

Des constats sur l'enseignement ordinaire de la numération sans utilisation de la ressource

Les contraintes institutionnelles pointées dans le §1 ont des répercutions sur le projet des enseignants. Tout d'abord, nos entretiens avec les enseignants lors de l'expérimentation (partie III) montrent que le travail mettant en jeu le principe décimal, pour les nombres inférieurs à mille (en début d'année) semble se limiter au *nombre de* (parfois exprimé en termes de distinction entre *chiffre des* et *nombre de*). Pour les nombres à quatre chiffres, les répercutions observées dans notre étude de cas sans utilisation de la ressource (chapitre 3)

concernent principalement le choix des activités : elles ne mettent en jeu que les principaux types de tâches des programmes. Ainsi, pour une enseignante, aucune séance ne met en jeu le principe décimal même si elle s'appuie sur *ERMEL* qui pourrait le permettre. Pour un autre, une des situations proposées, pourtant susceptible de mettre en jeu le principe décimal, n'est pas gérée ainsi : pour cet enseignant ce savoir ne semble pas être un enjeu d'apprentissage à cette époque de l'année. La troisième enseignante utilise un manuel qui l'amène à faire un travail important autour de tâches mettant en jeu le principe décimal. Mais, devant les difficultés rencontrées par les élèves, elle est amenée à prendre une responsabilité importante dans la mise en œuvre des conversions dans les phases collectives. Ces difficultés apparaissent finalement elles aussi comme une contrainte pour permettre à l'enseignant de mener à bien son projet.
Que ce soit lors de l'analyse de l'enseignement ordinaire de la numération (partie I) ou lors des expérimentations (parties II et III), nous avons pu constater l'influence des contraintes institutionnelles sur les évaluations proposées par les enseignants, qui reprennent bien souvent les types de tâches écrire/nommer, décomposer/recomposer, avancer/reculer et comparer/ranger, même si, pour certains d'entre eux au cours de leur séquence, ils ont centré leur travail sur d'autres types de tâches (dénombrer, *nombre de*). Cela contribue à rendre invisibles pour les enseignants certaines difficultés de leurs élèves.
Cependant nous avons aussi observé lors de certaines évaluations (chapitre 3) des recompositions variées avec plus de dix unités à certains ordres et une utilisation conjointe des écritures selon les puissances de dix (EPD) et des écritures en unités de numération (EUN) pour ces recompositions qui nous font penser qu'il y a des possibilités d'intégration de ce type de recomposition dans les séquences des enseignants.

Des constats sur l'enseignement de la numération en lien avec l'usage de la ressource (parties II et III)

Les constats que nous pouvons faire sur la mise en œuvre des situations de dénombrement et de commandes sont liés à nos choix de mise en scène de ces situations et à leur description dans la version 1 de la ressource.

<u>Situation de dénombrement</u>
Les enseignants s'approprient bien le jeu sur l'organisation de la collection, ce qui permet de confronter les élèves aux trois conditions de la technique de juxtaposition. Le principe de position est un savoir institutionnalisé dans les classes (avec le tableau de numération) suite à la variante de dénombrement d'une collection totalement groupée. Par contre, la variante de dénombrement d'une réunion de collections, telle qu'elle est proposée dans la ressource, ne permet pas d'amener les enseignants à engager les élèves dans un travail de conversions entre unités. En particulier, la gestion des phases de conclusion par les enseignants fait obstacle au travail de validation prévu, qui aurait pu permettre de faire émerger la nécessité des conversions.

<u>Situation de commande</u>
Tous les enseignants n'effectuent pas tout à fait le même jeu sur le stock du marchand (groupements disponibles). Notre volonté de faire travailler les conversions sans viser la troncature dans la première variante de commande s'est donc traduite par un manque de clarté de l'objectif visé.
Certains enseignants proposent des nombres trop grands pour les premières commandes, ce qui rend difficile l'utilisation d'un dessin par exemple pour aller vers une élaboration progressive de la technique visée.

La situation de commande de collections amène les enseignants à effectuer une vérification des commandes lors des phases collectives, ce qui permet de laisser une responsabilité aux élèves pour l'élaboration d'une technique. Cependant aucune technique directe (pour passer de l'écriture chiffrée à l'écriture en unités de numération, ce qui est visé) n'est formulée et *a fortiori* institutionnalisée. Cela rejoint un constat déjà fait par Mounier (2010, p.299 ; p.321) sur une situation de commande en classe de CP. En conséquence, le fait que l'on peut faire des milliers en utilisant des centaines reste invisible dans les classes.

Des constats sur l'utilisation de certains ostensifs de la numération par les enseignants

Ces constats aussi sont liés au contenu proposé dans la ressource, mais ils peuvent de plus être révélateurs de certaines pratiques des enseignants liées à l'utilisation des ostensifs de la numération.

<u>Le lien nom du nombre/écriture chiffrée</u>
Pour des enseignants de CE2 il semble y avoir une certaine transparence du lien entre le nom du nombre et son écriture (en chiffres), comme l'a déjà observé Mounier (2010) pour des enseignants de CP. Cela se traduit dans nos observations notamment par le fait que des enseignants ne donnent pas de support écrit aux élèves pour donner la réponse alors que l'enjeu est de produire l'écriture chiffrée. Ou bien, lors des phases collectives de conclusion, pour écrire les réponses au tableau, les enseignants demandent aux élèves de dire le nom du nombre qu'ils ont trouvé. Cela peut d'ailleurs donner lieu à une réponse correcte pour des élèves ayant trouvé une écriture incorrecte.

<u>Les unités de numération</u>
Utilisation des unités de numération pour décrire les groupements, pour décrire les rangs
Tous les enseignants n'utilisent pas les unités de numération comme des unités de compte, même lorsque les groupements sont ainsi décrits dans la ressource. Par contre, tous utilisent les unités de numération dans le tableau de numération pour dire la position des chiffres. À l'oral, les unités sont aussi utilisées pour désigner le rang dans l'écriture chiffrée : le mot « centaine » par exemple est utilisé pour signifier « le troisième rang à partir de la droite ». Les unités de numération ont une double valence sémiotique : comme unités de compte et comme rangs de l'écriture chiffrée. Dans une des classes observées c'est uniquement la deuxième signification qui leur est donnée car les groupements sont désignés avec un vocabulaire contextualisé. Hormis dans ce cas, on peut penser qu'il y a une influence de la description des ostensifs dans la ressource (pour décrire le milieu de la situation) sur leur utilisation par les enseignants : lorsque les groupements sont désignés avec les unités de numération dans l'énoncé du problème, cela amène les enseignants à les utiliser ainsi.

Utilisation des unités de numération pour faire des conversions
Quand les conversions sont en jeu, l'utilisation des unités de numération devient incontournable du fait de leur valence instrumentale pour les conversions (Chambris 2008). Or, lorsque les unités de numération sont utilisées dans la classe pour faire des conversions (valence instrumentale) c'est uniquement à l'oral. Nous n'avons jamais vu de conversion entre unités écrite au tableau ou sur un cahier d'élève, ce qui pourrait être lié au fait que la ressource ne propose pas d'écritures abrégées pour les écritures en unités de numération, rendant leur utilisation coûteuse à l'écrit. Nous faisons cependant l'hypothèse que cela est surtout lié à l'absence du type de tâches de conversion entre unités dans les programmes et dans la plupart des manuels, ce qui ne permet pas de développer la valence instrumentale des unités de numération pour les conversions. Enfin, concernant les conversions entre

unités que nous avons entendues à l'oral, elles concernent principalement les conversions en unités simples plutôt que les conversions entre unités d'ordres consécutifs (comme entre centaines et milliers par exemple).

Le tableau de numération

Utilisation du tableau quand c'est le principe de position qui est principalement en jeu (au plus 9 unités à chaque ordre).

Dans ce cas, le tableau de numération est utilisé par tous les enseignants (alors que dans la ressource nous n'avions pas dessiné le tableau mais juste écrit le nom des unités au-dessus de chaque chiffre de l'écriture chiffrée). Il leur sert à institutionnaliser le principe de positon. Le tableau de numération présente en effet l'intérêt de montrer le lien entre les unités et leur rang, même si, du coup, ce lien n'est pas formulé en texte (ni oral, ni écrit) dans les classes.

Concernant la valence instrumentale du tableau pour produire l'écriture chiffrée, les enseignants observés appliquent au tableau de numération les mêmes règles que pour l'écriture chiffrée. Par exemple en cas d'absence d'une unité isolée plutôt que de laisser un blanc dans le tableau, ils rendent obligatoire l'écriture du 0. Ou bien ils ne permettent pas l'écriture d'un nombre supérieur à 10 dans une colonne (cf. ci-dessous). L'écriture produite dans le tableau est donc déjà l'écriture chiffrée. D'ailleurs nous avons constaté qu'une fois le nombre écrit dans le tableau de numération, son écriture en chiffres n'est pas donnée hors du tableau.

Utilisation du tableau quand des conversions sont en jeu (plus de 10 unités à certains ordres).

Dans ce cas, en général, le tableau de numération n'est pas utilisé pour sa valence instrumentale pour faire des conversions entre unités. Il n'est d'ailleurs quasiment pas utilisé quand des conversions sont en jeu, alors que, par exemple pour le dénombrement d'une réunion de collections, un tableau de numération avec un nombre à deux chiffres dans une colonne est proposé dans la ressource. Dans cette variante, lorsque le tableau est utilisé c'est uniquement pour dénombrer une des deux collections (totalement groupée) puis poser l'addition. Le seul enseignant que nous avons vu utiliser le tableau pour écrire une collection partiellement groupée ne s'autorise pas à laisser un nombre supérieur à 10 dans une colonne : il efface tout de suite en faisant la conversion à l'oral.

Le matériel de numération pour faire/défaire des groupements

L'utilisation du matériel de numération proposé (bûchettes, élastiques pour réaliser les groupements par dix, sachets et boites …) est acceptée par tous les enseignants dans le cadre de l'expérimentation. C'est souvent ce que retiennent principalement les enseignants comme différence avec ce qu'ils faisaient avant.

Une fois les groupements réalisés pour la première collection en vrac, dans la suite de la séquence, la principale utilisation que nous avons observée est liée aux difficultés rencontrées par les élèves quand des relations entre unités sont en jeu. Les enseignants évoquent ou sortent alors le matériel ce qui permet d'évoquer ou de faire/défaire des groupements.

Même si les trois ostensifs écriture en unités de numération, tableau de numération et matériel ont une valence instrumentale pour les conversions (contextualisées aux groupements pour le matériel), c'est principalement le matériel et l'appui sur les groupements qui sont utilisés par les enseignants quand les conversions sont en jeu, avec éventuellement une utilisation des unités de numération pour décrire oralement ces groupements.

Des constats sur les pratiques non liées spécifiquement à l'enseignement de la numération

Même si l'objectif de départ n'était pas d'analyser les pratiques des enseignants, il a été nécessaire d'en tenir compte pour la conception de la ressource. Le fait d'observer plusieurs enseignants utilisant une même ressource mais aussi un enseignant sur plusieurs séances différentes permet de faire certains constats sur les pratiques de ces enseignants (par comparaisons inter-enseignants et intra-enseignant). Les limites pour une généralisation sont liées au petit nombre d'enseignants observés mais aussi au fait que ces constats sont liés à l'usage de notre ressource : il peut être difficile de distinguer ce qui est relève d'une influence de notre ressource de ce qui relève des habitudes des enseignants (phénomènes d'instrumentation et d'instrumentalisation).

<u>Sur la dévolution des situations</u>

La dévolution des situations ne semble pas poser de difficultés aux enseignants en général. Elle semble facilitée par l'enchaînement des situations proposées dans la ressource (jeu sur les variables didactiques, utilisation d'un matériel de référence, etc.).

Lorsque les enseignants se sont bien approprié l'enjeu et que l'énoncé du problème est assez court, ils ne se sentent pas obligés de coller précisément à la consigne proposée dans la ressource, au choix des nombres proposés, etc. En revanche, dans le cas d'une situation dont l'énoncé est un peu plus long et pour laquelle il y a un choix délicat à faire pour les valeurs de certains variables didactiques (ici choix des nombres à faire en fonction des collections pour le jeu des paris), nous avons pu observer que les enseignants donnaient alors mot pour mot la consigne ainsi que les exemples proposés dans la ressource. Certains nous ont confié ne pas être à l'aise pour la mise en œuvre.

<u>Sur l'organisation du déroulement de la séance</u>

Nous avons remarqué que trois enseignants sur les quatre observés mettent en œuvre la même organisation générale de la séance en alternant de courts moments de recherche et des phases collectives de conclusion. Ils n'organisent que des recherches individuelles (jamais en groupes). La régularité de l'organisation des classes observées, alors que rien dans la ressource n'est précisé à ce sujet, nous laisse penser qu'elle reflète des habitudes de fonctionnement.

<u>Sur la gestion des phases collectives de conclusion</u>

Nous avons porté une attention particulière à ces phases dans nos analyses de séances car c'est ici que sont rendues publiques les erreurs des élèves, les techniques utilisées et leur justification éventuelles. Elles peuvent donc être un enjeu pour la poursuite du processus de dévolution ainsi que pour l'institutionnalisation de premiers éléments de savoir.

Il nous semble avoir repéré l'influence de la description des savoirs en jeu dans la ressource sur la prise en compte des erreurs par l'enseignant, comme l'indiquent Margolinas et al. (2005). En effet lors de la pré-expérimentation, pour le dénombrement d'une collection totalement groupée, nous avions observé qu'une enseignante ne prenait pas en compte les erreurs des élèves dans les phases collectives. Dans l'expérimentation nous avons ajouté à la description du principe de position le rôle du zéro pour marquer l'absence d'unités isolées. Tous les enseignants observés ont pris en compte les erreurs faites par les élèves qui oubliaient d'écrire un zéro et se sont appuyés sur cette erreur pour faire émerger le savoir en jeu. Cependant, dans la variante pour laquelle nous avions prévu un enjeu de validation (sous forme de paris effectués par les élèves), les enseignants prennent la responsabilité de la validation des réponses sans donner aux élèves l'occasion de modifier leur pari.

Dans la situation de dénombrement, nous avons souvent observé que, dans les phases collectives, une technique principale est mise en œuvre sous la responsabilité de l'enseignant et le contrat est de la réutiliser pour le cas suivant. Plus précisément, une fois qu'un élève donne une réponse correcte (après avoir écarté des réponses erronées), l'enseignant met en œuvre la (ou les) technique(s) visée(s) en la (ou les) décomposant en sous-tâches dont il laisse l'exécution aux élèves par un jeu de questions/réponses collectif. Il nous semble que l'objectif de l'enseignant est à la fois de permettre la vérification des réponses et d'institutionnaliser la technique visée.
En revanche, dans la situation de commande, l'enseignant utilise une technique de vérification (qui n'est pas la technique directe) toujours en la décomposant en sous-tâches exécutées par les élèves, mais la (ou les) technique(s) visée(s) n'est (ne sont) pas formulée(s).
Dans tous les cas il fait le passage de la collection vers le nombre et non l'inverse.

<u>Sur l'institutionnalisation des savoirs</u>
Au vu des constats de travaux de recherche actuels sur les pratiques des enseignants du primaire (Butlen et *al.* 2011, Coulange 2011, Margolinas et Laparra 2011), nous avons mis en avant la description des savoir-faire et savoirs visés dans notre ressource (par une description des techniques attendues et de leurs technologies). Lors des entretiens, les enseignants déclarent s'appuyer sur les éléments de synthèse pour préparer leur séance.
Les différences observées pour un même enseignant entre l'institutionnalisation des savoirs dans la situation de dénombrement et dans celle de commande tendent à montrer l'influence du savoir lui-même ou bien de sa description dans la ressource sur l'institutionnalisation qui en est faite par les enseignants.
Tous les enseignants observés institutionnalisent le principe de position à travers le tableau de numération qui cache le principe décimal. Le principe de position, du coup, n'est pas formulé en texte (ni à l'oral ni à l'écrit). Ce tableau est parfois l'objet d'une affiche de synthèse dans la classe, plus rarement d'une trace écrite dans le cahier des élèves qui pourrait en donner un mode d'emploi. Le dénombrement d'une réunion de collections ou la commande d'une collection mettent en jeu des conversions et donc le principe décimal, mais celui-ci n'est pas institutionnalisé dans toutes les classes. Il est rarement l'objet d'une trace écrite (affiche collective ou cahier d'élève). Cela pourrait être lié aux situations (cf. effet des commandes sur la formulation des techniques) mais aussi au manque de visibilité de ce savoir dans les programmes et certains manuels.
Les technologies n'apparaissent souvent que dans leur fonction de mode d'emploi des techniques et non comme des justifications, ce qui est lié à la rareté des enjeux de validation dans les phases collectives. Par exemple, dans le dénombrement d'une réunion de collections, lorsque les enseignants font émerger la technique qui consiste à réunir les deux collections avant de dénombrer la collection obtenue, cela les amène à effectuer des groupements ou évoquer des conversions (plus rarement) : les relations entre les unités (principe décimal) apparaissent comme un moyen d'expliquer *comment* se réalise la technique plus que *pourquoi* il est nécessaire de faire ces groupements ou conversions.
Nous avons aussi pu faire des constats qui pourraient être révélateurs des pratiques des enseignants pour l'institutionnalisation :

- absence d'appui sur les formulations des élèves lors de l'institutionnalisation d'une technique ;
- rareté des traces écrites proposées, ce qui pourrait être une pratique courante, aussi observée par Allard (2010).

Nous avons de plus constaté une disparité dans la réalisation de bilans de fin de séance. Dans la ressource il était proposé d'en réaliser un à chaque fin de séance (avec la question « qu'avez-vous appris aujourd'hui ? »). Un enseignant n'en réalise pas (au cours des séances observées) et une autre revient sur la tâche effectuée par les élèves mais sans faire émerger le savoir en jeu. Les deux autres enseignants observés font presque toujours un bilan de fin de séance. Ces deux derniers enseignants, sensibles à l'institutionnalisation des savoirs, effectuent parfois une institutionnalisation prématurée, ce qui pourrait être un effet (non souhaité) de la description détaillée des éléments de savoirs dans la ressource.
Enfin, concernant l'institutionnalisation considérée dans un sens plus large, l'analyse des séquences ainsi que les entretiens avec les enseignants montrent que le changement de contexte n'est pas un enjeu important pour certains. Ils préfèrent repousser ce moment, voire l'éviter, car ils connaissent les difficultés que cela pose aux élèves. Mais, la version 1 de la ressource n'est pas une aide pour permettre aux enseignants d'identifier le jeu sur les différents contextes. Et il est aussi possible que cela soit un effet de l'expérimentation qui amène les enseignants du groupe « de travail » à ne pas trop s'écarter des situations-clés qui sont à tester.

4. Des conditions sur une ressource pour enseigner la numération

Nous présentons ici ce que nous retenons de notre expérience de conception et de mise à l'épreuve d'une ressource pour enseigner la numération.

Pertinence de la situation fondamentale et de sa mise en scène. Prolongements possibles.

Même si elle est décrite dans le premier chapitre, la recherche de la situation fondamentale a été l'objet d'une réflexion permanente au cours de notre thèse. Ce sont les analyses des situations proposées dans la ressource et de leur mise en œuvre dans les classes qui nous ont permis d'avancer dans cette réflexion.
Nous pouvons dire maintenant que cette situation fondamentale (SF) est bien susceptible de faire fonctionner les savoirs de la numération décimale. Sa mise en scène pose encore des questions, notamment pour les situations mettant en jeu les conversions entre unités mais nous avons montré que le jeu sur les variables didactiques peut permettre de faire émerger les connaissances prévues.
Suite à l'expérimentation de la version 1 de la ressource, nous avons pris en compte une autre fonction de la SF : celle de description du canevas didactique qui permet de mettre en évidence le lien entre le jeu sur les variables (organisation de la collection, contexte) et les savoirs visés. Cela peut permettre de donner une meilleure visibilité à ce canevas pour l'enseignant et servir de point d'appui pour la construction de sa séquence. Cela a été mis en œuvre dans une version 2 de la ressource dont nous avons présenté des extraits dans le chapitre 11. Nous l'avons expérimentée dans plusieurs classes sans avoir eu le temps d'analyser les données.
Des questions se posent sur les possibilités d'utilisation de cette SF à d'autres niveaux d'enseignement, comme par exemple, pour l'étude des nombres à trois chiffres en CE1 où la construction des relations entre unités est un enjeu essentiel, même si ces relations sont plus limitées que pour les plus grands nombres. Mais aussi pour la suite à donner à notre travail en CE2 ou dans les niveaux d'après : un enjeu important concerne la généralisation des relations entre unités pour comprendre leur nature itérative, ce qui est une question que nous n'avons pas abordée dans notre ingénierie.

Ce qui peut motiver pour les enseignants un travail plus approfondi sur le principe décimal de la numération

La numération décimale de position est considérée comme une notion essentielle par les enseignants de CE2 interrogés. Ils sont prêts à passer un temps important sur ce thème, ce qui facilite la proposition d'une ingénierie. Ils considèrent en général que la numération ne pose pas de difficulté aux élèves sauf pour déterminer le *nombre de*. Ils semblent assez démunis sur ce point, ce qui peut même les amener à ne plus enseigner ce type de tâche (c'est le cas d'une enseignante).
La dichotomie aspect position/aspect décimal « parle » bien aux enseignants, même si elle peut être trompeuse car ces deux aspects sont indissociables. Les enseignants ne consultent pas le reste des apports proposés dans la ressource. En particulier, nous avons constaté qu'ils étaient peu sensibles à la question de l'utilisation de la numération en lien avec d'autres notions.
Les évaluations initiale et finale qui servaient pour les besoins de l'expérimentation (mesurer les écarts entre les résultats obtenus par les élèves avant et après l'utilisation de la ressource) sont apparues comme un levier important pour amener les enseignants à prendre conscience de certaines difficultés de leurs élèves et à motiver l'utilisation de notre ressource.
La motivation d'un travail plus approfondi sur la numération peut aussi venir de son intérêt pour la suite de la scolarité (au moins le niveau supérieur). En CM1, avec les nombres décimaux les relations entre unités s'étendent et se complexifient. Cela peut entraîner des difficultés pour certaines tâches comme par exemple la multiplication par les puissances de dix : dans l'évaluation nationale 6ème de 2008[151], environ 88,9% des élèves réussissent 23×10 mais seulement 31,6% réussissent 35,2×100. Il est important de faire prendre conscience aux enseignants de ces difficultés (si ce n'est pas déjà le cas) et de les relier à un déficit d'apprentissage du principe décimal de la numération.

Principes retenus pour la description de la ressource pour les enseignants

<u>Une présentation claire des objectifs</u>
La mise en évidence des deux situations principales permet à la fois d'annoncer des raisons d'être de l'étude de la numération et de clarifier le canevas didactique proposé : de la collection vers le nombre (en écriture chiffrée) ; du nombre (en écriture chiffrée) vers la collection (en appui sur la situation fondamentale). Une description des collections qui est universelle est privilégiée : celle en unités de numération (avec les mots dizaines, centaines, etc.).

<u>Des variantes des situations principales qui guident la progression</u>
Pour chaque situation principale, la progression s'appuie sur un jeu sur l'organisation de la collection ainsi que sur le contexte. Le jeu sur ces variations doit être décrit en lien avec les connaissances visées afin d'aider l'enseignant à comprendre ce qui guide cette progression.
Par exemple, pour le dénombrement d'une collection (sens collection vers nombre) le travail sur les collections totalement groupées permet la construction de connaissances liées à la position des unités dans l'écriture en chiffres et à la compréhension du rôle du chiffre 0, alors que le travail sur des collections partiellement groupées (obtenues par exemple après

[151] Données du Ministère de l'Éducation Nationale : http://evace26.education.gouv.fr/ (site consulté le 11/07/2013)

réunion de plusieurs collections) permet d'articuler ces premières connaissances avec un travail sur les relations entre unités.
L'articulation entre les variantes doit être aussi mise en avant aussi bien dans le lien avec une (ou des) variante(s) précédente(s) en montrant par exemple en quoi cela constitue un pas de plus dans la progression (cf. exemple ci-dessus) mais aussi avec les variantes à suivre pour montrer comment les connaissances construites ici serviront pour la suite de la progression. Par exemple, le travail de dénombrement de collections partiellement groupées est réinvesti dans la situation de commande pour la vérification.

<u>Des exemples d'exercices d'entraînement et d'évaluation</u>
Proposer des exemples d'exercices, modifiables par l'enseignant permet le réinvestissement dans des contextes différents ou hors contexte. Cela permet aussi de pointer des exercices importants pour la progression, comme le travail sur les conversions entre unités. La conception des exercices pourrait s'appuyer sur certains critères mis en avant par Esmenjaud-Genestoux (2002) pour les *assortiments didactiques*.

<u>Des aides pour l'institutionnalisation</u>
Les savoirs visés sont décrits à deux niveaux qui correspondent à deux niveaux d'institutionnalisation. Au premier niveau, dans les différentes variantes ou exercices, l'institutionnalisation peut rester attachée au contexte de la situation ; les limites de la portée des techniques construites peuvent ne pas encore être perçues.
Le deuxième niveau permet une généralisation des techniques construites. Dans la situation de dénombrement, la technique de juxtaposition peut être institutionnalisée en appui sur les différents cas possibles d'organisation de la collection. Cela permet de mettre en évidence ce qui est général dans la technique en lien avec les deux principes de la numération. Pour la situation de commande, la technique de troncature est institutionnalisée avec une généralisation à des nombres de tailles différentes et des unités différentes, ce qui permet de mettre en évidence l'appui sur les relations entre unités. Dans ces deux cas, les institutionnalisations de deuxième niveau permettent de souligner la nature itérative des principes de la numération.
Pour les deux niveaux, des exemples de formulations des savoirs adaptés aux élèves peuvent amener les enseignants à mieux prendre en compte les formulations des élèves et servir de points d'appui pour l'enseignant pour la synthèse orale ou écrite.

<u>Des apports pour l'enseignant sur la numération, des prolongements possibles en lien avec d'autres notions.</u>
Cette partie de la ressource peut être enrichie au fur et à mesure de l'ingénierie en identifiant des points particulièrement sensibles.
Pour faciliter leur visibilité dans la ressource et leur utilisation par les enseignants il faudrait proposer :

- des liens hypertextes vers les apports depuis la description des situations ou du canevas didactique ;
- des exemples de mise en œuvre de la numération en lien avec d'autres notions.

Ces apports sur la numération peuvent aussi être pensés comme étant destinés à des formateurs d'enseignants. Il est illusoire d'en viser une utilisation par tous les enseignants, qui ont différents modes d'engagement dans une ressource (Remillard 2010).

Des points sensibles à approfondir

Le type de tâches de conversions entre unités

Nous n'avons pas réussi à mettre ce type de tâches suffisamment en avant dans la version 1 de la ressource pour que les enseignants s'en emparent. Nous n'avons donc pas pu mesurer les effets de son insertion dans les séquences des enseignants.

L'automatisation par les élèves des conversions entre unités pourrait faciliter leur compréhension de la numération car elles sont en jeu dans diverses techniques. Comment peut-elle se faire ? Les exercices d'entraînement peuvent-ils suffire ? Du côté des enseignants, la proposition d'exercices de conversion les amène-t-elle à les utiliser ? Cela a-t-il aussi un effet sur la mise en œuvre des séances mettant en jeu des conversions entre unités de numération, notamment pour la gestion de phases collectives et l'institutionnalisation des savoirs ?

Nombre de et technique de troncature

Comment amener les élèves à dépasser les difficultés rencontrées pour le type de tâche *nombre de* ? Comment les amener à élaborer une technique de troncature en appui sur la compréhension des conversions en jeu ?

Pour dépasser l'absence de formulation de cette technique observée dans les classes, nous proposons une situation de formulation dans la version 2 de la ressource mais sa pertinence et sa mise en œuvre restent à étudier.

Le tableau de numération

Le tableau de numération est un ostensif déjà utilisé par les enseignants. Plutôt que de questionner sa présence dans la ressource, on peut donc s'interroger sur sa place dans la progression ainsi que sur la façon dont on pourrait amener les enseignants à utiliser la valence instrumentale du tableau pour les conversions.

Les ostensifs EUN (écriture en unités de numération) et EPD (écriture selon les puissances de dix)

En appui sur Chambris (2008) nous avons fait le choix, comme condition, de privilégier et de mettre en avant les unités de numération pour décrire les groupements pour approfondir le principe décimal. Notre travail ne permet pas de revenir sur la pertinence de ce choix, mais pose plutôt des questions sur le lien qu'il serait possible de faire avec les écritures selon les puissances de dix plus familières aux enseignants. Faut-il organiser un travail spécifique entre écritures en unités de numération et écritures selon les puissances de dix ? C'est peut-être possible avec la multiplication par les puissances de 10, mais comment faire travailler le lien entre la technique d'écriture de zéros à droite de l'écriture en chiffres et les conversions entre unités ? L'utilisation du tableau de numération pourrait permettre de faire ce lien grâce à sa valence instrumentale pour les conversions.

Lien avec les types de tâches liés à l'ordre

Notre choix de travail sur le principe décimal de la numération nous a amené à écarter de notre champ d'étude le travail sur l'ordre. Pourtant ce travail peut aussi permettre de mettre en jeu les relations entre unités. Des questions se posent donc maintenant sur les contenus possibles de ce travail et leur articulation avec nos propositions.

Prolongement pour l'étude des grands nombres en CE2 et après

Notre travail nous amène aussi à des questions sur l'étude de la numération des nombres plus grands car c'est une occasion de prolonger l'étude de la numération. Le travail de lecture et écriture qui est un enjeu important pour ces nombres ne peut faire l'impasse d'une compréhension des deux principes de la numération en appui sur les décompositions canoniques (décomposition selon la valeur des chiffres) et non canoniques (pour les nombres de plus de quatre chiffres le millier, puis le million jouent un rôle privilégié à l'oral). Comment organiser le travail sur ces deux objectifs ?

<u>Liens avec le calcul posé et le calcul mental</u>
Nous avons indiqué des liens possibles entre numération et calcul posé. Il resterait à définir comment ces liens peuvent être travaillés dans le cadre d'une progression sur l'année permettant de renforcer à la fois la numération et le calcul posé.
Concernant le calcul mental, de meilleures connaissances des décompositions variées des nombres peuvent permettre de produire des techniques de calcul mental moins courantes que celles s'appuyant sur des décompositions canoniques. Leur description et leur intérêt restent à préciser.

5. Quelques perspectives

La poursuite des cycles

La recherche-développement peut nécessiter de nombreux cycles de conception/ expérimentation avant de produire une ressource qui réponde aux problèmes de départ et qui soit efficace. Au stade où nous en sommes de notre recherche, il est nécessaire de poursuivre ces cycles afin d'avancer sur certaines questions liées à la pertinence des modifications apportées aux situations : le dénombrement d'une collection partiellement groupée permet-il effectivement de faire apparaître des connaissances liées aux conversions entre unités ? La situation de formulation pour les commandes de collections permet-elle de produire des formulations de la technique de troncature et des conversions associées ? Ces questions sont liées à des questions sur la mise en œuvre de ces situations par les enseignants et les adaptations qu'ils en produisent. D'autres questions concernent les modifications proposées dans le chapitre 11 concernant la description du canevas didactique dans la ressource :

- quelles adaptations réalisées par les enseignants à partir du canevas décrit dans la ressource ?
- quelle utilisation des exercices ? En particulier quelle variété dans les contextes proposés ? Quelle utilisation des exercices de conversions entre unités ?
- quelle utilisation des deux niveaux d'institutionnalisation ?

L'usage de la ressource sur un temps long

Pour étudier l'évolution de l'usage de la ressource au cours du temps il faudrait suivre les mêmes enseignants deux années de suite ou plus en considérant que la première année est nécessaire à l'appropriation du canevas général, des situations, des enjeux et que la deuxième peut donner lieu à plus d'adaptations. Les enseignants continuent-ils d'utiliser la ressource l'année suivant l'expérimentation ? Quels en sont alors les usages ? Prennent-ils en compte les modifications dans le cadre des cycles de développement ou continuent-ils de travailler à partir des activités qu'ils avaient construites lors de l'expérimentation ? Après un temps long (plusieurs années), que reste-il de l'usage de la ressource (même si elle n'est plus du tout utilisée) ?
Par ailleurs, un suivi l'année suivante, en CM1, pourrait permettre de voir si la ressource produit des effets à plus long terme sur les apprentissages des élèves, et par exemple son intérêt pour l'apprentissage des décimaux.

Autres dispositifs expérimentaux envisageables

Nous avons aussi vu que la présence du chercheur pourrait contraindre la liberté de l'enseignant sur les adaptations de la ressource (comparaison du groupe de travail et du groupe libre). La poursuite des cycles n'exige pas la conservation du même type de dispositif expérimental. Des adaptations peuvent être faites en fonction des besoins repérés. Par exemple, les questions que nous posons sur les adaptions possibles de situations de formulation ou de séances de synthèse de savoirs dans les classes pourraient nous amener à faire un travail collaboratif avec des enseignants. Nous pourrions aussi mieux identifier l'appropriation du canevas didactique à travers les propositions faites par les enseignants. Enfin cela pourrait aussi enrichir la ressource avec de nouvelles propositions des enseignants.

Il peut même être envisagé, en progressant dans les cycles, de ne plus prévoir d'observations de classe mais seulement ce travail collaboratif avec les enseignants et peut-être un forum de discussion sur le site, tout en continuant d'évaluer les élèves au début et à la fin afin d'avoir un retour sur leurs apprentissages. Des propositions de travail collaboratif avec des enseignants en lien avec la conception d'une ressource sont faites par Georget (2009).

Enfin, si une perspective (plus lointaine) devient la diffusion de la ressource à une plus grande échelle, cela peut amener à envisager différents stades d'expérimentations avec de plus en plus d'enseignants et d'acteurs divers mobilisés (Burkhardt & Schoenfeld, 2003).

Usage de la ressource en formation des enseignants

Dès le début, la ressource a été conçue pour être utile à la formation des enseignants. C'est pour cela que sont prévus non seulement des situations mais aussi des apports pour l'enseignant et des prolongement possibles. Une réflexion pourrait maintenant être menée sur les usages possibles d'une telle ressource en formation des enseignants.

Des dispositifs de formation s'appuyant sur la ressource peuvent commencer à être envisagés et discutés. Voici un exemple de point de départ d'une formation permettant d'illustrer l'utilisation de ces pistes : l'évaluation initiale peut être donnée à l'avance à des enseignants pour faire le point sur les connaissances et difficultés de leurs propres élèves. Des échanges peuvent alors être organisés sur les savoirs en jeu dans ces exercices et leur importance pour les mathématiques de l'école primaire, les difficultés résistantes des élèves jusqu'au collège, etc. Les situations et le canevas didactique peuvent aussi constituer des points d'appui pour la formation puisqu'il reste une certaine marge de manœuvre pour la mise en œuvre des séances et la construction d'une séquence par les enseignants. Cela peut être l'objet d'un travail en amont et/ou en aval pour discuter les choix des enseignants, envisager des alternatives, etc. La possibilité déjà évoquée de forum de discussion sur le site peut permettre de donner un rôle actif dans la conception de la ressource et peut aussi être une modalité de formation.

Des questions peuvent se poser alors sur l'utilisation de la ressource par les formateurs : qu'est-ce qui est mis en avant ? Comment sont utilisées les propositions de la ressource (canevas, situations …) ? Qu'est-ce que les formés en retiennent ? Quelle utilisation du site peut en découler ?

La conception de la ressource est avant tout un moyen d'étude de l'enseignement de la numération et de conditions pour le faire évoluer selon notre objectif de départ : aider les enseignants à améliorer leur enseignement de la numération, notamment en prenant davantage en compte l'aspect décimal de la numération. Il reste encore de nombreuses questions à étudier et pistes à explorer pour produire une ressource qui puisse aider tous les enseignants du primaire à faire apprendre le principe décimal de la numération à tous leurs élèves ...

Bibliographie

Allard, C. (2010). *Des cahiers pour apprendre ? Étude de pratiques enseignantes sur leurs traces écrites en mathématiques.* Mémoire de master, Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

Arditi, S. (2011). *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens.* Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

Artaud, M. (2007). Conditions de diffusion de la TAD dans le continent didactique. Les techniques d'analyse de praxéologies comme pierre de touche. *Actes du IIe congrès international sur la TAD* (2007 : Uzès).

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Revue Internationale des Sciences de l'Education*, 8, 59-72.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.15-25). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Assude, T., Mercier, A., Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en didactique des mathématiques* 27(2), 221-252.

Ball D., Cohen D. (1996). Reform by the Book : What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform ? *Educational Researcher*, 25(9), 6-14.

Bednarz, N., Janvier, B. (1982). The understanding of numeration in primary school. *Educational studies in Mathematics,* 13(1), 33-57.

Bednarz, N., Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N,* 33, 5-31

Bessot, A. (2011), L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques,* Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009 (pp.29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bezout, Reynaud (1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud.* Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table (consulté le 4/06/2013).

Blanchard-Laville, C., dir. (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres ».* Paris : L'Harmattan.

Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(1), 77-123

Bosch, M., Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Perrin-Glorian, M.J. (à paraître). Le langage dans les situations et les institutions. Essai de croisement de points de vue TAD et TS. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques de 2011*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Briand, J., Peltier, M.-L. (2010). Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques, *Séminaire DIDIREM*, Université Paris Diderot.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 167-196.

Brousseau, G. (1995). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP*, 400, 831-850. Disponible en ligne : http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/APM95.pdf (consulté le 24/06/2013)

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Éducation et didactique des mathématiques, *Educacion matematica*, 12(1), 5-39. Disponible en ligne : http://math.unipa.it/~grim/brousseau_didact_03.pdf (consulté le 24/06/2013)

Brousseau, G. (2008). Notes on the observation of classroom practices, *ICME 11*, Monterrey. Disponible en ligne : http://tsg.icme11.org/document/get/315 (consulté le 24/06/2013)

Brousseau, G. (2010). De l'art d'enseigner les mathématiques à la didactique et à l'étude des situations. Diaporama PPT disponible en ligne : http://guy-brousseau.com/111/introduction/ (consulté le 24/06/2013)

Burkhardt, H., Schoenfeld, A. H. (2003). Improving educational research: toward a more useful, more influential, and better funded enterprise. *Educational Researcher* 32(9), 3-14.

Butlen, D., Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation*, Recherche en Didactique des mathématiques*, 23(1), 41-78.

Butlen, D., Charles-Pezard, M., Masselot P. (2011). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Colloque international INRP, Le travail enseignant au XXI^e^ siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle*, Lyon.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des* *élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques.* 30(3), 317-366

Chambris, C. (2012a). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, 89, 39-70.

Chambris, C. (2012b). Étude des conditions pour favoriser les connexions entre les connaissances : une approche écologique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2012*, Genève.

Charles-Pezard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(2), 197-261.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Éds), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, (pp.705-746). Jaen : Université de Jaen. Disponible en ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf (consulté le 24/06/2013)

Condorcet (1988) *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. Paris : ACL - Les éditions du Kangourou, 1ère édition : 1799.

Coulange, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2, *In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (pp.33-44). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Davis, E-A., Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher* 24(3), 3-14.

DeBlois, L. (1995) Le développement de l'écriture des nombres chez Christine. *Revue des sciences de l'éducation*, 21(2), 331-351

DeBlois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques* 16(1), 71-128.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.

El Bouazzaoui, H. (1982). *Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*, Thèse de doctorat Université de Bordeaux 1.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. TD 2 du thème 2. *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques.* Version électronique du cd-rom d'accompagnement. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Fosnot, C-T., Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work : Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH : Heineman.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P., Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

Georget, J-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*, Thèse de Doctorat Université de Paris 7, Laboratoire de didactique André Revuz.

Georget, J-P. (2010). Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation, *Colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) 2009 : Enseignement des mathématiques et développement. Enjeux de société et de formation*. Dakar : Université Cheikh Anta Diop..

Gibel, P., Ennassef, M. (2012). Analyse en théorie des situations didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 17, 87-116.

Gueudet, G., Trouche, L. (2010). Des ressources aux genèses documentaires. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques.* In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.57-74). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris : Flammarion.

Hammoud, R. (2009). *Penser les rapports entre conception et usages des ressources en ligne. Etude dans le cas du site Pégase dédié à l'enseignement de la physique et de la chimie*, Mémoire de master, Université de Lyon.

Hersant, M., (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher, In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. CD-ROM. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement, C., Chambris, C. (2013). Why and how to introduce numbers units in 1st ans 2nd grades. *Actes du colloque CERME 8*, Manavgat-Side, Antalya – Turkey. Disponible en ligne : http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_HOUDEMENT.pdf (consulté le 24/06/2013)

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*, 2 tomes, Paris : R. Laffont.

Leroyer, L., Bailleul, M. (2010). Les enseignants travaillent aussi hors la classe : comment ? *Colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) 2009 : Enseignement des mathématiques et développement. Enjeux de société et de formation*. Dakar : Université Cheikh Anta Diop.

Loiselle, J., Harvey, S. (2007). La recherche développement en éducation : fondements, apports et limites. *Recherches qualitatives*, 27(1), 40-59

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage. Disponible en ligne : http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/88/15/ PDF/1995_Debats_Margolinas.pdf (consulté le 1/07/2013).

Margolinas, C. (2002). Situations milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage. Disponible en ligne : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/18/48/PDF/2002_T2-Cours2-Margolinas.pdf (consulté le 1/07/2013).

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques, *Conférence plénière, Actes du colloque pluridisciplinaire international, Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement*, Bordeaux. CD-Rom. Disponible en ligne : http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/47/02/38/PDF/ 2003_Margolinas_coll_langage.pdf (consulté le 1/07/2013).

Margolinas, C., Coulange, L., Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom ? *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-2-3), 205-234

Margolinas, C., Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. *In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (pp.19-32). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Margolinas, C., Mercier, A., René de Cotret, S. (2007). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques?* Actes des journées mathématiques INRP (2006, pp.25-36). Lyon : INRP.

Margolinas, C., Rivière, O., Wozniak, F. (2011). L'énumération : reprise en vue d'une diffusion aux professeurs des écoles et prolongements, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris : ARDM.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Mercier, A., Assude, T., Matheron, Y., Quilio, S. (2011). Représentations et discours, dans l'action conjointe en situation didactique. *Séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris : ARDM.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

Mounier, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 17, 27-58.

Parouty, V. (2005). Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ? Commission Inter-IREM COPIRELEM.* Toulouse : IREM de Toulouse

Perrin-Glorian, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques* 13(1/2), 5-118.

Perrin-Glorian, M-J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de "classes faibles". *Petit x*, 35, 5-40

Perrin-Glorian, M-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(3), 279-322.

Perrin-Glorian, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.J., Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en didactique des mathématiques* 23(2), 217-276.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Remillard, J. (2010). Modes d'engagement : comprendre les transactions des professeurs avec les ressources curriculaires en mathématiques. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.201-216). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Roditi, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes, *In Vandebrouck F., La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* (pp.73-94). Toulouse : Octarès.

Rogers, A. (2012). Steps in Developing a Quality Whole Number Place Value. Assessment for Years 3-6: Unmasking the "Experts". In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia).* Singapore : MERGA.

Ross, S.H. (1989). Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher,* 36(6), 47-51.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Pétra.

Sierpinska, A. (2006). Entre l'idéal et la réalité de l'enseignement mathématique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 5-39.

Sierra Delgado, T.-A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitude.* Thèse de doctorat. Université de Madrid.

Sinclair, A., Tièche Christinat, C., Garin, A. (1994). Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres ? In : Artigues M., Gras R., Laborde C., Tavignot (Eds.)

Vingt ans de didactique des mathématiques en France (pp.243-249). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Tempier, F. (2009). L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants, *Cahier Didirem*, 60. Paris : IREM Paris 7.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N,* 86, 59-90.

Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigt Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 40, 251-281.

Thomas, N. (2004) The Development of Structure in the Number System. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.305-312). Bergen : Bergen University College Press.

Thompson, I., Bramald, R. (2002). An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition. *Report for the Nuffield Foundation*. Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G., Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. In C. Desmoulins, P. Marquet & D. Bouhineau (Eds). *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (pp.391-402). Paris : ATIEF / INRP.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'université d'été de St Flour : le calcul sous toutes ses formes*.

Van de Walle, J.A. (2010). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally (Seventh edition).* Boston : Pearson Education.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, N. Nieveen, R. M. Branch, K. L. Gustafson, & T. Plomp, (Eds.), *Design methodology and developmental research in education and training* (pp.1-14). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Manuels scolaires

Brissiaud R. (2003) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz

Brissiaud R. (2004) J'apprends les maths CE2, livre du maître, Paris : Retz

Brissiaud R. (2010) J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Paris : Retz

Charnay R. (2007) Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Paris : Hatier

Charnay R. (2007) Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Paris : Hatier

Charnay R. (2011) Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Paris : Hatier

Charnay R. (2011) Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Paris : Hatier

Demagny C., Demagny JP., Dias T., Duplay JP. (2008) La tribu des maths CE2, livre de l'élève, Paris : Magnard

Demagny C., Demagny JP., Dias T., Duplay JP. (2008) La tribu des maths CE2, Guide du maître, Paris : Magnard

ERMEL (1995), Apprentissages numériques, CE2, Paris : Hatier

ERMEL, Madier D., Peney P. (1995), Apprentissages numériques, CE2, Guide d'utilisation, Paris : Hatier

ERMEL, Madier D., Peney P. (1995), Apprentissages numériques, CE2, Cahier de l'élève, Paris : Hatier

ERMEL (2005), Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, Guide pour l'enseignant, Paris : Hatier

Textes des programmes, documents d'applications et évaluations nationales

MEN (2002) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°1 du 14 février 2002

MEN (2002) Documents d'application des programmes : Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3), Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'enseignement scolaire, CNDP, 2002.

MEN (2007) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n° 5 du 12 avril 2007

MEN (2008) Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°3 du 19 juin 2008

MEN Direction de l'évaluation et de la prospective, sous direction de l'évaluation (2005) Evaluations nationales CE2 et sixième.

MEN Direction générale de l'enseignement scolaire (2009) Evaluation nationale des acquis des élèves de CM2.